

# **QUANTUM CIRCUITS AND DEVICES**

**Prof. Daniele Ielmini**  
**A.A. 2023/24**

**Burattini Michelangelo**

# ESSENTIAL QUANTUM MECHANICS

Schrodinger equation 1926 :

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x,t) \right] \Psi(x,t) = i\hbar \frac{d\Psi}{dt}$$

↓  
dipendente dal tempo

$\Psi(x,t)$  e' la funzione d'onda  
e' la soluzione dell'equazione

per una dimensione, una puo' essere estesa anche ad 3D;  
il primo termine e' detto

**HAMILTONIAN FACTOR**

↳ operatore matematico  
nella meccanica quantistica

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x,t)$$

l'elettrone e' trattato come un'onda e non come una particella

**Born's postulate** (1927) → densita' di probabilita' di trovare la  
particella con funzione d'onda  $\Psi(x,t)$

↳ probabilita' di trovare la particella  
tra  $x$  e  $x+dx$  al tempo  $t$

↳ e' anche detta "ampiezza di probabilita'"

$$P(x,t) dx = |\Psi(x,t)|^2 dx = \underbrace{\Psi^*(x,t)}_{\text{complesso conj.}} \Psi(x,t) dx \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = 1 \quad \Leftarrow \text{dalla probabilita'}$$

Le soluzioni dell'equazioni d'onda non forniscono una predizione  
deterministica del moto delle particelle

→ non posso conoscere la posizione nemmeno se conosco velocita' e la  
posizione per  $t=0$  **Heisenberg, 1927**

tutta la meccanica  
quantistica  
ma solo la  
probabilita' e non  
e' deterministica

la funzione d'onda ci fornisce solo un'informazione  
probabilistica (principio di indeterminazione di Heisenberg)

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

pero' calcolo il valore atteso → per un numero  $N \rightarrow +\infty$  di misure

però calcolare per  $N \rightarrow +\infty$  misure cosa posso aspettarmi

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\Psi|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* x \Psi dx \quad \text{come posizione (attesa)}$$

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{p}_x \Psi dx \quad \text{come momento (attesa)}$$

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad \text{momentum operator}$$

• = "operator", come anche per  $\hat{H}$

→ non è una funzione di  $x$ , ma è un operatore di cui  $dx$

**OPERATOR** ogni grandezza fisica (conservabile) può essere rappresentata come un operatore

$\swarrow$  energia totale     $\downarrow$  posizione     $\searrow$  momento

$$\hat{K} = \frac{p^2}{2m} \quad \text{energia cinetica}$$

$$\hat{E} = i\hbar \frac{d}{dt} \quad \text{energia totale}$$

$$\hat{K} = -i\hbar \frac{d}{dx} (-i\hbar \frac{d}{dx}) / 2m = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$$

→ possiamo vedere l'equazione di Schrödinger come **conservazione dell'energia** con gli operatori

$$\underbrace{\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}}_{\text{cinetica}} + \underbrace{V(x,t)}_{\text{potenziale}} = \underbrace{i\hbar \frac{d}{dt}}_{\text{totale}}$$

è un autovettore in uno spazio funzionale

l'autofunzione è una funzione che se "operata" tramite un operatore restituisce la funzione stessa moltiplicata per uno scalare detto autovalore

**proprietà:** ogni operatore  $\hat{O}$  possiede **AUTOVALORI** e **AUTOFUNZIONI**

$\uparrow$  autovalore     $\hookrightarrow$  operatore generico

$$\hat{O} \Psi_n = \lambda_n \Psi_n \quad \text{come per l'algebra matriciale } (A\vec{x} = \lambda\vec{x})$$

$\downarrow$  autofunzione     $\rightarrow$  autovalore     $\hookrightarrow$  autovettore

$\Psi_n$  rappresenta un set di funzioni ortonormali e quindi il prodotto scalare fra due di queste funzioni e' la **DELTA DI KRONIGER**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_i^* \Psi_j dx = \delta_{ij} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

proprietà commutativa  $\hat{A}\hat{B}\Psi - \hat{B}\hat{A}\Psi \neq 0$  generalmente non vale!

ma possiamo definire un **commutatore**:  $[A, B] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$

esempio:  $[x, p_x] = x(-i\hbar \frac{d}{dx})\Psi + i\hbar \frac{d}{dx}(x\Psi)$

$$= \cancel{-i\hbar x \frac{d\Psi}{dx}} + i\hbar \Psi + \cancel{i\hbar x \frac{d\Psi}{dx}} = i\hbar \Psi$$

commutatore

$$\Rightarrow [x, p_x] = i\hbar$$

per i non-zero commutators vale la proprietà  $\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

## Ψ TEMPO-INDIPENDENTE

per semplicità ipotizzo che  $\Psi(x, t) = \psi(x)\varphi(t)$

↗ parte dipendente dallo spazio

↘ dipendente dal tempo

questa separazione e' possibile solo se  $V(x, t) = V(x)$  (potenziale indipendente dal tempo)  
allora, ottengo sostituendo la seguente espressione:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \psi(x)\varphi(t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + V(x)\right) \varphi(t) = i\hbar \psi(x) \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

dividendo per  $\psi(x)\varphi(t)$  ottengo

$$\underbrace{\frac{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\varphi}{dt^2} + V(x)}{\psi(x)}}_{f(x)} = \underbrace{\frac{i\hbar \frac{d\varphi}{dt}}{\varphi(t)}}_{g(t)}$$

↗  $f(x) = g(t) = E$  scalare



la parte spaziale diventa:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + V(x) \psi(x) = \overset{\text{autovalori}}{\bar{E}} \psi(x)$$

$$\hat{H} \psi = \bar{E} \psi \quad \Rightarrow \quad \text{generalmente} \quad \hat{H} \psi_n = E_n \psi_n \quad n \in \mathbb{N}$$

la parte temporale diventa:

$$\frac{d\psi}{dt} = -i \frac{\bar{E}_n}{\hbar} \psi(t) \quad \text{che ha come soluzione} \quad \psi(t) \propto e^{-i \frac{\bar{E}_n t}{\hbar}} = e^{-i \omega t}$$

la soluzione totale e' data dalla sovrapposizione delle due precedenti:

$$\boxed{\Psi(x,t) = \psi_n(x) e^{-i \omega t}} \quad \begin{array}{l} \text{(BASIS STATE} \rightarrow \text{una sola funzione)} \\ \text{STATIONARY STATE} \end{array}$$

in realta' poi la soluzione + generale contiene tutti gli stati base:

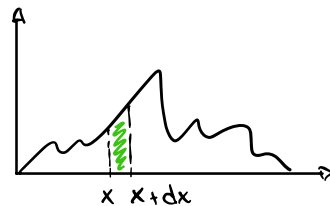
$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-i \omega t} \quad \text{con} \quad c_n = \frac{\bar{E}_n}{\hbar}$$

↓  
probabilita' di ampiezza di misurare la mia particella in quel determinato stato base ( $\psi_n$ )

$$\rightarrow \sum_n |c_n|^2 = 1 \quad \text{dove } |c_n|^2 \text{ e' la probabilita' corrispondente}$$

=> quindi un algoritmo quantico deve essere tale da trovare lo stato base con un'elevata probabilita' (es. 99,9%)

la probabilita'  $p(x) dx = |\Psi|^2 dx$



## FREE PARTICLE

ipotizzo il potenziale non solo indipendente dal tempo, ma pure costante

$$V(x,t) = V(x) = V = \text{costante}$$

allora:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \Psi = E\Psi \quad \text{con } E > 0 \quad \text{e } E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

↓

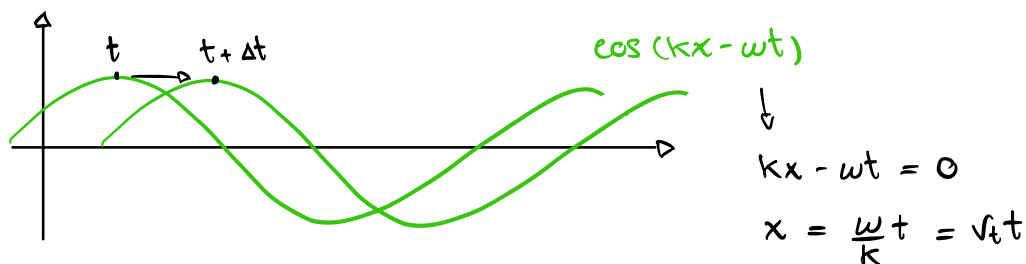
$$\Psi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad \text{la rappresento con Eulero}$$

e quindi:  $\Psi(x,t) = \Psi(x) \varphi(t)$  dove  $\varphi(t) = e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$  come visto

$$= A e^{i(kx - \omega t)} + B e^{-i(kx + \omega t)}$$

→ ←

che e' la rappresentazione di due onde (TRAVELLING WAVE)



l'altra onda viaggia in direzione opposta

se calcolo il modulo al quadrato  $|\Psi|^2 = |A|^2 \rightarrow$  e' costante e quindi non ho informazioni sulla posizione della particella; posso dire che

$$\Delta x = \infty \quad \Rightarrow \quad \Delta p \Delta x \gg \frac{\hbar}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta p = 0$$

$p = \hbar k$  (viene dimostrato nel seguito)

consideriamo l'autofunzione dell'operatore:

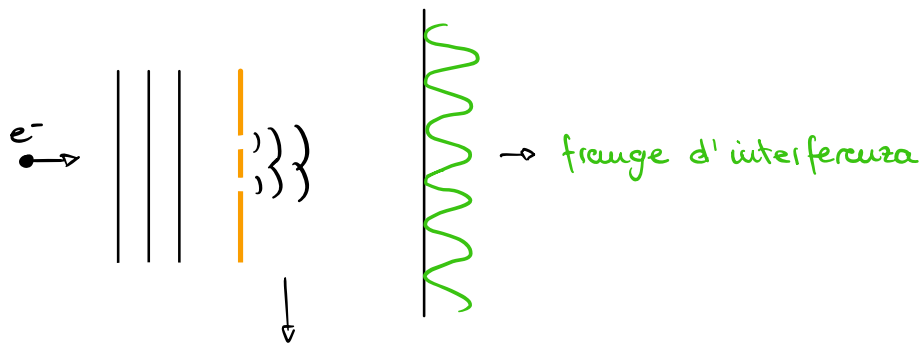
$$-i\hbar \frac{d}{dx} \Psi = p_x \Psi$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ e^{ikx} \end{matrix} \Rightarrow -i\hbar ik \Psi = p_x \Psi \Rightarrow p_x = \hbar k$$

che posso sostituire in  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$  che e' la definizione di

ENERGIA CINETICA

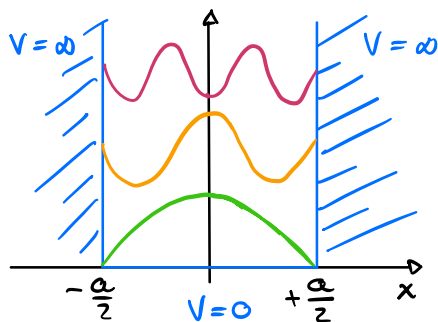
esempio ①



c'e' interferenza

↳ questa rappresenta la probabilita' di dare pos' avere l'elettrone

esempio ②



$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi}{dx^2}}_{\text{finito}} + \underbrace{V \Psi}_{\infty} = \underbrace{E \Psi}_{\text{finito}}$$

allora  $\Psi = 0$  altrimenti l'uguaglianza e' tra parti finite e infinite e non vale  
 $\Rightarrow$  non ho dipendenza dal tempo

→ l'onda e' confinata all'interno della barriera di potenziale: e' un coerco fermo all'interno

→ e' una funzione pari  $\Psi(-x) = \Psi(x) = A \cos kx$  con  $a = \frac{1}{2}$

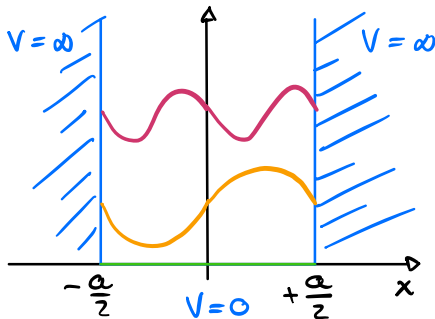
ma posso immaginarmi anche + periodi interi (🔴, 🔵) e quindi più generalmente posso dire che

$$a = n \frac{\lambda}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \boxed{k = n \frac{\pi}{a}} \quad n \text{ DISPARI: } n=1, 3, 5, \dots$$

ma posso avere anche il caso in cui l'onda è un seno e quindi è una funzione dispari:

$$\Psi(-x) = -\Psi(x) \quad \rightarrow \quad \Psi(x) = B \sin kx \quad e \quad a = n \frac{\lambda}{2}$$

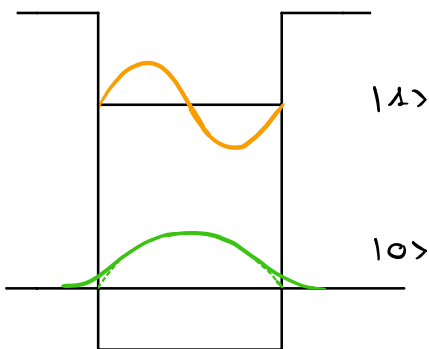
con  $n = \text{PARI} = 2, 4, 6, \dots$



$$\bar{E}_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2} n^2$$

↓  
aumenta con  $n^2$

da questi esempi possiamo derivare il **QBIT** come segue:



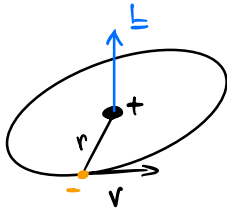
} 'KET' DIRAC NOTATION

posso generare un **qbit** tramite sovrapposizione di questi due stati

# SPIN

prima introduciamo il **momento angolare**:

l'elettrone viaggia attorno al nucleo (protone) a distanza  $r$  e con velocità tangenziale  $v$

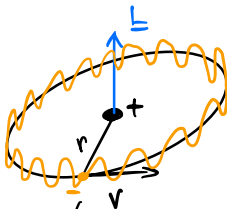


allora definisco il momento angolare come:

$$\underline{L} = \underline{r} \times \underline{p}$$

↳ quantità di moto dell'elettrone  
↳ posizione particella (elettrone)

se passiamo ad un approccio quantico posso descrivere l'elettrone come un'onda



$$\rightarrow |\psi|^2 = 0 \quad \text{O.I.}$$

( $\hookrightarrow$   $n$  raggiunge il punto iniziale l'onda e' in fase (ho interferenza costruttiva))

DE BROGUE

$$\Rightarrow 2\pi r = n\lambda = n \frac{2\pi}{k} \cdot \frac{\hbar}{\hbar} = n \frac{h}{p}$$

$$pr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

ma non e' esatta perche' abbiamo fatto delle approssimazioni

unita' fondamentale del momento angolare ( $\frac{h}{2\pi}$ )

$\rightarrow$  ma  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$  **il momento angolare e' quantizzato**

$$\underline{L} = n\hbar$$

BOHR

quindi non tutte le "orbite" sono possibili, ma solo alcune che sono quantizzate (multipli interi di una base)

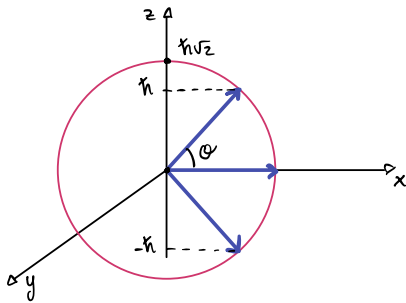
$$L^2 = \hbar^2 l(l+1) \quad \text{dove } l = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \text{quantizzazione del modulo}$$

$$L_z = \hbar m \quad \text{dove } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \pm l$$

otteniamo così due **NUMERI QUANTICI**,  $l$  e  $m \rightarrow$  numero quantico magnetico  
 $\downarrow$   
 numero quantico

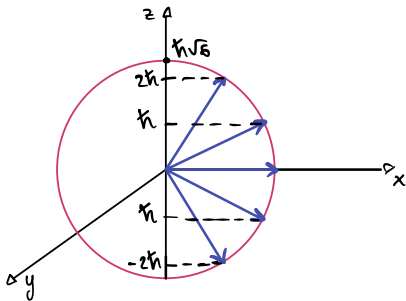
in base a  $l$  posso avere diverse orbite:  $0 \rightarrow s, 1 \rightarrow p, 2 \rightarrow d$

esempio:  $l=0 \quad m=0 \rightarrow L=0 \quad L_z=0$   
 $l=1 \quad m=0, \pm 1 \rightarrow L=\hbar\sqrt{2} \quad L_z=0, \pm\hbar$



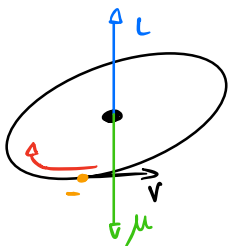
$$\sin \theta = \frac{\hbar}{\hbar\sqrt{2}} \rightarrow \theta = 45^\circ$$

$l=2 \quad m=0, \pm 1, \pm 2 \rightarrow L=\hbar\sqrt{6} \quad L_z=0, \pm\hbar, \pm 2\hbar$



una corrente lungo una spirale (generata dall'e-) genera un dipolo magnetico... posso trovare il momento magnetico

per trovare la relazione che lega  $L$  al **MOMENTO MAGNETICO**  $\mu$  considero:



$$I = \frac{q}{2\pi r} v \quad \text{corrente}$$

$$A = \pi r^2 \quad \text{area orbita}$$

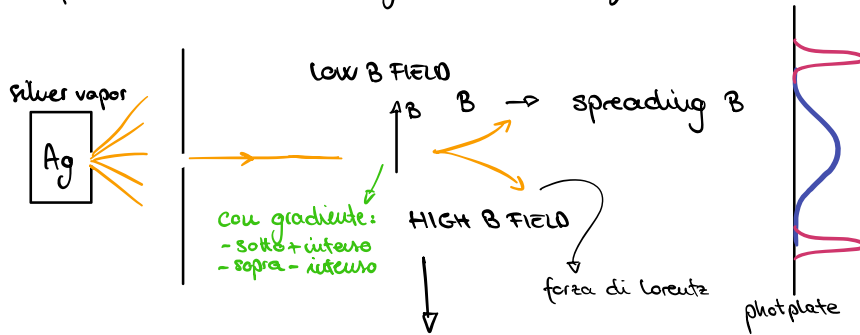
$$\mu = IA = \frac{qm}{2\pi r} \frac{v}{m} \pi r^2 = L \frac{q}{2m} \quad \text{con } q < 0 \text{ carica elettrone}$$

otengo così che

$$\mu_z = \frac{q}{2m_e} L_z$$

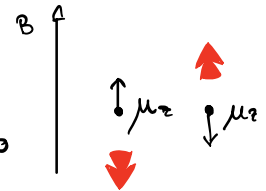
**STERN - GERLACH (SG)** → l'esperimento dimostra la natura ondulatoria della materia (e degli elettroni) e il loro spin

l'esperimento si configura come segue:



$V = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}$  → se  $\underline{\mu}$  è lungo  $\underline{B}$  ho che  $V_2 = -\mu_z B_z$

analogamente posso avere il caso <sup>estremo</sup> in cui il verso è opposto



il caso reale ci mostra che esiste uno **spin**

⇒ l'esperimento mostra che  $\mu$  è **quantizzato**

l'esperimento dimostra che il momento magnetico è quantizzato e che quindi  $\neq 0$  anche per un atomo che ha un  $\mu_z$  (in teoria) = 0 ⇒ è generato dallo spin

$\mu_z = \frac{q}{2m} L_z$   
 ↓  
 può assumere 2 stati

- ma  $L_z$  può assumere solo un numero dispari di stati
- $L_z = 0$  → 1 stato
  - $L_z = 0, \pm 1$  → 3 stati
  - $L_z = 0, \pm 1, \pm 2$  → 5 stati

⇒ la relazione non va bene:

l'Ag ha 47 elettroni = 46 + 1 lo spin si annulla (sono accoppiati x Pauli)



⇒ SPIN UP o SPIN DOWN rispetto alla direzione del campo magnetico interno all'atomo!

↑  $S$  → introduco un altro momento angolare (dovuto alla rotazione sull'asse →) **(ruota attorno al proprio asse)**

componente lungo  $z$ : la sola soggetta alla forza...

$S^2 = \hbar^2 S(S+1)$

è il modulo dello spin, anche detto **INTRINSIC ANGULAR MOMENTUM**

e  $S_z = \hbar s_z$

$S_z = -S, -S+1, \dots, S-1, S$

$S_1 \rightarrow S_z = 0, \pm 1$

**BOSONI** → sono particelle caratterizzate da numeri interi di  $S$ :

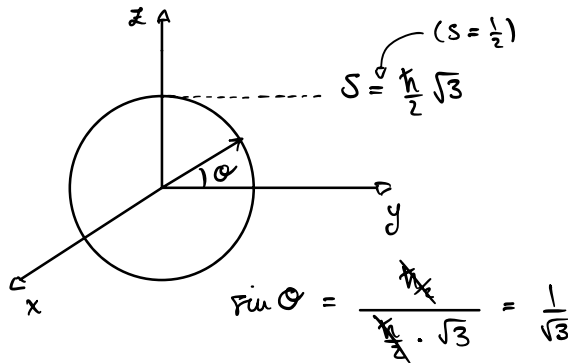
ad esempio:  $S=0$  → particella  $\alpha = \text{He}^{2+}$

$S=1$  → fotoni  
...

- statistica di Bose-Einstein
- non vale il principio di esclusione di Pauli

**FERMIONI** → sono particelle caratterizzate da numeri semi-interi di  $S$ :

ad esempio:  $S = \frac{1}{2}$ ;  $S_z = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}$  → elettroni (anche protoni e neutroni)



- i fermioni seguono la statistica di Fermi-Dirac
- possiedono sempre una massa
- vale sempre il principio di esclusione di Pauli

⇒ max e spin:  $\frac{1}{2} \hbar$

Calcoliamo il **magnete di Bohr**:

$m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

$m_{n,p} = \frac{m}{1836}$

dipende dalla particella

⇒  $\mu_z = g \frac{q}{2m} S_z$  ⇒  $\mu_z \approx \frac{q}{m} S_z$

$g = \text{GYROMAGNETIC RATIO}$

$\mu_z = \pm g \cdot \frac{q}{2m} \cdot \frac{\hbar}{2} = \pm \mu_B$

**BOHR MAGNETON**  $9,27 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$

$\frac{\hbar}{2} = mvr$

↳ mi ricavo il raggio dell'elettrone considerandolo una sfera carica di energia  $E = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} = mc^2 = 0,511 \text{ MeV}$

↳  $r \approx 10^{-15} \text{ m (fm)}$

se calcolo  $v$  con i dati ricavati:  $v = 10^{10} \text{ ms}^{-1} > 10^8 \text{ ms}^{-1} = c$

non e' possibile che vada + veloce della luce nel vuoto



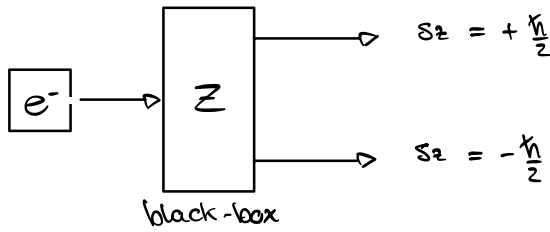
=> **lo spin e' una proprieta'** della particella, proprio come la massa e la carica

→ e' sbagliato il modello dove la particella gira su se stessa! e quindi lo spin e' solo una proprieta' (lo considero al pari della massa o della carica: una proprieta' dell'e-)

*se calcolo la velocita' di rotazione ottengo un valore di  $2 \cdot 10^{10}$  m/s > c e quindi la rotazione non puo' avvenire a tale v!*

**e' una proprieta' che mi descrive come se la particella girasse su se stessa**

torciamo all'esperimento:



probabilita':

50%

50%

lo spin e' random

possiamo vedere l'esperimento come un filtro che seleziona lo spin dell'e-

- SPIN UP
- SPIN DOWN

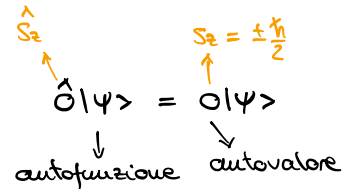
$$|\psi\rangle = \alpha |z_+\rangle + \beta |z_-\rangle$$

↳ autofunzioni degli autovalori positivi

$$|z_+\rangle \rightarrow S_z = +\frac{\hbar}{2}$$

$$|z_-\rangle \rightarrow S_z = -\frac{\hbar}{2}$$

"KET"  $| \cdot \rangle$   
"BRA"  $\langle \cdot |$



$$\Rightarrow \hat{S}_z |z_+\rangle = +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle$$

$$\Rightarrow \hat{S}_z |z_-\rangle = -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle$$

nono le due relazioni

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

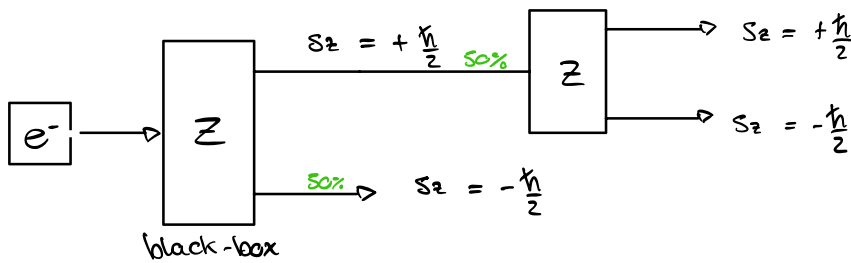
stessa probabilita'

$|\psi\rangle$  e' la descrizione di ogni elettrone nel box e- (c'e' la sovrapposizione degli stati)

=> quando effettuo la misura vedo uno stato e distruggo la sovrapposizione degli stati → ne fino uno che non puo' piu' variare

→ ecco perche' **in un quantum computer non posso leggere il dato durante il calcolo**

aggiungo all'esperimento un'altra black-box:

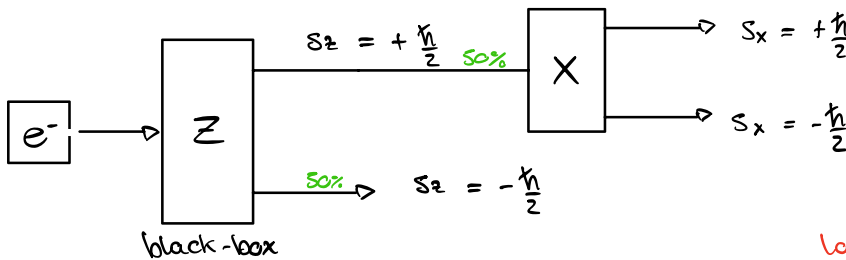


probabilità:

100% → lo spin non può variare

0%

ma se cambio la black-box (il rot dell'esperimento)

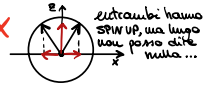


probabilità:

50%

50%

Lo spin dato da Z non ha stati in comune con X



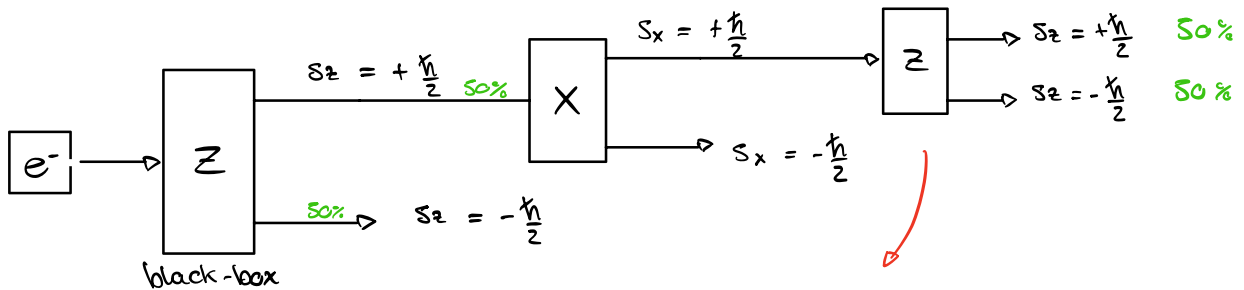
$$\Rightarrow |z_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_+\rangle + |x_-\rangle)$$

$$\Rightarrow |z_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|x_+\rangle - |x_-\rangle)$$

Z è dato dalla sovrapposizione degli stati di X → che hanno il 50% di probab.

⇒ per il principio di indeterminazione, quando misuro una direzione e conosco lo spin, perturbo l'elizione e quindi non posso dire nulla dello spin lungo altre direzioni

... se lo rifaccio una terza volta



se riguardo ancora a z ottengo la stessa probabilità che avevo all'inizio

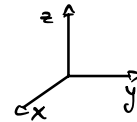
di ottenere i due stati → in questo caso dico che non c'è memoria di quanto fare successo col primo filtro

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + |z_-\rangle)$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - |z_-\rangle)$$

ricaviamo, facendo alcuni calcoli, l'operatore di Pauli:

$$\begin{aligned} \hat{S}_x |x_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |x_+\rangle & \hat{S}_x |x_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |x_-\rangle \\ \hat{S}_y |y_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |y_+\rangle & \hat{S}_y |y_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |y_-\rangle \\ \hat{S}_z |z_+\rangle &= +\frac{\hbar}{2} |z_+\rangle & \hat{S}_z |z_-\rangle &= -\frac{\hbar}{2} |z_-\rangle \end{aligned}$$



voglio sostituire  $x_+, x_-, \dots$  con qualcosa di più tangibile

trascrivo in matrici:

$$\begin{aligned} z_+ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ z_- &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad |\psi\rangle = \alpha |z_+\rangle + \beta |z_-\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

affinche' valga la relazione di prima ho che  $S_z \mid S_z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} e \hat{S}_z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= +\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e \hat{S}_z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \text{otengo 4 equazioni in } a, b, c, d \dots$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

provo con la prima:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

... e con la seconda:

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la stessa cosa puo' essere fatta anche per  $x$ :

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + |z_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - |z_-\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

da cui ricavo

$$\boxed{\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

verifico

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x_+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= -\frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad x_- \end{aligned}$$

e anche per y:

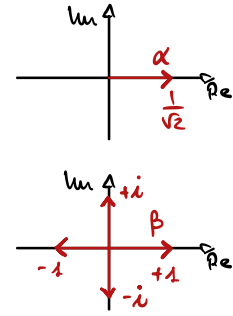
$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle + i|z_-\rangle)$$

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|z_+\rangle - i|z_-\rangle)$$

da cui ottengo l'operatore

$$\hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

che posso verificare, come fatto prima...



→ mi accorgo subito che

Posso definire un nuovo operatore definito **OPERATORE DI PAULI** come:

$$\text{operatore di Pauli} = \frac{\text{spin operator}}{\frac{\hbar}{2}}$$

che chiamo  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = X$$

$$\hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = Y$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = Z$$

$$\hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

→ ho bisogno di un quarto: l'identità

proprietà:

$$\bullet XY = iZ$$

$$\bullet YZ = iX$$

$$\bullet ZX = iY$$

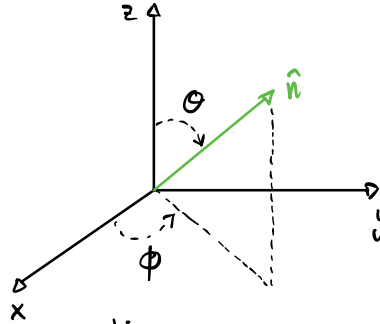
$$\bullet X^2 = I$$

$$\bullet Y^2 = I$$

$$\bullet Z^2 = I$$

... DIREZIONE ARBITRARIA

$$\begin{aligned} n_x &= \sin\Theta \cos\phi \\ n_y &= \sin\Theta \sin\phi \\ n_z &= \cos\Theta \end{aligned}$$



però ricavarmi  $\sigma_n$  come combinazione lineare di  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ :

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sin\Theta \cos\phi \sigma_x + \sin\Theta \sin\phi \sigma_y + \cos\Theta \sigma_z \\ &= \sin\Theta \cos\phi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\Theta \sin\phi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\Theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \cos\phi - i \sin\Theta \sin\phi \\ \sin\Theta \cos\phi + i \sin\Theta \sin\phi & -\cos\Theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta e^{-i\phi} \\ \sin\Theta e^{i\phi} & -\cos\Theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

calcolo il determinante:  $\det(\sigma_n - \lambda I) = \dots$

$$\det \begin{pmatrix} \cos\Theta - \lambda & \sin\Theta e^{-i\phi} \\ \sin\Theta e^{i\phi} & -(\cos\Theta + \lambda) \end{pmatrix} = -\cos^2\Theta + \lambda^2 - \sin^2\Theta = 0 \rightarrow \boxed{\lambda = \pm 1}$$

però ricavarmi con gli autovettori:

$$\lambda = 1: \begin{pmatrix} \cos\Theta - 1 & \sin\Theta e^{-i\phi} \\ \sin\Theta e^{i\phi} & -(\cos\Theta + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \sin\Theta e^{i\phi} n_1 = (\cos\Theta + 1) n_2$$

$$\Rightarrow \frac{n_1}{n_2} = \frac{\cos\Theta + 1}{\sin\Theta e^{-i\phi}} = \dots = \frac{\cos\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2} e^{i\phi}} \Rightarrow |n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} \\ \sin\frac{\Theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$\lambda = -1, \text{ analogamente, ottengo } |n_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\Theta}{2} \\ -\cos\frac{\Theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

anch'essi sono la sovrapposizione di due stati:

$$|n_+\rangle = \cos\frac{\Theta}{2} |z_+\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\Theta}{2} |z_-\rangle$$

$$|n_-\rangle = \sin\frac{\Theta}{2} |z_+\rangle - e^{i\phi} \cos\frac{\Theta}{2} |z_-\rangle$$

# BLOCH SPHERE (e' l'interpretazione fisica di quanto appena fatto)

possiamo esprimere ogni stato come:  $|\psi\rangle = \cos\frac{\Theta}{2}|z_+\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\Theta}{2}|z_-\rangle$

$$|n_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\Theta}{2} \\ \sin\frac{\Theta}{2}e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Theta = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

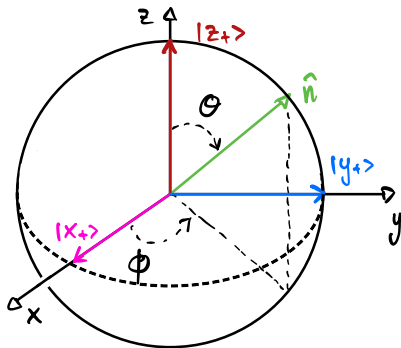
$$|z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \pi \\ \sin \pi e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \Theta = \pi \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + |z_-\rangle) \quad \text{vale } \text{se } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = 0$$

$$|x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle - |z_-\rangle) \quad \text{vale } \text{se } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \pi$$

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle + i|z_-\rangle) \quad \text{vale } \text{se } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$|y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z_+\rangle - i|z_-\rangle) \quad \text{vale } \text{se } \Theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } \phi = \frac{3}{2}\pi$$



# QBIT

e' il bit di informazione elementare nel *quantum computing*

QBIT = quantum bit che rappresenta uno stato quantico

$$|\psi\rangle = \alpha|z_+\rangle + \beta|z_-\rangle \quad \begin{matrix} |0\rangle \\ |1\rangle \end{matrix}$$

2 QBITS:  $(\alpha_1|0\rangle_1 + \beta_1|1\rangle_1)(\alpha_2|0\rangle_2 + \beta_2|1\rangle_2) =$

$$= \underbrace{\alpha_1\alpha_2}_{\alpha_{00}}|0\rangle_1|0\rangle_2 + \underbrace{\alpha_1\beta_2}_{\alpha_{01}}|0\rangle_1|1\rangle_2 + \underbrace{\beta_1\alpha_2}_{\alpha_{10}}|1\rangle_1|0\rangle_2 + \underbrace{\beta_1\beta_2}_{\alpha_{11}}|1\rangle_1|1\rangle_2$$

$$= \alpha_{00}|0\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha_{01}|0\rangle_1|1\rangle_2 + \alpha_{10}|1\rangle_1|0\rangle_2 + \alpha_{11}|1\rangle_1|1\rangle_2$$

e vale:  $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$

3 QBITS: ... + lungo ... ! perche' aumenta esponenzialmente

1 qbit → 2 parametri

2 qbits → 4 parametri ...

n qbits →  $2^n$  parametri

## INNER PRODUCT

KET  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

BRA  $\langle\psi| = [(\psi\rangle)^\dagger]^* = \psi\rangle^\dagger$  } *conjugato trasposto* } notazione introdotta da Dirac per descrivere uno stato quantico

quindi se  $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  allora  $\langle\psi| = (\alpha^*, \beta^*)$

=> **BRAKET**:  $\langle\psi|\psi\rangle = (\alpha^* \beta^*) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha^*\alpha + \beta^*\beta = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\langle 0|0\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$

$\langle 1|1\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

$\langle 0|1\rangle = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\langle 1|0\rangle = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

} *normalizzazione*

} *ortogonalita'*

$\langle B|A\rangle$ : probabilita di misurare A sullo stato B

## OUTER PRODUCT

$$|\psi_1\rangle\langle\psi_2| = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} (\alpha_2^* \ \beta_2^*) = \begin{pmatrix} \alpha_1\alpha_2^* & \alpha_1\beta_2^* \\ \beta_1\alpha_2^* & \beta_1\beta_2^* \end{pmatrix}$$

example:

$$\hat{X} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0 \ 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

composite state: example

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{e' normalizzato } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{pure: } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ -i\sqrt{3} \\ -i \end{pmatrix} \rightarrow \text{anche il vettore ottenuto dalla composizione dei} \\ \text{due qbit precedenti e' normalizzato (basta calcolare)} \\ \text{se compongo qbits normalizzati ne ottengo uno} \\ \text{che e' anch'emo normalizzato}$$

## **ENTANGLED STATES** (stati intrecciati)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

↓  
se misuro il primo qbit  $|0\rangle$  allora al 100% anche il secondo avrà quello  
misura  $|0\rangle$   
↓  
 $|00\rangle$

**BELL STATES** Sono 4 stati a correlazione massima di due qbit e regnano l'ERP...

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle)$$

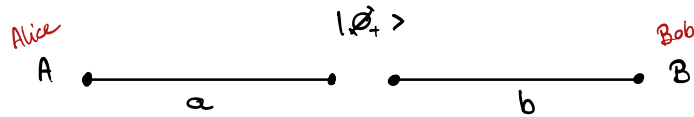
$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle)$$

$$|\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle)$$

$$|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle - |10\rangle)$$



# EPR: Einstein - Podolsky - Rosen



A fa la misura e ottiene spin up  $|0\rangle$   
 allora forza B a misurare  $|0\rangle$

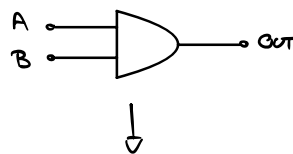
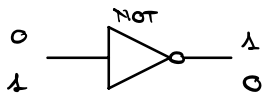
lo stato di Bob dipende da quello che ha letto Alice ed e' uguale a quest'ultimo  
 :

in prima ipotesi si potrebbe pensare che se non comunicano, allora anche Bob misura lo stato in maniera casuale, ma comunicando, scoprirebbe che e' sempre lo stesso di quello che misura Alice

→ l'informazione e' trasmessa istantaneamente **piu' veloce della luce**: in realta' non e' una vera informazione perche' essa e' random e non e' scelta e quindi il paradosso di Einstein non viene smentito

→ A e B devono comunicare per smentire il random e quindi tale comunicazione non puo' avvenire alla velocita' della luce

## QUANTUM GATE



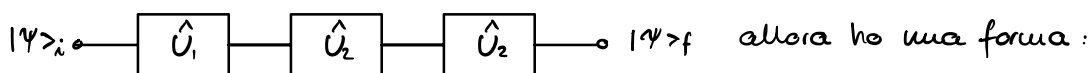
A	B	out
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

in quantum computing questo e' un problema  
 - se ho 2 input allora devo avere 2 output  
 - conoscendo l'output devo poter conoscere l'input

introduciamo un qubit gate, con un generico operatore  $\hat{U}$ :

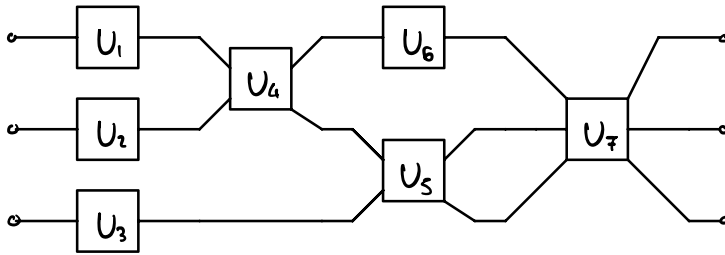


oppure posso avere una catena:



$$|\psi\rangle_f = \hat{U}_3 \hat{U}_2 \hat{U}_1 |\psi\rangle_i \quad (\text{l'ultimo e' il primo})$$

oppure anche una cosa del genere:



$U = \text{unitary}$

$$U^\dagger = U^{-1}$$

$$U^\dagger U = I$$

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U^\dagger U = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a^*c + b^*d \\ c^*a + d^*b & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} \quad \text{da cui ottengo le seguenti eq.}$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \quad a^*c + b^*d = 0$$

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \quad c^*a + d^*b = 0$$

e quindi  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  e  $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  sono **ORTONORMALI**

$$\Rightarrow U|0\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U|1\rangle = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  l'operatore mantiene l'ortonormalita'

fra i vettori  $\Rightarrow$  posso sempre fare l'operazione

inversa  $\rightarrow$  **operatore hermitiano**

ne considero:

$$U = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$$

da cui derivo che

$$\left| \begin{array}{l} a^* = a \quad \text{REALE} \\ d^* = d \quad \text{REALE} \\ b^* = c \\ c^* = b \end{array} \right.$$

**dimostrazione ...**

$$U|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

$$\langle \psi | U | \psi \rangle = \langle \psi | \lambda | \psi \rangle = \lambda$$

$$\langle \lambda | U^\dagger = \langle \psi | \lambda^*$$

$$\langle \psi | U^\dagger | \psi \rangle = \lambda^*$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \psi | U | \psi \rangle = \lambda \\ \langle \lambda | U^\dagger = \langle \psi | \lambda^* \\ \langle \psi | U^\dagger | \psi \rangle = \lambda^* \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ne } \lambda^* = \lambda \text{ allora } U^\dagger = U$$

$\rightarrow$  ne un operatore e' unitario, allora e' hermit.

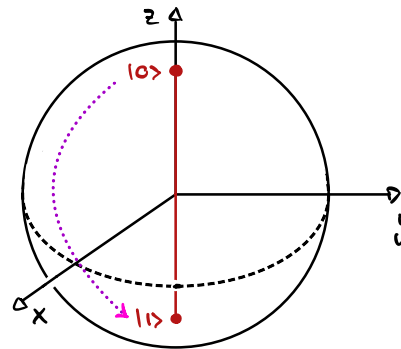
(il gate di fase non e' hermitiano)

### Δ PAULI GATES

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{detto NOT o BITFLIP}$$

$$X|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$$

$$X|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |0\rangle$$



$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{detto PHASE SHIFT e BITFLIP}$$

$$Y|0\rangle = i|1\rangle$$

$$Y|1\rangle = -i|0\rangle$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{detto PHASE SHIFT}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z|0\rangle = |0\rangle \\ Z|1\rangle = -|1\rangle \end{array} \right\} Z = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

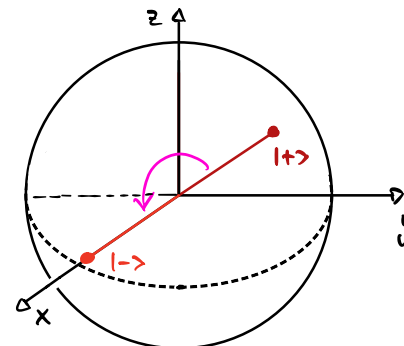
### Δ HADAMARD

fa compiere una rotazione autoraria attorno all'asse del biasset x,z

$$\begin{array}{l} \hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle \\ \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle \end{array}$$

e posso derivare l'operatore

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{z})$$



### Δ PHASE GATE

e' non-hermitiano (segue dimostrazione)

$$\begin{aligned}\hat{R}_\phi |0\rangle &= |0\rangle \\ \hat{R}_\phi |1\rangle &= e^{i\phi} |1\rangle\end{aligned}$$

da cui ricavo

$$\hat{R}_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

se  $\phi = \pi$  allora  $R_\phi = Z$

se  $\phi = \frac{\pi}{2}$  allora  $S = R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = e^{i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$

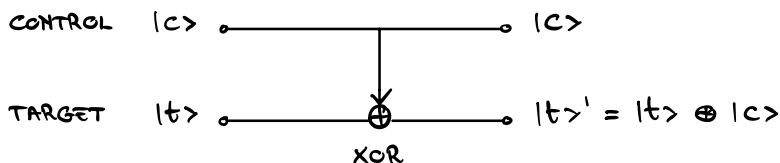
↳ l'espressione evidenzia la simmetria

se  $\phi = \frac{\pi}{4}$  allora  $T = R_{\frac{\pi}{4}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{8}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix}$

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_{00} \\ \alpha_{01} \\ \alpha_{10} \\ \alpha_{11} \end{pmatrix}$$

e quindi posso introdurre  $U = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{01} & U_{02} & U_{03} \\ U_{10} & \dots & & \\ \vdots & & & \\ \dots & & & \end{pmatrix}$  una matrice + grande per ampliare il numero di operazioni che posso svolgere

posso introdurre Δ CONTROLLED NOT :



c>	t>	t>'
0>	0>	0>
0>	1>	1>
1>	0>	1>
1>	1>	0>

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Δ CLONING STATE

→ posso clonare solo gli stati base e non quelli formati dalla sovrapposizione di stati

(NO CLONING THEOREM)

$$\hat{U}_{\text{copy}} |\psi\rangle_1 |0\rangle_2 \stackrel{?}{=} |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \quad \text{dove } |\psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1$$

$$\Rightarrow \hat{U}_{\text{copy}} (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) |0\rangle_2 = \hat{U}_{\text{copy}} (\alpha|00\rangle + \beta|10\rangle) = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad \text{BASIS STATE}$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 = (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1)(\alpha|0\rangle_2 + \beta|1\rangle_2) = \dots \quad \text{COMPOSITE STATE}$$

$$\text{MA COMP. STATE} \neq \text{BASIS STATE} \Rightarrow \hat{U}_{\text{copy}} |\psi\rangle_1 |0\rangle_2 \neq |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2 \quad \text{c.v.d.}$$

### Δ CONTROLLED Z

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$ c\rangle$	$ t\rangle$	$ t'\rangle$
$ 0\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 0\rangle$	$ 1\rangle$	$ 1\rangle$
$ 1\rangle$	$ 0\rangle$	$ 0\rangle$
$ 1\rangle$	$ 1\rangle$	$- 1\rangle$

### Δ SWAP

$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ci permette di  
invertire i qbit:

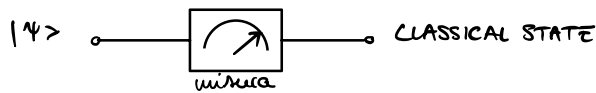
$ 00\rangle$	→	$ 00\rangle$
$ 01\rangle$	→	$ 10\rangle$
$ 10\rangle$	→	$ 01\rangle$
$ 11\rangle$	→	$ 11\rangle$

→ molto utile in quantum computing perché ci permette di manipolare i bit come preferisco... ?

⇒ seguono i gate che lavorano con **3 qbits** e sono definiti da una matrice di  $8 \times 8$  elementi. Tra questi il + famoso è il **TOFFOLI GATE**

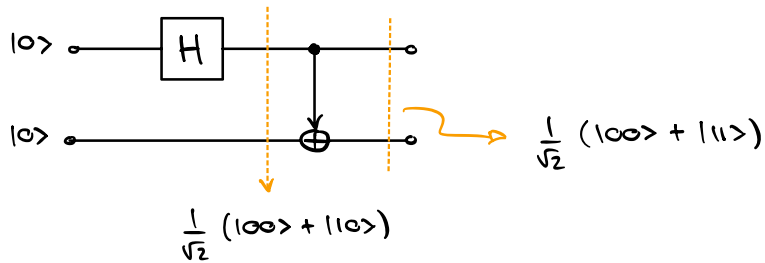
Δ **TOFFOLI GATE** definito come **CCNOT** = ... la matrice è nelle slide!

## Δ MISURA



$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \xrightarrow{\text{misura}} \begin{array}{l} |0\rangle (|\alpha|^2) \\ |1\rangle (|\beta|^2) \end{array}$$

## Δ BELL CIRCUIT



# MATRICI DI ROTAZIONE

un'operazione sul singolo qbit è una rotazione ... come faccio a farla?  
come progetto un circuito che manipoli e ruoti i qbits? ... Consideriamo:

$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi}|1\rangle$  è un generico qbit sulla sfera

$\hat{R}_x = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$  è una rotazione antioraria di  $\theta$  attorno all'asse x

$\hat{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$  è una rotazione antioraria di  $\theta$  attorno all'asse y

$\hat{R}_z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$  è una rotazione antioraria di  $\theta$  attorno all'asse z

proviamo a costruire queste rotazioni a partire dai Pauli operators combinandoli:

$$\hat{R}_x = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x$$

$$\hat{R}_y = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_y$$

formula di eulero  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

prima riscriviamo  $\hat{R}_z = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_z$

=> hanno tutti la stessa forma posso generalizzare con:

$$\hat{R}_n = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_n = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_n}$$

eulero

F. DI EULERO  
 $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

dimostrazione:  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$  allora  $e^{\hat{\sigma}} = \hat{I} + \hat{\sigma} + \frac{\hat{\sigma}^2}{2!} + \frac{\hat{\sigma}^3}{3!} + \dots$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow \hat{R}_x = \hat{I} \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x = e^{-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^n}{n!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\theta}{2})^{2n}}{(2n)!}}_{\cos \frac{\theta}{2}} \hat{I} - i \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\frac{\theta}{2})^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin \frac{\theta}{2}} \hat{\sigma}_x$$

Lo se applico due volte lo stesso Pauli operator ottengo un'identita' (che posso applicare infinite volte)

$$= \cos \frac{\theta}{2} - i \sin \frac{\theta}{2} \hat{\sigma}_x$$

→ mi ricavo la stessa formula di partenza

c.v.d.

Ogni trasformazione puo' essere ottenuta come sequenza di tre rotazioni:

Se applico 3 rotazioni:  $Z, Y, Z$  (e' una convenzione possibile quella  $Z, Y, Z$ )  
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $\lambda \quad \theta \quad \phi$

posso definire  $\hat{U}(\theta, \phi, \lambda) = R_z(\phi) R_y(\theta) R_z(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda+\phi}{2}} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\phi-\lambda}{2}} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\frac{\lambda-\phi}{2}} & \cos\frac{\theta}{2} e^{i\frac{\lambda+\phi}{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\lambda} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\lambda+\phi)} \end{pmatrix}}_{\text{definisco questo operatore:}} e^{-i\frac{\lambda+\phi}{2}}
 \end{aligned}$$

porto fuori la fase "comune"

definisco questo operatore:

$$\hat{U}_3(\theta, \phi, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\lambda} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\phi} & \cos\frac{\theta}{2} e^{i(\lambda+\phi)} \end{pmatrix}$$

tabella riassuntiva dell'operatore  $\hat{U}_3$ :

$\theta$	$\phi$	$\lambda$	$\hat{U}_3$
0	0	0	$\hat{I}$
$\pi$	0	$\pi$	$\hat{\sigma}_x$
$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\hat{\sigma}_y$
0	0	$\pi$	$\hat{\sigma}_z$
$\frac{\pi}{2}$	0	$\pi$	$\hat{H}$

variando gli angoli  $\lambda, \theta, \phi$  posso, tramite le tre rotazioni, generare qualsiasi operatore a 1 qbit che avevo visto in precedenza

## EVOLUZIONE NEL TEMPO DI UN SISTEMA QUANTISTICO

cerchiamo di capire il significato fisico dell'espressione:  $R_x(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}\hat{\sigma}_x}$   
 partendo dall'equazione di Schrödinger tempo-dipendente



$$\hat{H}|\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi\rangle \quad \text{che posso risolvere:}$$

$$\frac{d}{dt}|\psi\rangle = -i \frac{\hat{H}}{\hbar} |\psi\rangle \Rightarrow |\psi(t)\rangle = e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} |\psi(0)\rangle$$

$$\frac{df}{dt} = -\alpha f \rightarrow f(t) = e^{-\alpha t} f(0) \quad \Big| \quad \hat{U}|\psi(0)\rangle \quad \text{definendo } \boxed{\hat{U} = e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t}}$$

Ne considero  $|\psi(0)\rangle$  il mio stato iniziale:  $|\psi(0)\rangle = |\psi\rangle_i$ ;

Ne considero  $|\psi\rangle$  lo stato finale  $|\psi\rangle = |\psi\rangle_f$  dopo aver applicato  $\hat{U}$ , allora:

$$\boxed{|\psi\rangle_f = \hat{U}|\psi\rangle_i}$$

ma ne considero che  $\hat{U}$  e' una rotazione, allora:

$$e^{-i \frac{\hat{H}}{\hbar} t} = e^{-i \frac{\sigma_z}{2} \omega t} = e^{-i \frac{\omega t}{2} \sigma_z} \quad \text{ricavo: } \hat{H} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \hat{\sigma}_z \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z$$

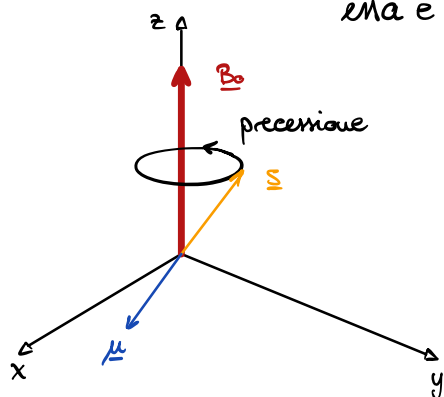
Lo trasformo in una velocita' angolare  $\rightarrow \theta = \omega t$

$$\boxed{\hat{H} = \omega_0 \hat{S}_z} \rightarrow \hat{S}_z \text{ spin operator}$$

$\Rightarrow$  quindi tale rotazione puo' essere fatta usando un campo magnetico costante!

## PRECESSIONE

e' la rotazione dei momenti magnetici attorno al campo  $\vec{B}$  ma e' indotta da un campo  $\vec{B}$ :



vale  $\approx 2$  per gli elettroni

$$\text{momento magnetico: } \underline{\mu} = \gamma \underline{S} = g \frac{q}{2m} \underline{S}$$

gyromagnetic ratio  $< 0$

momento torcente:  $\underline{N} = \underline{\mu} \times \underline{B}_0 = \gamma \underline{S} \times \underline{B}_0$

dato da  $B_0$

$$\underline{N} = -\gamma \underline{B}_0 \times \underline{S}$$

genera un momento GIROSCOPICO

$> 0$  rinvolto il prodotto perche' cambio segno

Ne ho un momento torcente, allora cambia il momento angolare come:  $\frac{d\underline{S}}{dt} = \underline{N}$

$$\Rightarrow \underline{B}_0 \frac{d\underline{S}}{dt} = 0 = \frac{d}{dt} (\underline{B}_0 \cdot \underline{S})$$

il modulo rimane costante

$\Rightarrow$  ne la derivata e' 0 anche l'angolo e' costante

## LARMOR PRECESSION

posso definire una frequenza detta *Larmor frequency* che calcolo come:

$$\omega_0 = \frac{d\phi}{dt} = \frac{dS}{dt S \sin \theta} = \frac{-\gamma B_0 S \sin \theta}{S \sin \theta} = -\gamma B_0 \quad \text{FREQUENZA DI LARMOR DELLA PRECESSIONE}$$

calcoliamo l'Hamiltoniano:

$$\hat{H} = -\underline{\mu} \cdot \underline{B}_0 = -\gamma \underline{S} \cdot \underline{B}_0 = -\gamma B_0 \hat{S}_z = \omega_0 \hat{S}_z \rightarrow \text{e' quello che volevo trovare!}$$

↓  
proiezione di  $\underline{S}$  lungo  $\underline{B}_0$

e' la stessa espressione che avevo visto prima e di cui cercavo un metodo di implementazione...

posso poi ricavarmi gli autovalori  $E$  / stato base ( $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ ) partendo da:

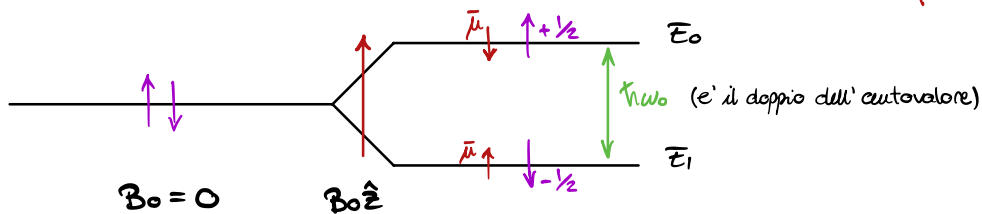
$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad \text{e ottengo che emi volgano:}$$

$$\Delta \quad \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow E_0 = \frac{\hbar\omega_0}{2} \text{ per } |0\rangle$$

$$\Delta \quad \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longrightarrow E_1 = -\frac{\hbar\omega_0}{2} \text{ per } |1\rangle$$

ottengo un effetto di split dello spin, detto **ZEEEMAN SPLIT o EFFECT**:

↳ separazione dei livelli energetici a causa di un campo magnetico esterno



la soluzione all'eq. di Schrödinger  $\hat{H}|\psi\rangle = -i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle$  può essere scritta come:

$$|\psi\rangle = c_0 |0\rangle e^{-i\frac{E_0}{\hbar}t} + c_1 |1\rangle e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t}$$

coefficienti complessi che indicano la probabilità di avere uno stato piuttosto che l'altro  
 $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$

trascuro già la fase globale... l'espressione completa è nelle slides

$$\text{annunciando: } \left. \begin{aligned} c_0 &= \cos \frac{\theta}{2} \\ c_1 &= \sin \frac{\theta}{2} \end{aligned} \right\} |\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\omega_0 t} |1\rangle$$

che è proprio lo stato di sovrapposizione sulla Bloch Sphere con  $\phi = \omega_0 t$

⇒ se applico un campo magnetico  $B_0$  per un tempo  $t$  diretto lungo l'asse  $z$ , allora il qbit ruoterà di un angolo  $\phi = \omega_0 t$ , con  $\omega_0 = -\gamma B_0$  attorno a tale asse

⇒ possiamo calcolare le proiezioni dello spin lungo i vari assi:

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \omega_0 t$$

$$\langle S_y \rangle = -\frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \omega_0 t$$

$$\langle S_z \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

} queste due componenti variano durante la rotazione attorno a  $z$ , la cui componente invece rimane costante

non dipende da  $\omega_0 t$

contestualizziamo i valori e valutiamo il campo  $B$  necessario per avere la rotazione:

$$\Delta E = \hbar \omega_0 = -\hbar \gamma B_0 = -2 \underbrace{\frac{\hbar}{2} g \frac{q}{2m}}_{\text{Bor magneton}} B_0 = 2 \mu_B B_0$$

dove  $\mu_B = 9,274 \cdot 10^{-24} \text{ JT}^{-1}$

applicando un campo  $B_0 = 1 \text{ T}$  (molto grande) ottengo:  $\Delta E \approx 120 \mu\text{eV}$

che va comparato con l'energia termica: la temperatura deve essere tale da non variare lo stato del qbit (rumore termico minore)

$$kT \ll \Delta E \quad \Rightarrow \quad T \ll \frac{\Delta E}{k} = 1,34 \text{ K} \quad \text{e può essere accettabile}$$

$$\text{calcolo anche } \omega_0 = \frac{\Delta E}{\hbar} \approx \frac{2 \cdot 10^{-23} \text{ J}}{10^{-34} \text{ Js}} = 200 \text{ Grad s}^{-1} \quad \text{e' molto elevata ...}$$

e ho quindi ho un periodo  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 30 \text{ ps} \rightarrow$  **e' impossibile accendere un campo di 1T per dei ps**  
**PROBLEMA!**

Come faccio ad implementare questa rotazione tramite un dispositivo reale?

La precedente soluzione non è implementabile realisticamente e devo trovare

un'alternativa più fattibile. Tale alternativa è data dall' **electron spin**

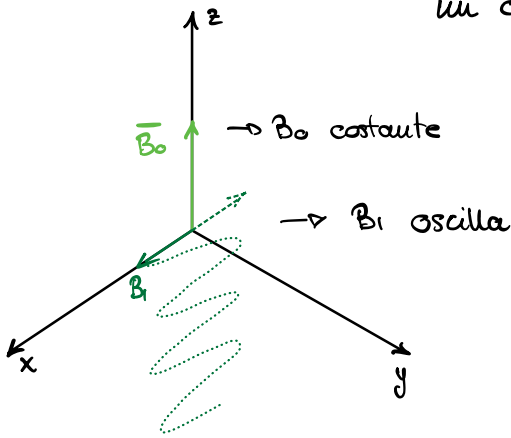
**resonance**, che è quella usata nei quantum computer. Contestualmente a questo

abbiamo la **Rabi oscillations**, utile per manipolare il singolo qbit states sulla

Bloch Sphere.

# ELECTRON SPIN RESONANCE

annuniamo di applicare un campo magnetico DC lungo z per avere lo split e un campo magnetico AC lungo x per far ruotare lo spin



La forma di  $B$  e' la seguente:

$$\Rightarrow B = B_0 \hat{z} + B_1 \cos(\omega t + \delta) \hat{x}$$

$$\hookrightarrow B_1 \ll B_0 \text{ es.: } B_1 = 10^{-3} B_0$$

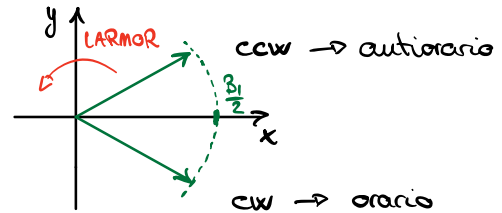
$$\omega_0 = -\gamma B_0 \approx \text{Grad s}^{-1}$$

↓  
frequenza di precessione

$B_0$  induce la precessione di Larmor attorno all'asse z @  $\omega_0 = -\gamma B_0$ ;  
inoltre posso scomporre il campo oscillante  $B_1$  in due vettori che ruotano in direzioni opposte

$$B_{ccw} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega t + \delta) \hat{x} + \frac{B_1}{2} \sin(\omega t + \delta) \hat{y}$$

$$B_{cw} = \frac{B_1}{2} \cos(\omega t + \delta) \hat{x} - \frac{B_1}{2} \sin(\omega t + \delta) \hat{y}$$



$\Rightarrow$  ccw si muove nella stessa direzione del vettore di spin: in questo sistema di riferimento ruotante e' come se avessi un nuovo campo costante (DC)

$\Rightarrow$  cw, al contrario, si muove (nel sistema di riferimento ruotante ccw) con velocita' doppia pari a  $2\omega_0$

↳ nella scala dei tempi che useremo noi questa rotazione va così veloce che la media sarà nulla

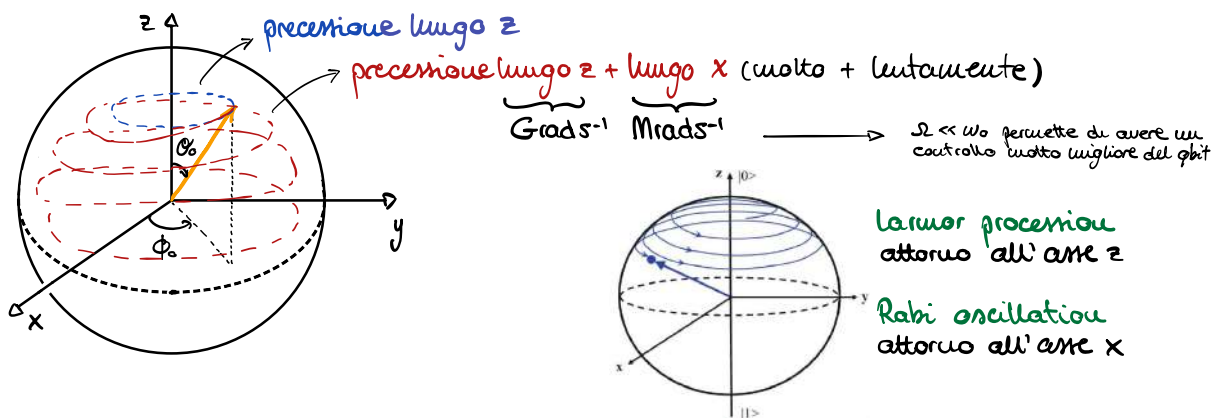
↳ **ROTATING WAVE APPROXIMATION** (vale l'asse che scegliamo)

il ccw field, che come sopra scritto e' come se fosse DC, genera una precessione attorno all'asse x con una frequenza detta **RABI FREQUENCY** pari a:

$$\Omega = -\gamma \frac{B_1}{2}$$

$\approx \text{Mrad s}^{-1} \rightarrow$  e' molto "lento" e riesco a controllarla meglio

fenomenicamente quello che succede e':



quindi posso scrivere il qbit come segue:

$$|\psi\rangle = \underbrace{\cos \frac{\theta_0 + \Omega t}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta_0 + \Omega t}{2} e^{i(\phi_0 + \omega_0 t)} |1\rangle}_{\text{RABI (Mrads}^{-1}) \hat{x}(\hat{y})} \underbrace{e^{i(\phi_0 + \omega_0 t)}}_{\text{LARMOR (Grads}^{-1}) \hat{z}}$$

$\downarrow$   
 n oscillazione lungo y avrà lo stesso effetto attorno a quell'asse

la rotazione attorno ai 3 assi posso sempre ottenerla come composizione di due rotazioni, come già visto: ecco perché uso solo l'asse x e l'asse z.

in maniera rigorosa:

$$\hat{H} = -\gamma \frac{\mu_B}{2} \hat{\sigma}_z B_0 = \mu_B B_0 \hat{\sigma}_z \quad (\text{e' il campo statico nel tempo})$$

autovalori

$$|0\rangle \rightarrow +\mu_B B_0 = \frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$|1\rangle \rightarrow -\mu_B B_0 = -\frac{\hbar \omega_0}{2}$$

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} \\ \beta e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{GLOBAL PHASE OUT}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{i \omega_0 t} \end{pmatrix}$$

consideriamo ora una perturbazione applicata espressa con  $\hat{H}'$ :

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow (\hat{H} + \hat{H}') |\psi\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle$$

ma se  $\hat{H}' \ll \hat{H}$  la perturbazione e' debole e posso dire che:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(t) e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} \\ \beta(t) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} \end{pmatrix}$$

ora  $\alpha$  e  $\beta$  dipendono dal tempo e non sono più costanti

$$V = -\gamma \underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{B}} = \mu_B B_1 \cos(\omega t + \delta) \hat{\sigma}_x$$

otengo questo risultato considerando

$$\left. \begin{aligned} \hat{H} &= \mu_B B_0 \hat{\sigma}_z = \mu_B \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & -B_0 \end{pmatrix} \\ \hat{H}' &= \mu_B B_1 \cos \omega t \hat{\sigma}_x = \mu_B \begin{pmatrix} 0 & B_1 \cos \omega t \\ B_1 \cos \omega t & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \hat{H} + \hat{H}' = \mu_B \begin{pmatrix} B_0 & B_1 \cos(\omega t + \delta) \\ B_1 \cos(\omega t + \delta) & -B_0 \end{pmatrix}$$

ostituendo la forma di  $|\Psi\rangle$  in Schrödinger otengo per la prima riga:

$$\underbrace{\mu_B B_0}_{E_0} \alpha(t) e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} + \mu_B B_1 \cos(\omega t + \delta) \beta(t) e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} = i\hbar \frac{d}{dt} \alpha(t) e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} + \underbrace{E_0}_{E_0} \alpha(t) e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t}$$

x la seconda riga:

$$\mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i \frac{E_0}{\hbar} t} - \underbrace{\mu_B B_0}_{E_0} \beta e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} = i\hbar \frac{d}{dt} \beta e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t} + \underbrace{E_0}_{E_0} \beta e^{-i \frac{E_1}{\hbar} t}$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \mu_B B_1 \beta \cos(\omega t + \delta) e^{i\omega_0 t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \beta (e^{i(\omega+\omega_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(\omega-\omega_0)t} e^{-i\delta})$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\beta}{dt} = \mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i\omega_0 t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \alpha (e^{i(\omega-\omega_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} e^{-i\delta})$$

affinche' funzioni d'onda emergono risonante alla frequenza di Larmor:  $\omega = \omega_0$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\alpha}{dt} = \mu_B B_1 \beta \cos(\omega t + \delta) e^{i\omega_0 t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \beta (e^{i(\omega+\omega_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(\omega-\omega_0)t} e^{-i\delta})$$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{d\beta}{dt} = \mu_B B_1 \alpha \cos(\omega t + \delta) e^{-i\omega_0 t} = \frac{\mu_B B_1}{2} \alpha (e^{i(\omega-\omega_0)t} e^{i\delta} + e^{-i(\omega+\omega_0)t} e^{-i\delta})$$

a frequenza molto elevata che può essere (RWA) trascurata

$$\Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{-i\delta} \beta \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{-i\delta} \frac{d\beta}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = -i \frac{\mu_B B_1}{2\hbar} e^{i\delta} \alpha \quad \longrightarrow \quad = -\left(\frac{\mu_B B_1}{2\hbar}\right)^2 \alpha = -\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 \alpha$$

pongo  $\Omega = \frac{\mu_B B_1}{\hbar}$

da cui ricavo  $\alpha(t) = \cos \frac{\Omega}{2} t$

mentre il secondo termine lo otengo come:  $\beta = i \frac{d\alpha}{dt} e^{i\delta} = -i \sin \frac{\Omega}{2} t e^{i\delta}$

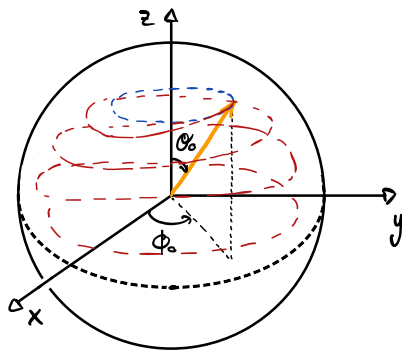
e quindi:

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} e^{-i \frac{\omega_0 t}{\hbar}} \\ -i \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i \frac{\omega_0 t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$

$$\text{se } \delta = 0 \Rightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} e^{i \omega_0 t} \\ -i \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i \omega_0 t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\Omega t}{2} \\ \sin \frac{\Omega t}{2} e^{i \phi t} \end{pmatrix}$$

trascurando la fase globale



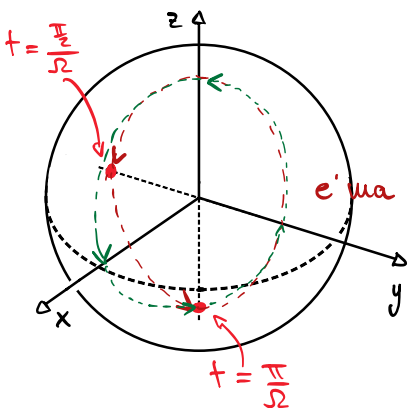
↓  
 questo dimostra che ho precessione lungo z e lungo x, come avevo supposto all'inizio

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) |0\rangle + \sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right) e^{i(\omega_0 t - \frac{\pi}{2})} |1\rangle$$

### STATI TEMPO-DIPENDENTI

ammiamo che  $t = \frac{\pi}{2\Omega} \Rightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow$  sono due componenti uguali (in modulo)

al contrario, se  $t = \frac{\pi}{\Omega} \Rightarrow |\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}$



e' una rotazione con asse pari all'asse x  
 (analogo succede attorno all'asse y)

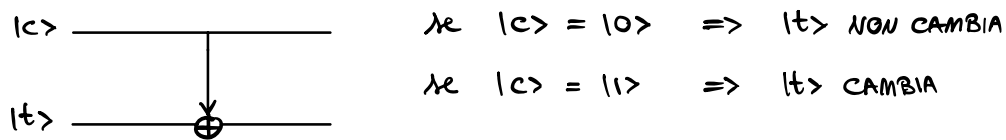
=> per creare ogni tipo di rotazione mi bastano due rotazioni "elementari" attorno a due assi (in questo caso x e y)

RICAPITOLANDO:

1 QBIT GATE  $\rightarrow$   $\boxed{\text{ESR}}$  e mi servono un numero minimo di QC  
(Universal set of quantum gates)  $\rightarrow$  i pezzi di lego

2 QBIT GATE  $\rightarrow$   $\boxed{\text{CNOT}}$  ma mi serve almeno anche un gate x 2 qbit

CNOT e' essenziale in alcuni circuiti (es.: nel circuito di Bell)



ed e' caratterizzato dalla matrice:  $\text{CNOT} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|c\rangle$  e' il controllo: controlla l'uscita del circuito

$|t\rangle$  e' l'ingresso: rimane lo stesso se  $|c\rangle = |0\rangle$ , altrimenti flippa nel valore opposto

Cerchiamo di capire come costruire fisicamente un 2-qbit gate (come gia' abbiamo fatto per la rotazione precedentemente...) partendo dallo SWAP e proseguendo poi con il 2-qbit coupling



## SWAP

lo swap per 2 qbit e' definito come

$$|x_1\rangle|x_2\rangle = |x_2\rangle|x_1\rangle$$

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle$$

$$|01\rangle \rightarrow |10\rangle$$

$$|10\rangle \rightarrow |01\rangle$$

$$|11\rangle \rightarrow |11\rangle$$

dove la matrice e': 
$$\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
  
(come gia' visto)

ho anche altre configurazioni della swap, che sono:

$$i\text{SWAP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

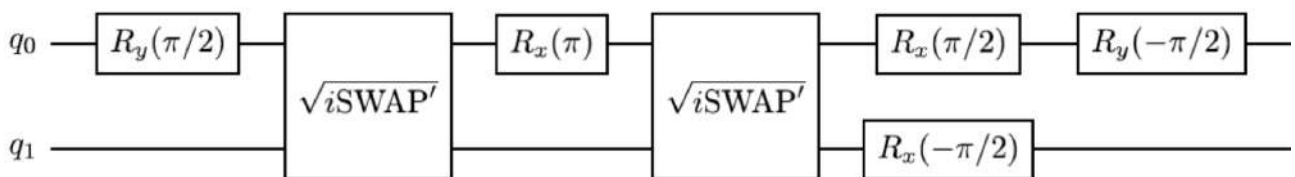
$$\sqrt{i\text{SWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e posso verificare che  $\sqrt{i\text{SWAP}} \cdot \sqrt{i\text{SWAP}} = i\text{SWAP}$

$$\sqrt{-i\text{SWAP}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

→ da questa ricavo il CNOT gate  
e' di nostro interesse perche' e' naturalmente implementato in due risuonatori a superconduttore capacitivi

per ricavarci il CNOT gate dallo  $\sqrt{i\text{SWAP}}$  devo usare il seguente circuito:



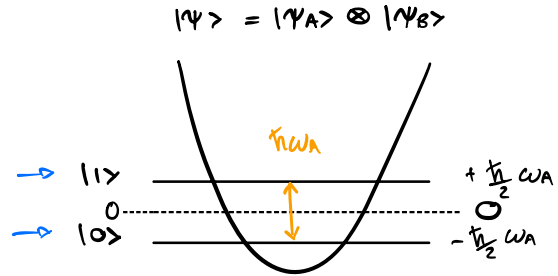
calcolando ho un'espressione del tipo:

$$\text{CNOT} = [I \otimes R_y(-\frac{\pi}{2})] [R_x(-\frac{\pi}{2}) \otimes R_x(\frac{\pi}{2})] \sqrt{i\text{SWAP}} [I \otimes R_y(\pi)] \sqrt{i\text{SWAP}} [I \otimes R_y(\frac{\pi}{2})]$$

ora vediamo come ottenere uno  $\sqrt{i\text{SWAP}}$  tramite un "semplice" circuito.

## 2-QBIT COUPLING

consideriamo i seguenti  
2-qbit state disaccoppiati:



se i 2-qbit hanno frequenze diverse, allora essi sono **disaccoppiati**, ad esempio gli stati base  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ ; ogni stato dipende dall'eq. di Schrödinger tempo-dipendente

$$\hat{H}_A |\Psi_A\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_A\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{H}_A = -\frac{\hbar}{2} \omega_A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \omega_A}{2}$$

$$\hat{H}_B |\Psi_B\rangle = i\hbar \frac{d}{dt} |\Psi_B\rangle \quad \rightarrow \quad \hat{H}_B = -\frac{\hbar}{2} \omega_B \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \omega_B}{2}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} \omega_B & 0 \\ 0 & \omega_B \end{pmatrix}}$

se hanno la stessa frequenza, invece, ho **accoppiamento**:

-  $|\Psi_A\rangle$  transita da  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$

-  $|\Psi_B\rangle$  transita da  $|0\rangle$  a  $|1\rangle$



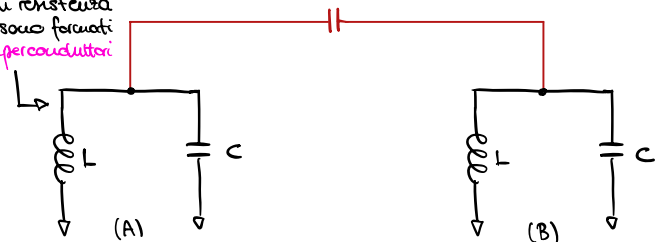
cioè  $|\Psi_{10}\rangle \rightarrow |\Psi_{01}\rangle$

- se entrambi sono sullo stesso stato

allora non ho transizioni

> gli oscillatori sono privi di resistenza perché sono forcati da superconduttori

CAPACITIVE COUPLING



→ i due oscillatori sono accoppiati: hanno la stessa frequenza...

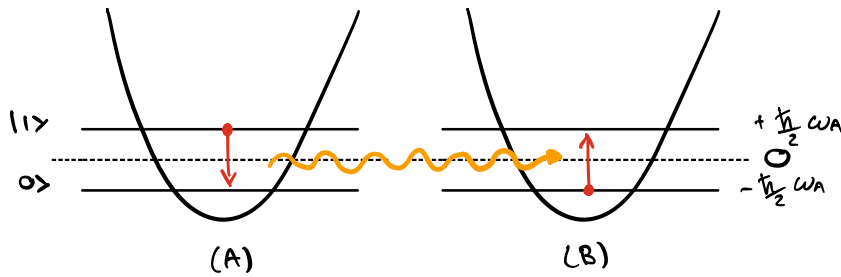
In questo caso posso scrivere i due stati come  $|\Psi\rangle = |\Psi_A\rangle \otimes |\Psi_B\rangle$ :

$$\Rightarrow \hat{H} = \hat{H}_A \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{H}_B = -\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_B \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A + \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A - \omega_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_A + \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A - \omega_B \end{pmatrix}$$

per avere accoppiamento devo avere  $\Delta = \omega_A - \omega_B \rightarrow 0$

I 2-qbit vicini sono posti a due livelli differenti vicini, come segue:



se essi hanno la stessa frequenza e quindi sono accoppiati, allora può succedere:

- $|\Psi_A\rangle$  passa da  $|1\rangle$  a  $|0\rangle$
- $|\Psi_B\rangle$  passa da  $|0\rangle$  a  $|1\rangle$

"grazie" alla transizione di un fotone da (A) a (B)

(se entrambi sono nello stesso stato questo non può succedere)

=> quello che succede è uno **SWAP** e ora lo dimostriamo analiticamente, partendo dall'Hamiltoniano dei 2-qbit:

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \omega_A + \omega_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_A - \omega_B & K & 0 \\ 0 & K & -\omega_A + \omega_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\omega_A - \omega_B \end{pmatrix}$$

a cui devo aggiungere due termini  $K$  di **coupling** per un motivo fisico che non dimostriamo;

consideriamo il seguente stato **disaccoppiato**:  $|\Psi\rangle = C_{01} |\Psi_{01}\rangle + C_{10} |\Psi_{10}\rangle$

se consideriamo ora l'equivalente ma **accoppiato** allora  $C_{01}$  e  $C_{10}$  dipendono dal tempo:

$$|\Psi\rangle = \underbrace{C_{01}(t)} |\Psi_{01}\rangle + \underbrace{C_{10}(t)} |\Psi_{10}\rangle$$

analizzo ora la forma matematica di questi due termini

**NB**

NON ACCOPPIATO  $C_{01}$   $\longrightarrow$   $C_{01}(t)$  ACCOPPIATO

NON ACCOPPIATO  $C_{10}$   $\longrightarrow$   $C_{10}(t)$  ACCOPPIATO

Inoltre, la dipendenza dal tempo non è solo per  $c_{01}$  e  $c_{10}$ , ma anche per

$$|\Psi_{01}\rangle = |01\rangle e^{i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t} !$$

facciamo la derivata del primo termine:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{01}(t) |\Psi_{01}\rangle - \hbar c_{01}(t) \frac{\omega_A - \omega_B}{2} |\Psi_{01}\rangle = -\frac{\hbar}{2} (\omega_A - \omega_B) c_{01} |\Psi_{01}\rangle + \underbrace{k |01\rangle \langle 10|}_{\text{matrix element}} c_{10} |\Psi_{10}\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$  la derivata di  $c_{01}$  dipende da  $c_{01}$  e  $c_{10}$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{10}(t) |\Psi_{10}\rangle + \hbar c_{10} \frac{\omega_A - \omega_B}{2} |\Psi_{10}\rangle = k |10\rangle \langle 01| c_{01} |\Psi_{01}\rangle + \frac{\hbar}{2} (\omega_A - \omega_B) c_{10} |\Psi_{10}\rangle$$

$\Rightarrow$  vale la stessa cosa (infatti sono accoppiati!!!)

ricordando che  $|\Psi_{10}\rangle = |10\rangle e^{-i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t}$   
 e che  $|\Psi_{01}\rangle = |01\rangle e^{i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t}$

allora:

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{01} e^{-i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t} |01\rangle = k c_{10} e^{-i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t} |01\rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} c_{01} e^{-i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t} |10\rangle = k c_{01} e^{i \frac{\omega_A - \omega_B}{2} t} |10\rangle$$

ottergo così due equazioni:

$$\Rightarrow \begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} c_{01} = k c_{10} e^{i\Delta t} \\ i\hbar \frac{d}{dt} c_{10} = k c_{01} e^{-i\Delta t} \end{cases}$$

che risolviamo facendo la derivata:

$$\begin{cases} -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} c_{01} = i\hbar k \frac{d}{dt} c_{10} e^{i\Delta t} - \Delta \hbar k c_{10} e^{i\Delta t} \\ -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} c_{10} = i\hbar k \frac{d}{dt} c_{01} e^{-i\Delta t} + \Delta \hbar k c_{01} e^{-i\Delta t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} c_{01} = k^2 c_{01} - i\hbar^2 \Delta \frac{dc_{01}}{dt} \\ -\hbar^2 \frac{d^2}{dt^2} c_{10} = k^2 c_{10} + i\hbar^2 \Delta \frac{dc_{10}}{dt} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} c_{01} - i\Delta \frac{dc_{01}}{dt} + \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 c_{01} = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} c_{10} + i\Delta \frac{dc_{10}}{dt} + \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 c_{10} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\Omega = \frac{k}{\hbar}} \begin{cases} \frac{d^2}{dt^2} c_{01} + \Omega^2 c_{01} = 0 \\ \frac{d^2}{dt^2} c_{10} + \Omega^2 c_{10} = 0 \end{cases}$$

$\hbar \epsilon (\Delta \rightarrow 0) \rightarrow 0$

la soluzione per entrambe le equazioni e' del tipo:

$$c_{0,1}(t) = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t$$

e ho le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{cases} c_{01}(0) = A \\ \frac{d}{dt} c_{01}(t) = B\Omega = -i\frac{k}{\hbar} c_{10}(0) = -i\Omega c_{10}(0) \end{cases}$$

da cui derivo che la soluzione al sistema e':

$$\begin{cases} c_{01}(t) = c_{01}(0) \cos \Omega t - i c_{10}(0) \sin \Omega t \\ c_{10}(t) = -i c_{01}(0) \sin \Omega t + c_{10}(0) \cos \Omega t \end{cases}$$

che posso scrivere in forma matriciale come:

$$\begin{pmatrix} c_{01}(t) \\ c_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -i \sin \Omega t \\ -i \sin \Omega t & \cos \Omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{01}(0) \\ c_{10}(0) \end{pmatrix}$$

la 2-qbit matrix vale:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega t & -i \sin \Omega t & 0 \\ 0 & -i \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

da cui posso ricavare che

$$- \hbar \Omega t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \hat{U} = \sqrt{i\text{SWAP}} \rightarrow t = \frac{\pi}{4\Omega} = \frac{\pi \hbar}{4k}$$

$$- \hbar \Omega t = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow \hat{U} = \sqrt{i\text{SWAP}}$$

⇒ la porta logica  $\sqrt{i\text{SWAP}}$  può essere fatta nutronizzando i qbit alla stessa frequenza per un tempo  $t$  e poi denutronizzando alle frequenze iniziali ⇒ e' semplice farlo

# DI VINCENZO CRITERIA

abbiamo cinque criteri che possono essere applicati (tranne l'ultimo) anche ai computer tradizionali introdotti nel 1998; emi sono:

## 1) SCALABLE PHYSICAL SYSTEM WITH WELL DEFINED QUBITS

(un sistema fisico scalabile con qbit ben definiti)

**SUPERCONDUCTIVE CIRCUITS**

li manipolo per avere due stati diversi  
- corrente che circola CW/CCW

**ELECTRON**

Vario lo spin o l'energia (↑↓)

**ATOMIC NUCLEOUS**

↳ (spin ↑ o ↓)

(GND o ECCITATO)

Vario la polarizzazione  
- ±45°  
- ORIZZONTALE o VERTICALE...  
**PHOTONS**

## 2) INITIALIZE QUBITS

(inizializzazione del registro dei qbit)

→ voglio fixare le condizioni iniziali (di solito:  $|0\rangle$ ) per sapere da dove parto

"ground state"

1 — di solito e' lo stato ad energia più bassa e lo posso fare aspettando un tempo  $t$  sufficientemente lungo e molto maggiore del **ENERGY RELAXATION TIME  $T_1$**

0 ● —

## 3) READ QUBIT : alla fine del calcolo devo essere in grado di leggere ogni qbit

→ posso avere ad esempio una conversione **spin-to-charge**

## 4) MANIPULATE WITH UNIVERSAL SET OF QUANTUM GATES

(capacità di implementare porte quantistiche universali)

↓  
ne abbiamo molti (0), ma il più famoso e' il **gruppo di Clifford** (H, S e CNOT)

↳ e' il minimo set che dobbiamo avere da cui generiamo gli altri... se ne manca una delle 3 allora non ho + un set universale

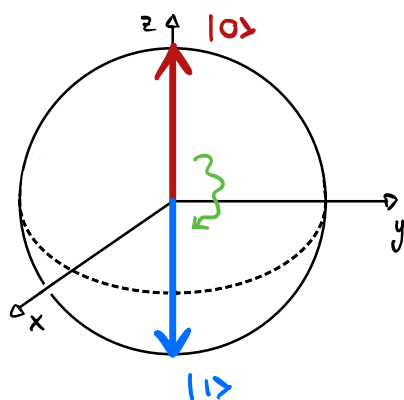
5) **LONG DECOHERENCE TIME** (lunga durata dei qbit)

→ diversamente dagli altri, non può essere applicato ad altri computer tradizionali, ma è specifico del **quantum-computing**

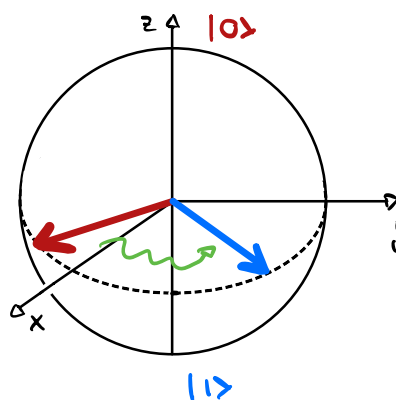
essenzialmente implica che: la vita del qubit deve essere lunga e comparata alla durata dell'algoritmo, che consiste in un certo numero di gate  $N$

↳ questo vuol dire massimizzare il rapporto  $N_g = \frac{\overset{\text{tempo di coerenza}}{\text{tempo di porta quantistica}}}{t_{gate}}$  ( $10^3, 10^4$ )

Abbiamo decoerenza perché abbiamo una **naturale perdita di energia** dovuta a fenomeni radiativi o non radiativi (scattering) o a perturbazioni esterne provenienti dall'ambiente. Ho due principali sorgenti di incoerenza:



possiamo definire un **LONGITUDINAL RELAXATION TIME  $T_1$**



possiamo definire un **TRANSVERSAL RELAXATION TIME  $T_2$**

↳ dovuto allo sfarfallamento

# NUCLEAR SPIN

e' molto usato in biomedica, anche come metodo per l'imaging (RMN)  
 si basa sul fatto che anche il nucleo e' simile agli elettroni ed e' formato da

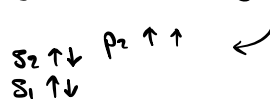
	carica	spin	
PROTONI	+e	+ 1/2	→ definisce l'elemento
NEUTRONI	∅	+ 1/2	→ varia in base agli isotopi

N.B.: sia protoni che neutroni sono fermioni e hanno spin pari a  $\pm \frac{1}{2}\hbar$

ad esempio possiamo avere vari isotopi (+, 0 - stabili) di uno stesso elemento:

	protoni	neutroni
<sup>1</sup> H	1	0
<sup>2</sup> H	1	1
<sup>3</sup> H	1	2
<sup>12</sup> C	6	6
<sup>16</sup> O	8	8

protoni e neutroni riempiono i livelli di energia nucleare con spin ↑ e ↓ in maniera simile a quanto fanno gli elettroni negli orbitali atomici



$S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$

 e' lo spin di ogni protone o neutrone

se combino protoni e neutroni ottengo lo **SPIN TOTALE DEL NUCLEO I**:

	protoni	neutroni	I
<sup>1</sup> H	1	0	1/2 ←
<sup>2</sup> H	1	1	1 ←
<sup>3</sup> H	1	2	1/2 ←
<sup>12</sup> C	6	6	∅ ←
<sup>16</sup> O	8	8	∅ ←
<sup>28</sup> Si	14	14	∅ ←

> se ho un numero pari sia di protoni che di neutroni, allora lo spin totale e'  $I = 0$

> se ho un numero dispari di protoni e/o di neutroni, allora lo spin totale e'  $I \neq 0$

$$S^2 = \hbar^2 I(I+1)$$

$$S_z = m\hbar$$

con  $m = -I, -I+1, \dots, I-1, I$



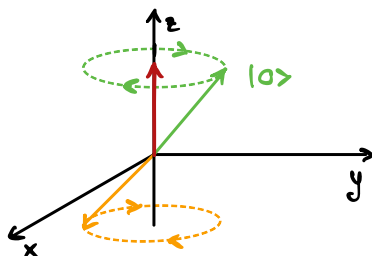
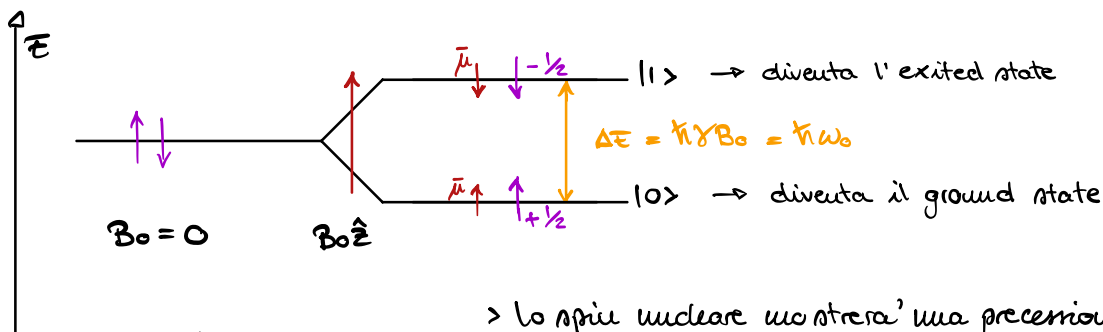
mentre gli elettroni erano tutti uguali, questi nuclei sono tutti diversi e quindi hanno anche valori di  $\gamma$  diversi, presenti nella tabella sottostante.

$$\mu_z = \gamma S_z = \gamma \frac{\hbar}{2} = \mu_B \quad (\text{era lo stesso } \gamma \text{ per tutti gli elettroni})$$

	protoni	neutroni	I	$\gamma$ [ $10^7 \text{ rad/Ts}$ ]
$^1\text{H}$	1	0	$\frac{1}{2}$	26,8
$^2\text{H}$	1	1	1	4,1
$^3\text{H}$	1	2	$\frac{1}{2}$	22,5
$^{12}\text{C}$	6	6	$\emptyset$	...
$^{16}\text{O}$	8	8	$\emptyset$	...
$^{28}\text{Si}$	14	14	$\emptyset$	...

$\omega_0 = \gamma B_z$   
 $\downarrow$   
 Larmor-frequency diversa per ogni isotopo anche dello stesso elemento

Arriviamo di avere un sistema e di applicare un campo magnetico, allora anche i nuclei subiranno l'effetto **ZEEEMAN** come avveniva per gli elettroni, ma con la differenza che lo spin e il momento hanno la stessa direzione (e non quella opposta, come per gli elettroni):



- > lo spin nucleare mostra una precessione oraria, anziché antioraria come aveva l'elettrone, a frequenza  $\omega_0$  unica  $\forall$  isotopo
- > inoltre, ogni atomo sperimenterà un campo magnetico diverso per la schermatura degli  $e^-$

Quanto appena descritto è vero se siamo a temperature basse |  $kT \ll \Delta E$

Supponiamo di lavorare a temperatura ambiente (@RT: room temperature), cioè sotto l'ipotesi di  $kT \approx \Delta E$



all'equilibrio vale la **distribuzione di Boltzmann** che indica la probabilità di essere in uno stato piuttosto che in un altro:

$$\frac{P_{|1\rangle}}{P_{|0\rangle}} = e^{-\frac{\Delta E}{kT}} \stackrel{@RT}{\approx} \frac{1}{e^2}$$

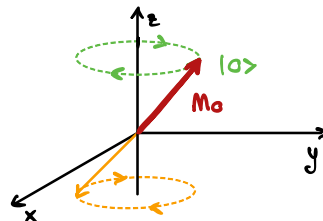
dipende da  $\Delta E$  che dipende dal campo magnetico

possiamo dire che all'equilibrio termodinamico ho:

$$P_{|1\rangle} \approx 10\%$$

$$P_{|0\rangle} \approx 90\% \Rightarrow \text{ho una popolazione maggiore di spin che punta } |0\rangle$$

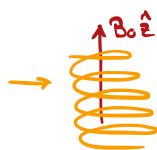
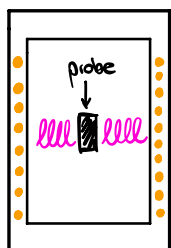
possiamo definire un campo magnetico macroscopico:



→ è il principio di funzionamento della RISONANZA MAGNETICA NUCLEARE (RMN)

## NUCLEAR MAGNETIC RESONANCE

Genero un campo magnetico con un solenoide mantenuto sotto la temperatura critica grazie all'elio liquido (He)



$$\Rightarrow \text{RESISTENZA } R = \emptyset$$

→ se alimento con corrente genero un campo magnetico  $B_0$  interno e lungo  $\hat{z}$  (10 T)

Dentro ho una **RF probe**: un solenoide che applica un segnale a radiofrequenza del tipo:

$B_1$  con  $\omega t \cdot \hat{x}$  → diretto lungo l'asse x, per la manipolazione dello spin

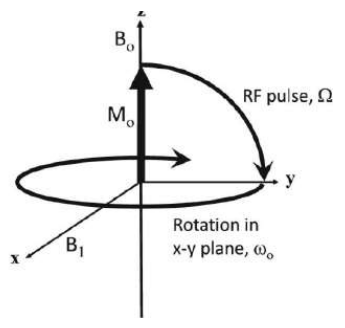
se il segnale è alla stessa frequenza di risonanza della frequenza di precessione, allora genero una rotazione lungo l'asse x

Quindi ho:

- > campo magnetico DC lungo l'asse z che causa una precessione oraria dello spin a una frequenza di **Larmor**  $\omega_0$
- > campo magnetico RF lungo l'asse x che causa una precessione oraria alla frequenza di **Rabi**  $\Omega = \frac{\gamma}{2} B_1$

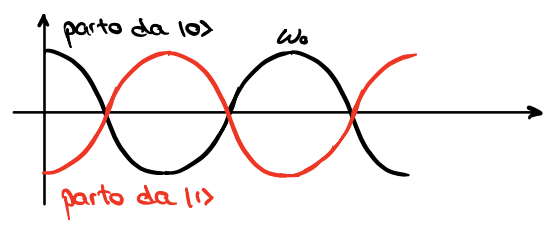
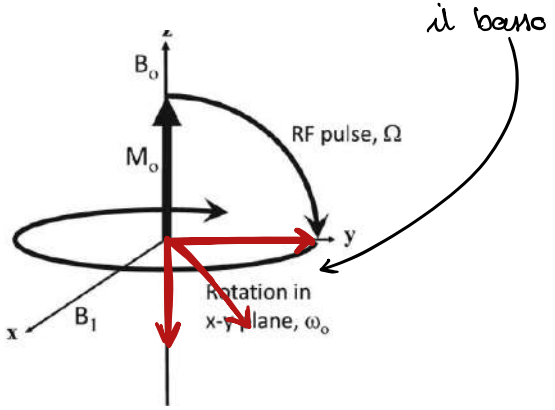
⇒ Solo gli atomi con una frequenza di Larmor corrispondente a quella selezionata verranno ruotati

→ se voglio ruotare di 90°:  $t_{RF} = \frac{\pi}{\Omega}$



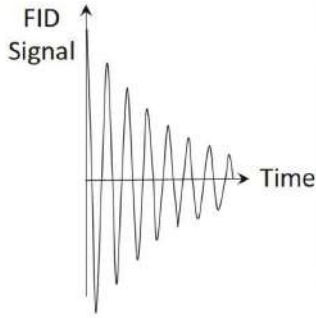
Per leggere sfrutto la **LEGGE DI FARADAY-NEUMAN-LENZ** inducendo una tensione sulla sonda RF pari a:

$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$  → leggo il campo magnetico lungo y che decresce ruotando verso il basso



A seconda di dove parto ho una fase diversa: tale misura è detta **FID**, cioè **free induction decay**

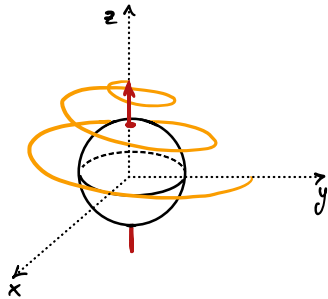
il segnale osservato dalla sonda e' del tipo:



→ il qbit torna a  $|0\rangle$  e lungo  $\hat{y}$  non ho rotazione

→ ho un decadimento esponenziale a causa di un rilassamento spontaneo che riporta allo stato fondamentale; tale decadimento e' detto **decadimento dell'induzione**

libera FID che avviene in un tempo  **$T_1$  RELAXATION**



$$M_z = M_0 (1 - e^{-\frac{t}{T_1}})$$

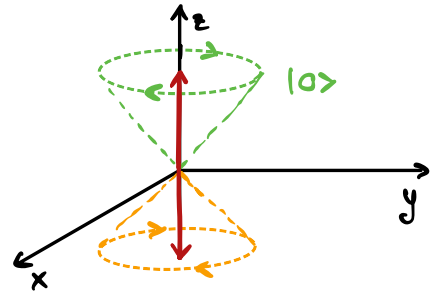
→ impiega  $T_1$  per riallinearsi al campo DC

Tale rilassamento verso  $|0\rangle$  e' dovuto alla **perdita di energia** ↙ radiativa  
↘ non radiativa

lungo x e y ho rilassamento secondo  $M_x, M_y = M_0 e^{-\frac{t}{T_2}}$  a causa di due effetti:

- 1) rilassamento longitudinale ( $T_1 \sim$  giorni)
- 2) **dephasing** di tutte le componenti ( $T_2 \sim$  secondi)  
↳  **$T_2$  DECAY**

⇒  $T_2 \ll T_1$  e quindi il dephasing domina essendo + veloce; esso e' dovuto principalmente a **DISOMOGENEITA'**



**DEL CAMPO MAGNETICO B:** ↓

$B_0$  non e' (realmente) uniforme all'interno della camera: quindi anche  $\omega_0$  non e' uniforme  
→ ho distorsione e non ho rotazioni precise, ma ho una distribuzione casuale attorno alle posizioni aspettate

⇒ posso effettuare un **REPHASING** tramite una

tecnica detta **QUANTUM ECHO** →

