Signal Recovery

23.02.2021 PRIMA LEZIONE (2h)

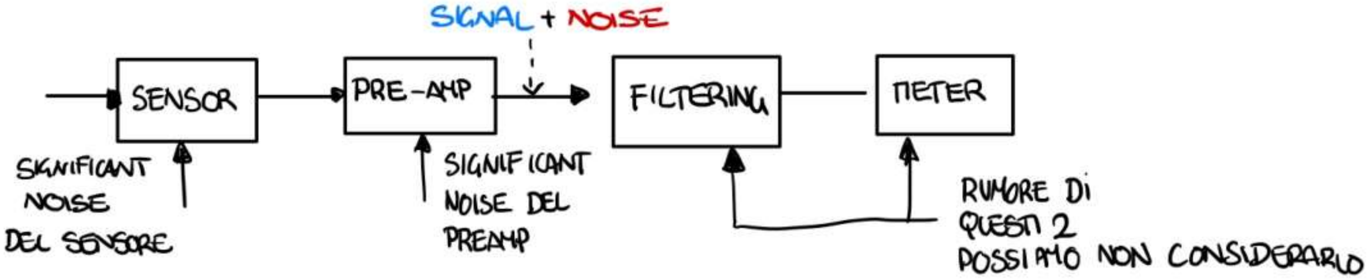
RISPONDE A TUTTE LE MAIL IN 24h. PERÒ INVIARE UNA MAIL CON TUTTE LE INFORMAZIONI!

DIFFICULT EXAM!! (NEL LIBRO CI SONO COLONNE GRIGIE CHE NON RIGUARDANO L'ESAME ES. DIMOSTRAZIONI)

TUTORIAL → 1 VOLTA A SETTIMANA!

ESAME 2,5h CON 2 ESERCIZI CHE VALGONO LO STESSO CON OGNUNO DI QUESTI CON 4 DOMANDE. ORALE SOLO DA 27 IN POI.

SE SKIPPA ALCUNI PASSAGGI NELLA FORMULA SIGNIFICA CHE NON CI SERVONO!



25.02.2021 3h DI LEZIONE

Dobbiamo usare sia il Dominio del tempo e della Frequenza.

SEGNALE → useremo uno speruto numero di segnali (nel dominio del tempo)

Questo è molto importante

$x = 1(t)e^{-t/\tau}$ Alle volte lo togliamo

IMPORTANTE = AREA = $A \cdot \tau$

RICORDARE FOURIER

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df \qquad X(f) = F[x(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

IMPORTANTISSIMO!! IL VALORE DI $x(0)$ È UGUALE ALL' $\int_{-\infty}^{+\infty} X(f) df$ E VICEVERSA PER LA FREQUENZA

AD ESEMPIO

DALLA LEGGE DI PRIMA SAPPIAMO ANCHE CHE $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc} = A$

CONVOLUZIONE Constant-Parameter linear filter

$$x(\alpha) \longrightarrow \boxed{h(\alpha)} \longrightarrow y(t)$$

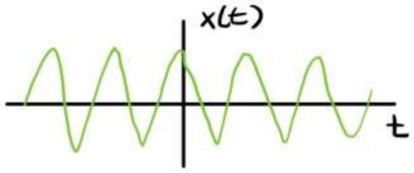
x(α) può essere descritta come come a linear superposition (somma) di δ-pulse
Quindi anche l'uscita y(t) può essere descritta come somma di δ-pulse

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha) h(t-\alpha)\, d\alpha$$

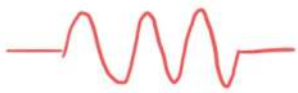
X CALCOLARLA NOI USEREMO UN BOTTO LA CONVOLUZIONE CON I GRAFICI

ES. Provare a fare la convoluzione tra rect e esponenziale per 3 differenti τ.

TRUNCATED SIGNALS



Nel mondo reale la sinusoide non va da $-\infty$ a $+\infty$
Quindi cosa accade se devo studiare questo?



Possiamo vederlo come un prodotto tra un rect e una convoluzione.

USIAMO POI LA PROPRIETÀ DI FOURIER CHE IL PRODOTTO NEL TEMPO È LA CONVOLUZIONE IN FREQUENZA E VICEVERSA. PER QUESTO È IMPORTANTE SAPER CALCOLARE LA CONVOLUZIONE

ALTRA COSA IMPORTANTE → SE UN SEGNALE AUMENTA LA LARGHEZZA NEL DOMINIO DEL TEMPO ALLORA DIMINUISCE IN QUELLO DELLA FREQUENZA.

NYQUIST → Se vogliamo togliere l'aliasing dobbiamo campionare a $>2f$.

DEFINIZIONI.

ENERGIA → $E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\alpha)\, d\alpha$

AUTO CORRELAZIONE → $K_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, x(\alpha+\tau)\, d\alpha$

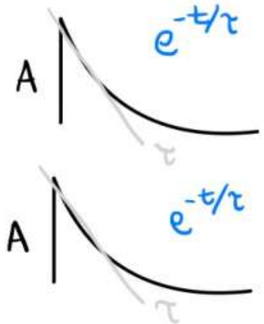
CI DA IL GRADO DI SIMILARITÀ TRA IL SEGNALE E LO STESSO SHIFTATO

QUI AL CONTRARIO DELLA CONVOLUZIONE NON FLIPPIAMO IL SEGNALE

$\boxed{\text{L'AUTO CORRELAZIONE IN } \varnothing \text{ È L'ENERGIA}}$

Sempre simmetrica

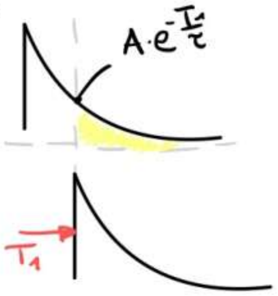
ES AUTOCORRELAZIONE DI UN ESPONENZIALE DECRESCENTE



MOLTIPLICHIAMO

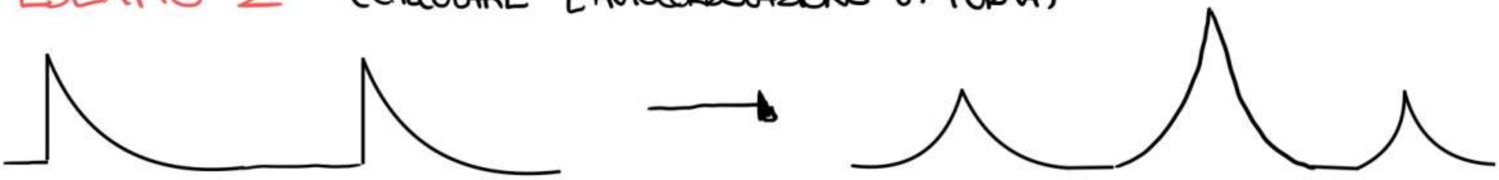
$A^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$ → REGOLA PER L'AREA VISTA PRIMA → IL PUNTO IN Ø SARÀ QUINDI → $A^2 \cdot \frac{\tau}{2}$

Poi



Ci troviamo nello stesso caso di prima ma l'ampiezza del segnale sopra è più bassa

ESEMPIO 2 (CALCOLARE L'AUTOCORRELAZIONE LA FORMA)



CROSSCORRELAZIONE → $K_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\, y(\alpha+\tau)\, d\alpha$ STESSA COSA SOLO CON 2 SEGNALI DIVERSI

SPETTRO DELL'ENERGIA (Teorema di Parseval)

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df = 2\int_{0}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

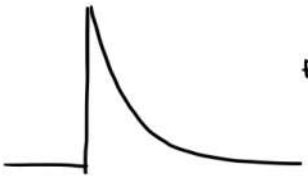
Definiamo lo spettro dell'energia come $S_x(f) = |X(f)|^2$

Un'altra definizione è che $S_x = F[K_{xx}]$ cioè la trasformata di fourier dell'autocorrelazione.

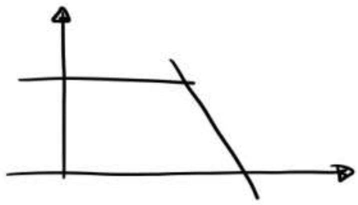
Possiamo infatti verificarla come

$$E = K_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = \int_{-\infty}^{+\infty} |X(f)|^2 df$$

RICORDA



È IL GRAFICO LINEARE-LINEARE DI →



CHE È BODE IL QUALE È log - log

POTENZA

IN PATRICA È ENERGIA / TEMPO

$$P = \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \frac{x^2(\alpha)}{2T} d\alpha$$

Non possiamo usare perseval perchè va da $-\infty$ a $-\infty$
Per risolvere questo creiamo un segnale con Ø fuori da $-T$ e T perciò possiamo usare Perseval.

AUTOCORRELAZIONE DELLO SPETTRO DELLA POTENZA

MAIUSCOLO → $K_{xx}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{K_{xx}(\tau)}{2T}$ MINUSCOLO

QUINDI POSSIAMO DESCRIVERE LO SPETTRO DI POTENZA COME $S_x = F[K_{xx}(\tau)]$
E QUINDI $P = K_{xx}(0)$

NOISE

(LA MEDIA DEL RUMORE È ZERO)

Ci sono diverse forme d'onda, tipo White Noise / Fliker Noise ecc...

IL Problema è che il rumore non è mai uguale, Abbiamo una dimensione in più Ampiezza, tempo e diverse source di rumore.
Ci serve la statistica

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ

VOGLIAMO MISURARE L'AMPIEZZA AL TEMPO t_1, RIPETO QUESTE MISURE MIGLIAIA DI VOLTE
OTTENIAMO UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ.

- RUMORE STAZIONARIO → La densità di probabilità è costante nel tempo
- RUMORE NON STAZIONARIO → La densità di probabilità non è costante nel tempo

Tuttavia gesta distribuzione non ci da una descrizione corretta del rumore. Infatti esiste anche l'offset.

Dobbiamo introdurre the Joint-probability cioè la probabilità di avere un valore X_2 a t_2 avendo un valore X_1 a t_1. Se il processo è stazionario questa probabilità dipende solo dalla distanza tra i 2 punti e non da dove è t_1

TROPPO DIFFICILE DOBBIAMO SEMPLIFICARE

Facciamo qualcosa "simile" all'energia, studiamo la media del rumore, una nel tempo e una nelle repliche (ensemble)

MEDIA NEL TEMPO = $\langle x \rangle_{T\to\infty} = \lim \int_{-T}^{T} \frac{x(t)}{2T} dt$

MEDIA NELLE REPLICHE = $\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x) dx$ PROBABILITÀ

MOMENTI DELLE DISTRIBUZIONI DI PROBABILITÀ

Le medie ci danno solo un numero, un po' poco vogliamo altre informazioni

MOMENT OF A MARGINAL $\rho(x) \rightarrow m_n = \overline{x^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx$

POSSIAMO DIRE CHE QUANDO $n = 1 \rightarrow$ MEDIA E QUANDO $n = 2 \rightarrow$ VARIANZA

ESISTE ANCHE IL MOMENT OF A JOINT VEDERE SLIDE.

26.02.2021 3h DI LEZIONE

Per ogni istante t_1 the mean square value $\overline{x^2(t)} = \sigma_x^2(t_1)$ ("QUALCOSA SIMILE ALL'ENERGIA")
Per rumore stazionario $\overline{x^2}$ non dipende più dal tempo

Per ogni coppia di tempi t_1 e t_2 the mean product è $\overline{x(t_1)x(t_2)} = \overline{x(t_1)\,x(t_1+\tau)}$
per rumore stazionario dipende solo dall'intervallo τ e non dalla posizione di t_1

AUTOCORRELAZIONE DEL RUMORE

$$R_{xx}(t_1, t_1+\tau) = R_{xx}(t_1,t_2) = \overline{x(t_1)\,x(t_2)} = \overline{x(t_1)\,x(t_1+\tau)}$$

questo significa average on ensemble (Media delle repliche)

Non eccessivamente lontana da quella del segnale.

Questa autocorrelazione è sempre funzione di τ e se il rumore è non stazionario ho anche che è in funzione di t_1

SI NOTA CHE

$$\overline{x^2(t)} = R_{xx}(t, 0)$$

the mean square value è l'autocorrelazione con $\tau = 0$

POWER SPECTRUM OF THE NOISE

Definiamo la potenza come un limite $P = \overline{\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \frac{x^2(x)}{2T} dx}$

Facciamo sia una media nel tempo e una sull'ensemble

con vari conti arriviamo a

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T(f)|^2}}{2T} df$$

Allora scriviamo che

$$S_X(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{\overline{|X_T(f)|^2}}{2T}$$ ← Power spectrum of the Noise

Estendiamo lo spettro di potenza come la trasformata di fourier dell'autocorrelazione mediata sui ensemble

$$S_X(f) = \overline{F[K_{xx}(\tau)]} = F[\overline{K_{xx}(\tau)}]$$

Non abbiamo nessuna connessione con l'autocorrelazione R_{xx} DEFINITA PRIMA

Con un po' di calcoli si vede che $\overline{K_{xx}(\tau)} = \langle R_{xx}(t, t+\tau)\rangle$

Perciò ricaviamo che $S_X(f) = F[\langle R_{xx}(t, t+\tau)\rangle]$

Per rumore stazionario $\langle R_{xx}(t, t+\tau)\rangle = R_{xx}(\tau)$ → QUINDI $S_X(f) = F[R_{xx}(\tau)]$

Dato che lo spettro è simmetrico possiamo passare dallo spettro di potenza bilaterale

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XB}(f) df = 2\int_0^{+\infty} S_{XB}(f) df$$

Esiste anche lo spettro unilatero di potenza che è quello che useremo negli esercizi

$$= \int_0^{+\infty} S_{XB}(f) df \qquad \text{(controllare)}$$

SHOT NOISE

La densità spettrale è $S_{nu} = 2qI$ $\quad q$ = carica

La "shot" current è $I = p \cdot q$ con p rate delle pulsazioni.

QUANDO PARLIAMO DEL RUMORE PARLIAMO SEMPRE DELLA VARIAZIONE DI UN VALORE.

POSSIAMO USARE LA STATISTICA X ARRIVARE A QUESTO?

SUPPONIAMO DEI PULSE ALLA FORMA  $f(t) = q h(t)$

con $h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt = 1$ è la forma del segnale normalizzato

— POISSON STATISTICAL PROCESS (vedere Libro)..

DA QUELLO CHE HO CAPITO VOGLIAMO CALCOLARE LA SHOT CURRENT CON IMPULSO A ESPONENZIALE. IN UN PUNTO t IL VALORE SARÀ DIPENDENTE DAGLI IMPULSI VENUTI PRIMA. NON SAPPIAMO SE CI SONO IMPULSI PRIMA, USIAMO LA PROBABILITÀ [$p\,d\alpha$ PROBABILITÀ CHE IN α CI SIA UN IMPULSO]

$$\overline{i(t)} = I = \int_0^{\infty} q\, h(\alpha)\cdot p\, d\alpha = pq \overbrace{\int_0^{\infty} h(\alpha)\cdot d\alpha}^{1} = pq$$

SHOT CURRENT: MEAN SQUARE VALUE

Dobbiamo fare il doppio prodotto, usiamo 2 assi e consideriamo tutte le combinazioni dei 2, e consideriamo tutte le probabilità. Vedere Libro e slide.

CI VIENE FUORI

$$\overline{i^2(t)} = \int_0^{+\infty} q^2 h^2(\alpha)\cdot p\, d\alpha + \iint_0 q\, h(\alpha) p\, d\alpha\, q\, h(\beta)\, p\, d\beta$$

PASSAGGI

$$= pq^2 \int_0^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha + I^2$$

IL RUMORE DELLA CORRENTE È SOLO LA FLUTTUAZIONE DI $i(t)$ ATTORNO AL VALORE MEDIO I

$$n_i(t) = i(t) - \overline{i(t)} = i(t) - I$$

The mean square value of the noise (deviation) è

VEDERE PERCHÈ → $$\overline{n_i^2} = \overline{i^2(t)} - \left(\overline{i(t)}\right)^2 = pq^2 \int_0^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha$$

È IL TEOREMA DI CAMPBELL → $$= qI \int_0^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha$$

Shot noise power spectrum

$$\overline{n_i^2} = qI \int_0^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha = qI \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha$$

DIVERSE UNA 0 e UNA $-\infty$ NON CAMBIA NULLA VISTO CHE $h(\alpha)=0$ PER $\alpha<0$

Se $H(f) = F[h(t)]$ e usiamo parseval e otteniamo

$$\overline{n_i^2} = qI \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(\alpha)\, d\alpha = qI \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df$$

Sappiamo che $\overline{n_i^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,df$

NON POSSIAMO DIRE CHE $qI|H(f)|^2$ SIA LA DENSITÀ SPETTRALE SOLO PERCHÉ FA VENIRE L'INTEGRALE.

DOVREMMO VERIFICARE CHE QUESTA SIA DAVVERO LA DENSITÀ SPETTRALE, PER FARE QUESTO NOI SAPPIAMO CHE (RICORDARE CHE SIAMO IN RUMORE STAZIONARIO)

$$R_{xx}(\tau) = F^{-1}[S_n(f)] = qI\,F^{-1}[|H(f)|^2] = qI \cdot K_{hh}(\tau)$$

È POI DOBBIAMO VERIFICARE CHE SIANO UGUALI

RUMORE NEI DIODI

APPLICHIAMO QUELLO VISTO NEI DIODI (VEDERE SLIDE)

10ps/µm → velocità di un elettrone nella depleted region nella zona PN

Visto che l'impulsi saranno moolto veloci dato la velocità e la piccola distanza della giunzione, supponiamo che gli impulsi del rumore shot siano dei $\delta(t)$

$$S_{nB}(f) = qIS \cdot |H(f)|^2 \cong qI_S \qquad (S_{nB}\ \text{bilateral density})$$

$$\mathbf{S_{nU}(f) = 2qI_S \cdot |H(f)|^2 \cong 2qI_S} \qquad (S_{nU}\ \text{unilateral density})$$

RICORDIAMO CHE $h(t) = \delta(t) \rightarrow |H(f)| \simeq 1$

- The corresponding noise autocorrelation is δ-like

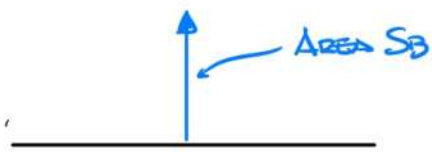
$$R_{nn}(\tau) = qIS \cdot k_{hh}(\tau) \cong qIS \cdot \delta(t)$$

WHITE NOISE

molto importante per noi

Def: collegata con l'autocorrelazione: Noise with strong correlation at $\tau = 0$ and no correlation an any other τ.

L'auto correlazione del rumore bianco è un delta



$$R_{nn}(\tau) = S_b \cdot \delta(\tau)$$

IL RUMORE È STAZIONARIO, QUINDI LO SPETTRO SARÀ LA TRASFORMATA DI FOURIER DI $R_{nn}(\tau)$ È QUINDI

$$S_n(f) = S_b$$

NELLA REALTÀ QUESTO RUMORE NON ESISTE O AVREBBE POTENZA DIVERGENTE $\overline{n^2} \rightarrow \infty$

NELLA NATURA LA WHITE NOISE NON ESISTE XÈ LA NATURA LIMITA

ESISTE ANCHE IL RUMORE NON STAZIONARIO

Nel caso del rumore bianco, abbiamo le stesse caratteristiche

$$R_{nn}(t, t+\tau) = S_b(t) \cdot \delta(\tau)$$

L'AREA DEL DELTA CAMBIA PER OGNI TEMPO

2.03.2021 — 2h di lezione

Chiudiamo la descrizione del rumore e facciamo l'analisi e la simulazione

SAPPIAMO CHE IL RUMORE BIANCO NON ESISTE, DOBBIAMO PRENDERE IL SEGNALE CHE DA LA MIGLIORE APPROSSIMAZIONE. SE LA LARGHEZZA DELL'AUTOCORRELAZIONE È PICCOLA (DIPENDENTEMENTE DAL CHUNK DI TEMPO CHE CONSIDERO) ALLORA IL SEGNALE È UNA BUONA APPROSSIMAZIONE DEL RUMORE BIANCO.

Il rumore bianco non stazionario può essere descritto come $R_{nn}(t, t+\tau) = S_b(t)\delta(t)$

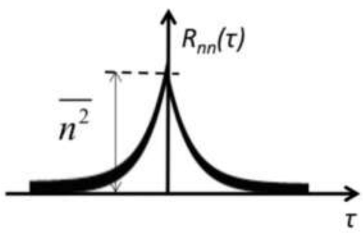
Il rumore bianco ci piace perché possiamo filtrarlo senza troppi problemi.
Se calcoliamo la mean square value del segnale + rumore bianco, e visto che il rumore è bianco sappiamo che l'autocorrelazione è una delta. Questo ci aiuta sui cross product perché ricordando statistica il prodotto di 2 dati non correlati è $\emptyset$.

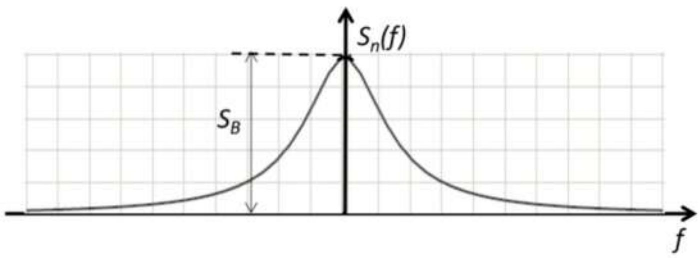
Il rumore semplifica molto perché non c'è correlazione tra rilevazioni.

MA ATTENZIONE! NELLA REALTÀ IL RUMORE BIANCO NON ESISTE!!

Molto probabilmente abbiamo un rumore bianco limitato in banda.

SUPPONIAMO CHE IL RUMORE BIANCO SIA LIMITATO IN BANDA DA UN SINGOLO POLO, ALLORA L'AUTOCORRELAZIONE E LO SPETTRO SARANNO





IN QUESTO CASO VA A 0 A $\pm\infty$
QUI SEMBRA CHE CI SIA SEMPRE CORRELAZIONE.
TUTTAVIA SE τ È MOLTO PICCOLO POSSIAMO APPROSSIMARE QUESTO CON δ

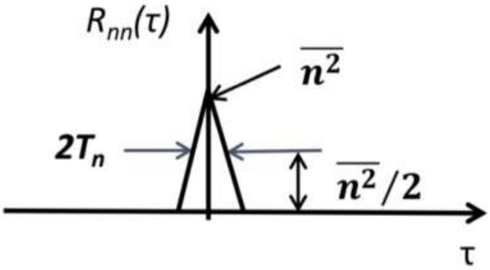
TROPPO COMPLESSO

Posso definire il parametro base del rumore per esportare un modello?

- I PARAMETRI PRINCIPALI SONO
  - EQUAL MEAN SQUARE $\overline{n^2}$

- EQUAL SPECTRAL DENSITY S_b

1) L'AUTOCORRELAZIONE A FORMA DI TRIANGOLO



in time: $R_{nn}(\tau)$ triangular approx, half-width $2T_n$

a) **equal msq noise** : $R_{nn}(0) = \overline{n^2}$

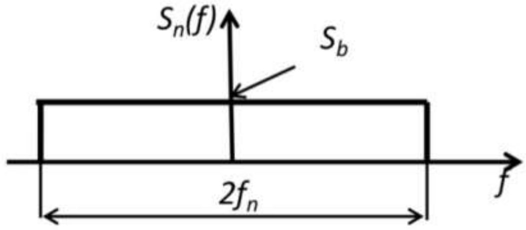
b) **equal spectral density**: [area of $R_{nn}(\tau)$] = S_b ,
(i.e. $\overline{n^2}\, 2\, T_n = S_b$)

Correlation width = $\Delta\tau = 2T_n$

Ma perché usiamo un triangolo e non un rect, che sarebbe più facile ?

NON POSSIAMO USARE UN RECT !! Se usassimo un rect come autocorrelazione, e facessimo Fourier otterremo un sinc e il che vorrebbe dire che abbiamo uno spettro negativo nelle x [ricordare che $S_n(f) = F[R_{nn}(\tau)]$], il che vorrebbe dire che abbiamo potenza negativa.

In frequenza invece usiamo il rect



in frequency: S_n *(f)* rectang approx, half-width f_n

a) **equal msq noise** : [area of S_n *(f)*] = $\overline{n^2}$
(i.e. $S_b 2\, f_n = \overline{n^2}$)

b) **equal spectral density**: $S_n(0) = S_b$

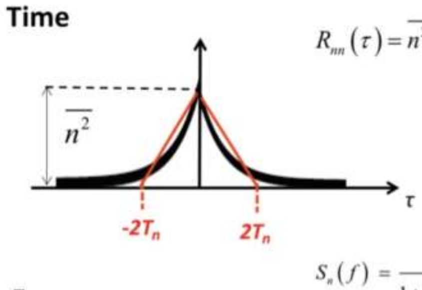
Noise bandwidth: $\Delta f = 2f_n$

Note that $\Delta\tau \cdot \Delta f = 1$ which is consistent with $S_n(f) = F[R_{nn}(\tau)]$

e in questo caso non abbiamo problemi.

Per mantenere i parametri principali dobbiamo fare i seguenti calcoli

f_p è la frequenza del polo del filtro



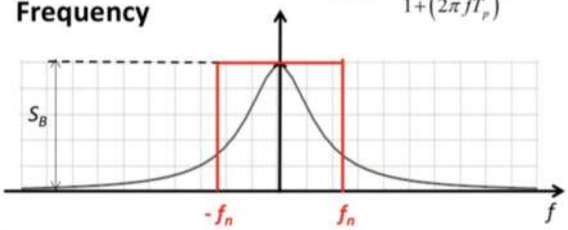
$R_{nn}(\tau) = \overline{n^2} e^{-\frac{|\tau|}{T_p}}$

$S_B = \int_{-\infty}^{\infty} R_{nn}(\tau)\, d\tau = \overline{n^2}\, 2T_p$ *

$\boxed{T_n = T_p}$

Non credo faccia realmente gli integrali ma usa un trucco.

Voglio calcolare la larghezza del rect. Mi serve l'area del Lorenzian spectrum



$S_n(f) = \frac{S_B}{1+\left(2\pi f T_p\right)^2}$

$\overline{n^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f)\, df = S_B \frac{1}{2T_p}$

$\boxed{2f_n = \frac{1}{2T_p}}$

Area = valore in 0 nel tempo
f

$\Rightarrow = n^2 = \frac{S_B}{2T_p}$ QUESTO LO SO XÈ HA CALCOLATO IL PRIMO INTEGRALE (*)

Note that $f_n \neq f_p$, namely $f_n = \frac{1}{4T_p} = \frac{\pi}{2} f_p$

RIVEDERE CHE CALCOLI HA FATTO QUI

FILTRARE IL RUMORE

Quando filtro il rumore con un passabasso, faccio sì che nel tempo l'autocorrelazione si allarghi (Vedere Libro e slide)

Praticamente abbiamo il fotodiodo che da impulsi, questi impulsi vengono messi dentro un filtro passa basso, così ottengo un esponenziale decrescente. Da questo segnale d'uscita passo calcolare l'autocorrelazione (con i grafici) e ottengo la forma a doppio esponenziale iperbole

Comparo poi l'autocorrelazione d'ingresso (shot noise) con quella d'uscita

04·03·2021 ESERCITAZIONE 3h

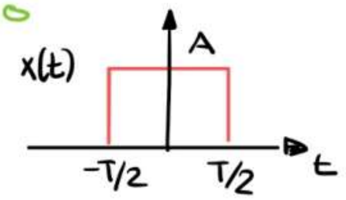
Trasformata di Fourier

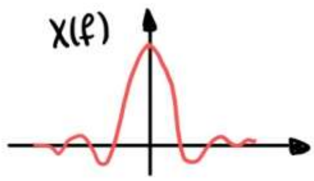
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, e^{j2\pi f t}\, df \qquad X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt$$

PROPRIETÀ

$$x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\, df \qquad X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, dt$$

ESEMPIO





$$X(f) = [\,] \cdot \frac{\sin(\pi f T)}{\pi f T}$$

Area del rect, nel nostro caso $A \cdot T$

Voglio dimostrare che

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} A \cdot T \cdot \mathrm{sinc}(\pi f T)\, df$$

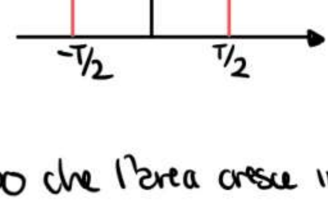
Dobbiamo quindi dimostrare che l'integrale del sinc sia $1/T$

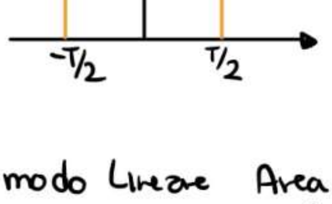
CONVOLUZIONE

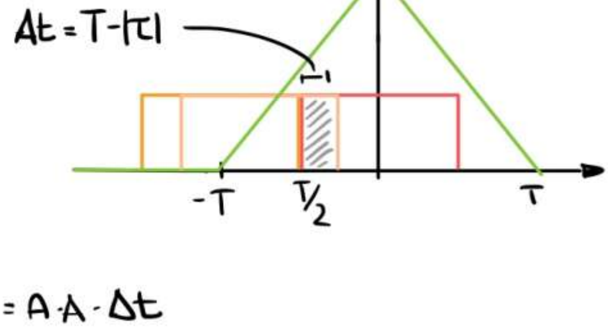
Date 2 funzioni $f(t)$ e $g(t)$ la convoluzione è

$$f * g = \int f(t)\, g(\tau - t)\, dt$$

ESEMPIO



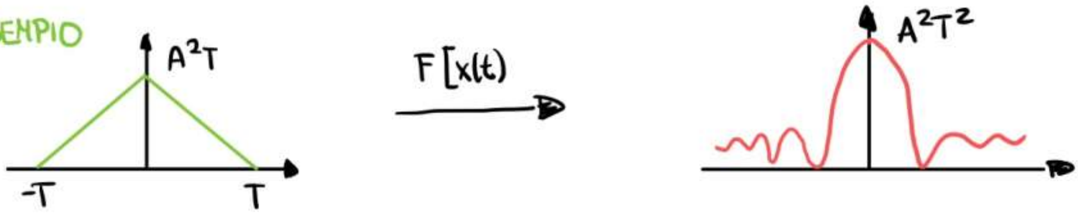




So che l'area cresce in modo lineare Area = $A \cdot A \cdot \Delta t$

in realtà non è l'area ma l'integrale di convoluzione

ESEMPIO



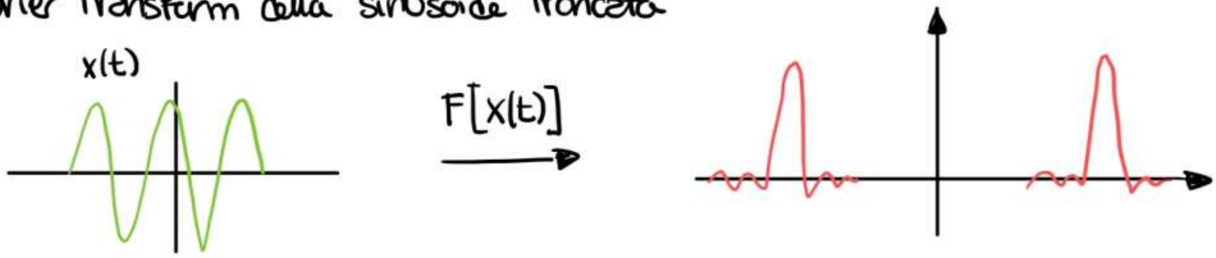
$\text{sinc}^2(\pi f T)$

Questo perché c'è la proprietà della convoluzione: Se faccio la convoluzione in t allora sarà il prodotto in f e viceversa

Vediamo che è giusto anche con la proprietà in Ø e delle aree.

ESERCIZIO

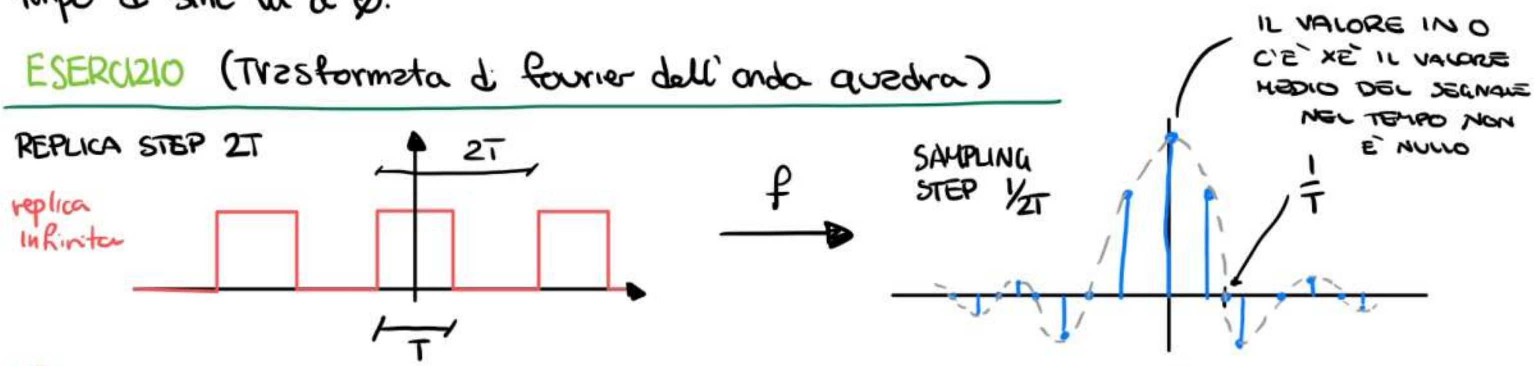
Fourier transform della sinusoide troncata



Possiamo vedre x(t) come prodotto tra una sinusoide e un rettangolo, quindi in frequenza dobbiamo fare la convoluzione delle 2 trasformate

Capisco che più lungo è il tempo della sinusoide più il sinc si stringe, a $t \to \infty$ il tempo di sinc va a Ø.

ESERCIZIO (Trasformata di fourier dell'onda quadra)



3ª proprietà Se replico un segnale nel tempo è come campionarlo nella frequenza e viceversa

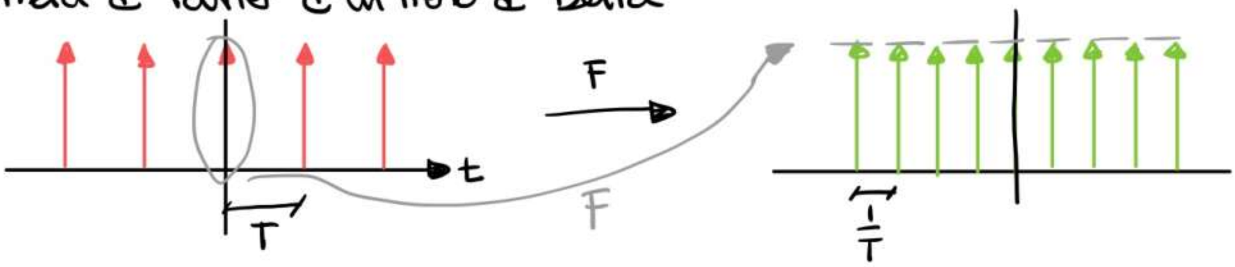
Ci muoviamo prima in frequenza, infatti consideriamo che il sinc è la trasformata del rect e sappiamo che ha valore zero ogni 1/T

Visto che la replica ha frequenza 2T allora devo campionare ogni 1/2T

Se avessimo solo 3 repliche dovremmo convolvere il segnale con onda quadra infinita con un rect più grande che prende solo le 3 ripetizioni

ESEMPIO

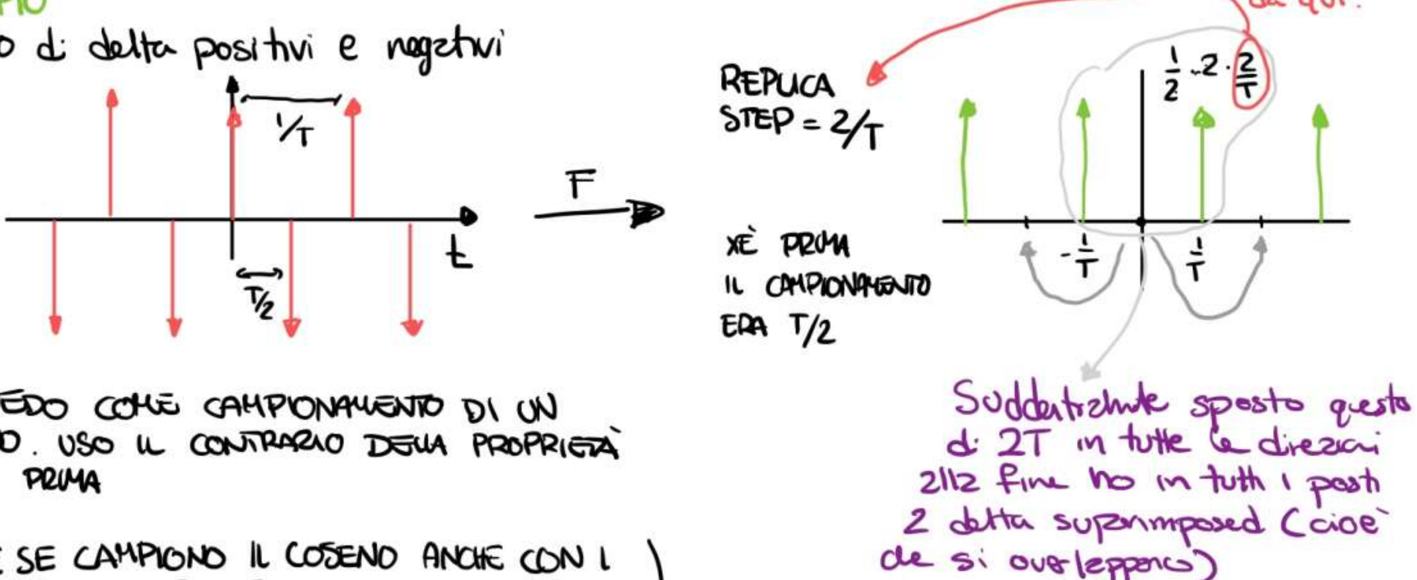
Trasformata di Fourier di un treno di Delta



il segnale nel tempo è una replica del delta (con replica step T) poi facciamo la trasformata di fourier del delta che è una costante e poi la semplificamo con replica 1/T. (questo lo facciamo visto che il segnale del tempo era una ripetizione di delta)

ESEMPIO

Treno di delta positivi e negativi

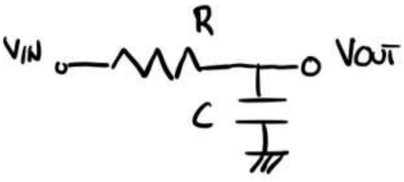


LO VEDO COME CAMPIONAMENTO DI UN COSENO. USO IL CONTRARIO DELLA PROPRIETÀ USATA PRIMA

ANCHE SE CAMPIONO IL COSENO ANCHE CON I PUNTI IN Ø IL RISULTATO NO CAMBIA (QUINDI SE CAMPIONO CON $f = T/4$)

CREDO CHE QUESTA COSA VANGA IN GENERALE PER QUALSIASI CAMPIONAMENTO che mi da un treno di delta con al massimo dei punti con valore nullo in mezzo

NETWORK RC



INIZIAMO A STUDIARE IL SEGNALE CON

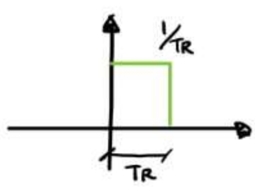
$$V_{IN}(t) = 1 \cdot \delta(t)$$

L'OUTPUT È LA CONVOLUZIONE TRA L'INGRESSO E LA FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DEL FILTRO

OPPURE POSSO USARE LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI CON LE EQUAZIONI BASE DEI COMPONENTI

OPPURE POSSO PARTIRE DALLA DEFINIZIONE DELLA DELTA

$$\lim_{T_R \to 0} \frac{1}{T_R} \operatorname{rect}(t - T_R)$$

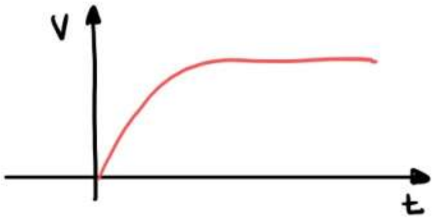


NOTIAMO POI CHE LA DERIVATA DELLO SCALINO NEL TEMPO È UN DELTA

Soluzione 1)

Facciamo prima la risposta allo step prima che al delta

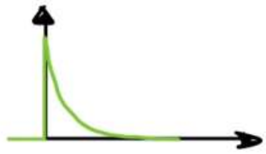
OTTENIAMO CHE



$$V_{OUT}(t) = 1(1-e^{-t/\tau})$$

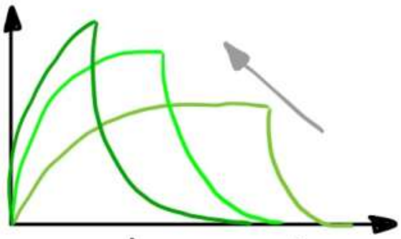
VISTO CHE SAPPIAMO CHE LA DELTA È LA DERIVATA DELL'ESPONENZIALE, ALLORA CI BASTA FARE LA DERIVATA DI V_{OUT} PER SAPERE L'USCITA CON INGRESSO A DELTA

$$V_{OUT_\delta} = \frac{\partial V_{OUT}(t)}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$



2a SOLUZIONE?

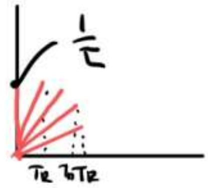
POSSO VEDERE QUESTA COSA COME UN GRADINO CHE VIA VIA AUMENTA DI AMPIEZZA E RIDUCE DI DURATA



IN PRATICA ALL'INIZIO LA FORMA D'ONDA SEMBRA UNA LINEA. QUESTO SIGNIFICA CHE IL CIRCUITO SI COMPORTA COME UN INTEGRATORE, INFATTI NOI MANDIAMO DENTRO UN GRADINO E CI DA UNA LINEA

INFATTI $\frac{1}{1+SCR} \simeq \frac{1}{SCR}$ PER VALORI DI FREQUENZA D'INGRESSO MOLTO MAGGIORI DELLA COSTANTE DI TEMPO DEL SISTEMA

Se andiamo all'estremo notiamo che otteniamo la linea verticale



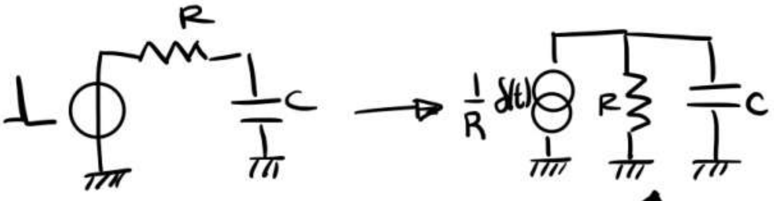
La slope è la derivata in Ø di V_{OUT}

$$\left.\frac{dV_{OUT}}{dt}\right|_0 = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{Tr}(1-e^{-t/Tr})\right)$$
$$= \frac{1}{TR \cdot \tau}$$

cioè la pendenza dell'output

(non ho capito come fa a dire che per $Tr \to 0$ viene $1/\tau$)

3a SOLUZIONE



LA CORRENTE VA TUTTA SUL CONDENSATORE VISTO CHE QUELLO CHE HA MENO IMPEDENZA

QUINDI

$$Q = \frac{1}{R} \cdot 1$$

$$\Delta V_C = \frac{Q}{C} = \frac{1}{RC}$$

POI IL CONDENSATORE SI SCARICHERÀ SULLA RESISTENZA IN MODO ESPONENZIALE DECRESCENTE

05.03.2021 3h di lezione

Filtering signal

Iniziamo con la filtrazione dei segnali discreti e poi andiamo a quelli analogici

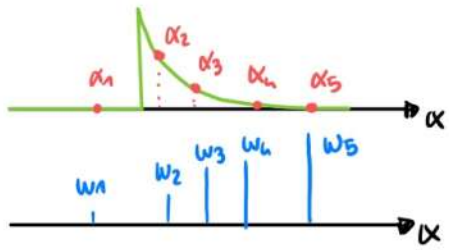
Dobbiamo definire una struttura

LINEAR FILTERS → Vale la sovrapposizione degli effetti

L'OUTPUT È LA SOMMA PESATA DEI VALORI DI INPUT x PRESA A DIVERSI VALORI DI TEMPO α.
ATTENZIONE!! noi NON STUDIAMO FILTRI LA CUI SOMMA PESATA DIPENDE DA x (FILTRI ADATTATORI)

$$y(t_m) = w_1 x(\alpha_1) + w_2 x(\alpha_2) + \dots w_n x(\alpha_n) = \sum_{k=0}^{n} w_k x(\alpha_k)$$

ESEMPIO



CAMPIONI

DEFINIAMO UN PESO PER OGNI CAMPIONE

POI FACCIAMO IL PRODOTTO DEI SINGOLI FATTORI E POI SOMMIAMO

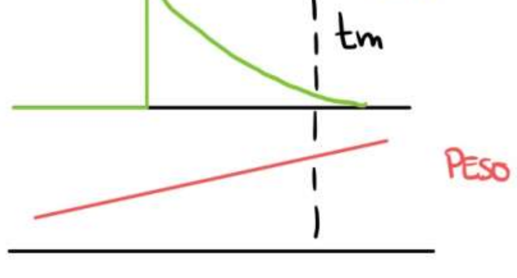
NEL CASO CONTINUO ABBIAMO

Somma di continui valori $w(\alpha)x(\alpha)$ QUINDI L'OUTPUT SARÀ

$$y(t_m) = \int_{-\infty}^{t_m} w(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha$$

Usiamo t_m e non $+\infty$ perché non cambia nulla e così possiamo usare Parseval

ESEMPIO



DEFINISCO t_m

FACCIAMO L'INTEGRALE E CALCOLIAMO L'OUTPUT

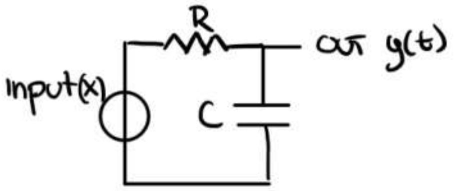
[Per i filtri a parametri non costanti dobbiamo fare il conto per ogni t]

FUNZIONE PESO DEL FILTRO (LA CHIAMIAMO ANCHE FUNZIONE MEMORIA DEL FILTRO)

$$y(t_m) = \int_{-\infty}^{t_m} w(\alpha)\, x(\alpha)\, d\alpha$$

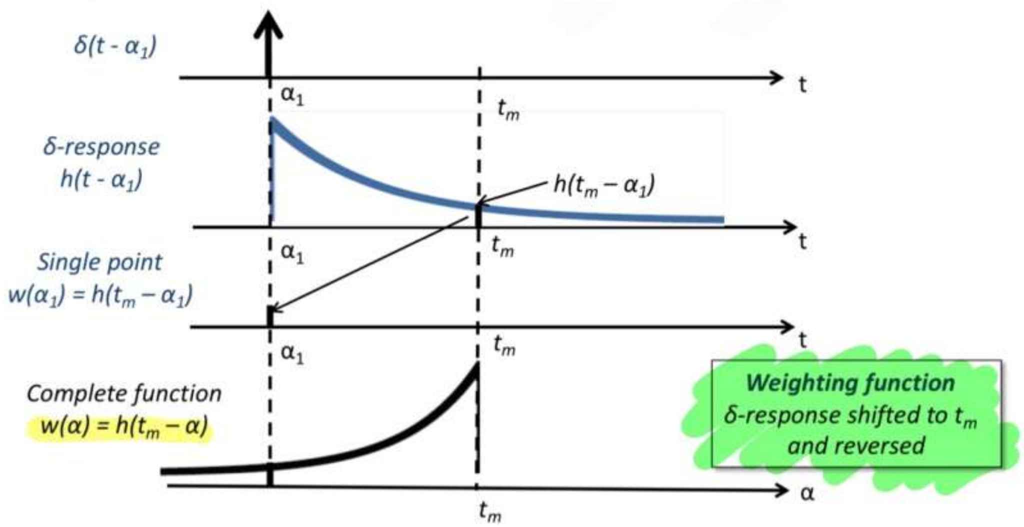
Useremo questa formula sempre

CONSTANT - PARAMETER FILTER



Come possiamo creare la funzione peso di un filtro a parametri costanti?

Prendiamo un punto α_1 e mettiamo un delta a quel tempo. Fatto questo otteniamo la risposta del filtro e ne prendiamo il valore ad un punto t_m (con $t_m > \alpha_1$). Questo è il valore della funzione peso per α_1. Per trovare la funzione per ogni punto dovremo fare questo per tutti i punti.



Notiamo che la funzione peso per un filtro a parametri costanti è la risposta all'impulso shiftata fino a t_m e ribaltata.

Per ogni t_m c'è una diversa funzione peso. (esiste un t_m ottimo che impareremo a calcolare) [più che altro nei filtri tempo varianti]

Se cambio t_m la forma è la stessa solo spostata sul t_m usato

ABBIAMO VISTO CHE NEL FILTRO A PARAMETRI COSTANTI LA FUNZIONE PESO È

$$w(\alpha) = h(t_m - \alpha)$$

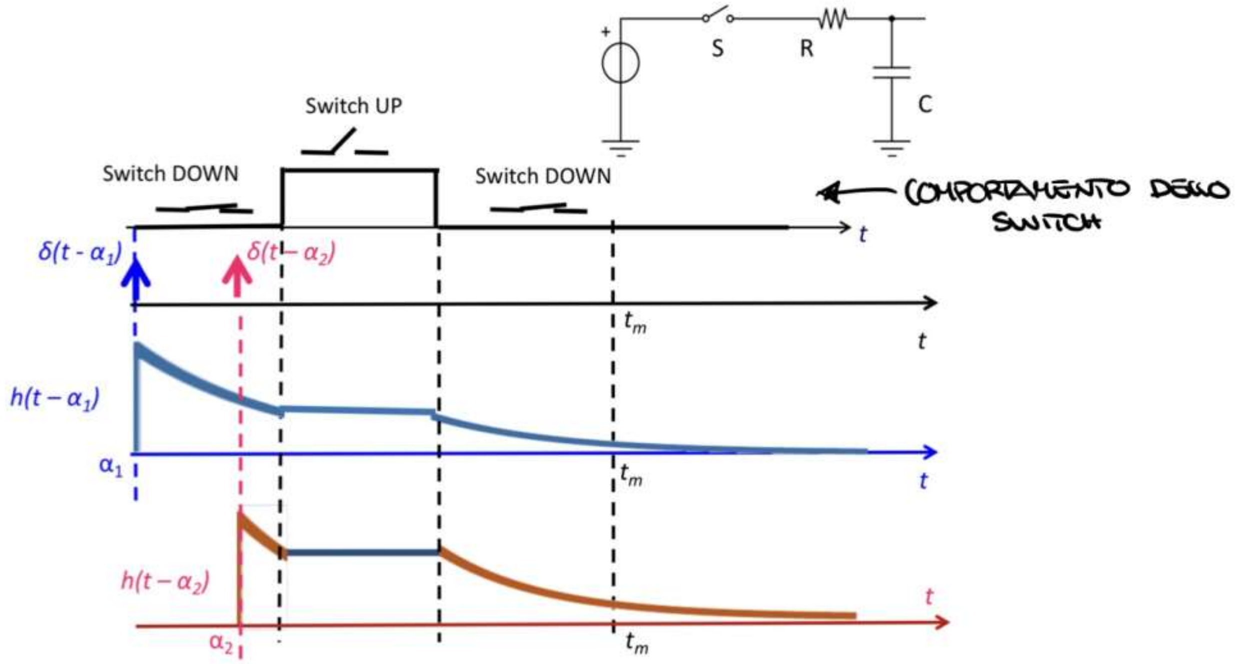
RICORDIAMO che

$$y(t_m) = \int_{-\infty}^{t_m} x(\alpha)\, w(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{t_m} x(\alpha)\, h(t_m - \alpha)\, d\alpha = x(t) * h(t)$$

Come sapevamo abbiamo ottenuto la convoluzione dell'input e della delta response

TIME-VARIANT FILTERS (sono sempre filtri Lineari)

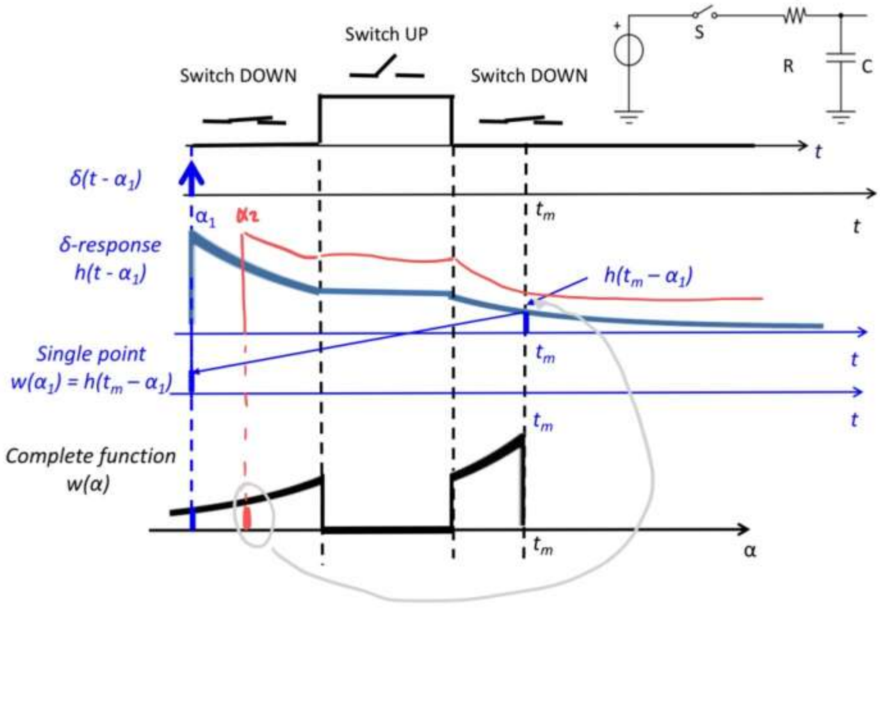
La risposta al delta di uno di questi filtri può non essere così semplice da fare.
Per fare questo tipo di filtri basta aggiungere uno swith al circuito.
Introduciamo questi filtri perché vogliamo filtrare il rumore in modo diverso dal segnale



Come posso creare la funzione peso? (la convoluzione non funziona più)

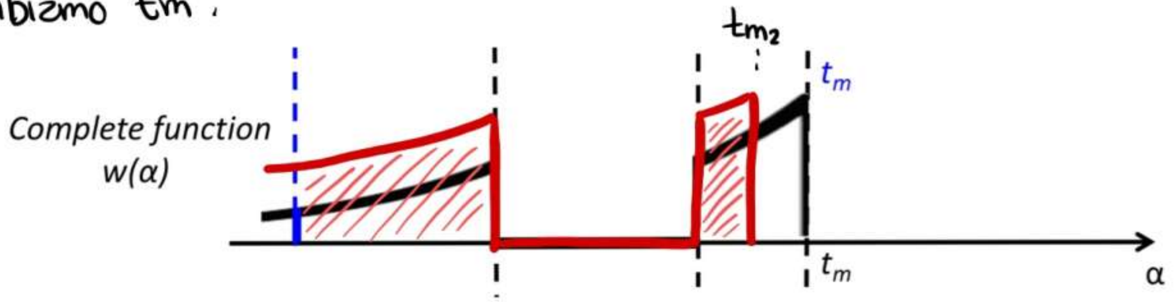
Prima di tutto scelgo tm e α1 e applico un delta ad α1 e vedo il comportamento fino a tm. Poi prendo un punto α2 e faccio la stessa cosa.

Lo weithening function sarà:



Dobbiamo fare questo per ogni punto α.

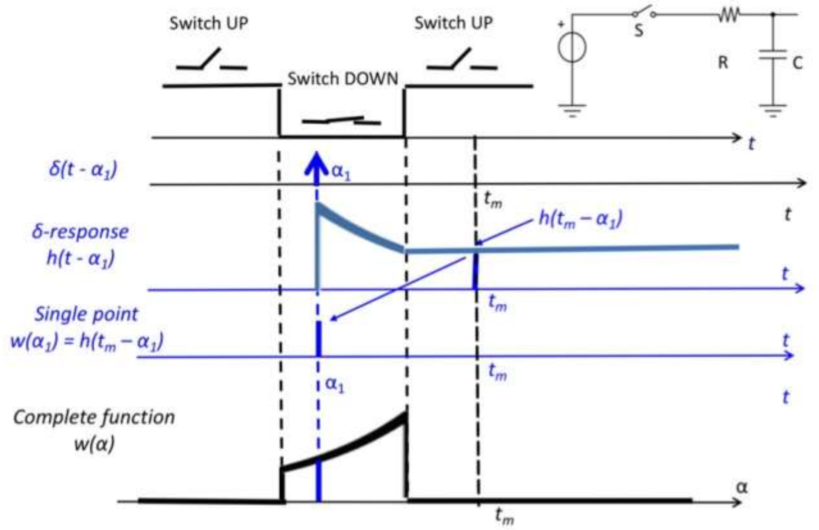
E se cambiamo tm?



Notiamo che qui la funzione peso cambia in base a tm, dovremo trovare il tm che ci da quella migliore.

ESEMPIO

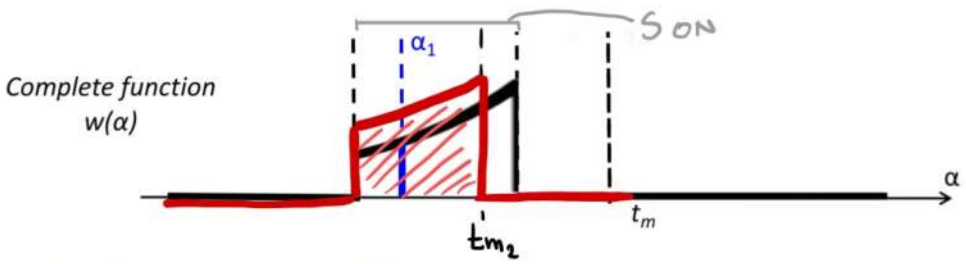
Cambia il comportamento del filtro



RICORDARSI CHE BISOGNA PRENDERE IL VALORE IN tm E RIPORTARLO IN α.

NON BISOGNA RIBALTARE IL SEGNALE XÈ QUESTO NON È UN FILTRO A PARAMETRI COSTANTI !!

Se tm fosse durante lo switch down l'uscita sarebbe:



FUNZIONE PESO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA.

Usiamo il teorema di Parseval

The concept of acquired value y(t) as a weighted sum of components can be extended to the frequency domain. Parseval's theorem

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)A^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)A(-f)df$$

can be extended to the product of two functions *a(t)* and *b(t)*

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(t)b(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)B^*(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)B(-f)df$$

Non ci interessa la dimostrazione !!!

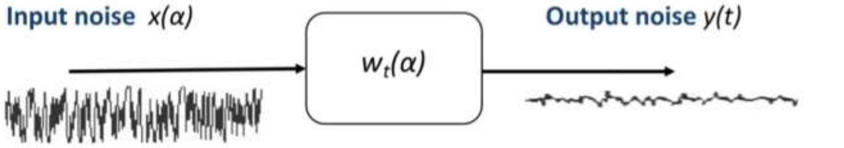
Quindi possiamo scrivere che

$$y(t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\alpha)\cdot w(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f)\cdot W(-f)\,df$$

ABBIAMO l'integrale fino a $+\infty$ e non fino a t_m visto che $w(\alpha)$ è $\varnothing$ dopo t_m.

FILTRARE IL RUMORE (ci focalizziamo più sul rumore stazionario)

Sappiamo l'autocorrelazione dell'input, quindi noi progetteremo la funzione peso del filtro e poi noi vogliamo calcolare l'autocorrelazione dell'output.



characterized by

$$R_{xx}(\alpha,\alpha+\gamma) = \overline{x(\alpha)x(\alpha+\gamma)}$$

characterized by

$$R_{yy}(t,t+\tau) = \overline{y(t)y(t+\tau)}$$

Definizione dell'autocorrelazione

$$R_{yy}(t_1,t_2) = \overline{y(t_1)y(t_2)} =$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(\alpha)w_1(\alpha)d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x(\beta)w_2(\beta)d\beta} = \iint_{-\infty}^{\infty} \overline{x(\alpha)x(\beta)}\cdot w_1(\alpha)w_2(\beta)d\alpha\, d\beta =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\beta)\, w_1(\alpha)w_2(\beta)d\alpha\, d\beta$$

1 ci dice che è stato calcolato per t_1

Autocorrelazione dell'input

LO SAPPIAMO DA PRIMA

L'AVARAGE ON ENSAMBLE NON HA NESSUN EFFETTO SULLA FUNZIONE PESO. L'AVARAGE ON ESAMBLE HA EFFETTO SOLO SUI DATI CHE HANNO DELLA STATISTICA

Vogliamo introdurre $\gamma = \alpha - \beta$ e anche $\tau = t_2 - t_1$ perché vogliamo sottolineare la distanza tra i vari punti, (perché ci ricordiamo che l'autocorrelazione del rumore stazionario dipende unicamente da τ, [ora però non stiamo lavorando solo con il rumore stazionario, ma comunque questo può tornare utile])

Riscriviamo

$$\boxed{R_{yy}(t_1,t_1+\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\alpha+\gamma)\, w_1(\alpha)w_2(\alpha+\gamma)d\alpha\, d\gamma}$$

Ci interessa l'autocorrelazione dell'output perché ci può dare la mean square value dell'output.

Ricordiamo che la mean square value è l'autocorrelazione calcolata con $\tau = \varnothing$ perciò:

$$\boxed{\overline{y^2(t_1)} = R_{yy}(t_1,t_1) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\alpha+\gamma)\, \underbrace{w_1(\alpha)\, w_1(\alpha+\gamma)}_{}\, d\alpha\, d\gamma}$$

Abbiamo la stessa funzione peso

Questo vale per qualsiasi rumore e per qualsiasi filtro lineare

Vogliamo semplificare la formula:

FILTRARE IL RUMORE STAZIONARIO

SUPPONIAMO IL RUMORE STAZIONARIO IN INGRESSO

SAPPIAMO CHE $$R_{xx}(\alpha,\alpha+\gamma) = R_{xx}(\gamma)$$

NON POSSIAMO DIRE NIENTE SULL' OUTPUT (PUO' ESSERE ANCHE UN RUMORE NON STAZIONARIO)

Questo in teoria accade quando usiamo i non constant parameter filter

$$\overline{R_{yy}(t_1,t_1+\tau)} = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\gamma)\, w_1(\alpha) w_2(\alpha+\gamma)\, d\alpha\, d\gamma =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\gamma) \left(\int_{-\infty}^{\infty} w_1(\alpha) w_2(\alpha+\gamma)\, d\alpha \right) dy$$

Faccio prima l'integrale in $d\alpha$ e poi moltiplico e faccio l'integrale in dy totale (sbagliato come è scritto sulle slide)

Se scriviamo $K_{12_w}(\gamma)$ la crosscorrelazione della funzione $w_1(\alpha)$ e $w_2(\alpha)$

$$K_{12w}(\gamma) = \int_{-\infty}^{+\infty} w_1(\alpha) w_2(\alpha+\gamma)\, d\alpha$$

Così possiamo scrivere l'autocorrelazione dell'output come

$$R_{yy}(t_1,t_1+\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\gamma) \cdot K_{12w}(\gamma)\, d\gamma$$

La mean square value sarà quindi

$$\overline{y^2(t_1)} = R_{yy}(t_1,t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\gamma) \cdot K_{11w}(\gamma)\, dy$$

IN PATRICA È LA POTENZA DEL RUMORE D'USCITA.

LA FUNZIONE PESO È UN SEGNALE D'ENERGIA, LA RAGIONE È XE` NORMALMENTE QUANDO CREIAMO UN FILTRO QUESTO HA TEMPO (e quindi area) LIMITATA

K_{11w} È L'AUTOCORRELAZIONE DELLA FUNZIONE PESO DEL FILTRO

PER PARSEVAL SAPPIAMO CHE

$$F[K_{11w}(\gamma)] = |W_1(f)|^2$$

ALLORA USANDO IL TEOREMA DI PARSEVAL

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t)\, b(t)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \cdot B(f)^* \, df$$

ALLORA:

IMPORTANTE!!

$$\boxed{\overline{y^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\gamma) \cdot k_{11w}(\gamma)\, d\gamma}$$

$$\boxed{\overline{y^2(t_1)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cdot |W_1(f)|^2\, df}$$

F[] F[]

Sono 2 formule estremamente importanti!!

IL CONIUGATO DI QUESTO È SE STESSO X È E AL QUADRATO.

09.03.2021 2h LEZIONE

FILTRARE IL RUMORE BIANCO

Il rumore bianco ha intensità costante (potenza)

$$R_{xx}(\alpha, \alpha+\gamma) = R_{xx}(\gamma) = S_b \cdot \delta(\gamma)$$

Usando le formule viste in precedenza

xè delta per un valore da il valore in 0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_b \cdot \delta(\gamma) \cdot K_{12w}(\gamma)\, d\gamma$$

$$\boxed{R_{yy}(t_1, t_1+\tau) = S_b \int_{-\infty}^{\infty} w_1(\alpha) w_2(\alpha)\, d\alpha = \boldsymbol{S_b \cdot k_{12w}(0)}}$$

Possiamo calcolare poi la potenza, sempre con le formule prima

$$\boxed{\overline{y^2(t_1)} = S_b \cdot k_{11w}(0) = S_b \int_{-\infty}^{\infty} {w_1}^2(\alpha)\, d\alpha}$$

FLITRAGGIO DEL RUMORE CON FILTRO A PARAMETRI COSTANTI

Sappiamo che c'è una stretta correlazione tra la risposta a δ e la funzione peso del filtro. chiamiamo $h(t)$ la risposta al gradino, perciò

$$w_m(\alpha) = h(t-\alpha)$$

ANDANDO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA NOTIAMO CHE I MODULI DI $H(f)$ E $W_m(f)$ (SOLO I MODULI) SONO UGUALI

$$|W_m(f)|^2 = |H(f)|^2$$

I FILTRI A PARAMETRI COSTANTI SONO PERMUTABILI (SE HO 2 FILTRI IN CASCATA POSSO ANCHE SCAMBIARLI CHE NON CAMBIA NULLA) E SONO REVERSIBILI QUINDI NON PERDIAMO INFORMAZIONE.

CALCOLI MATEMATICI

CONSTANT-PARAMETER filters with stationary input noise

The output autocorrelation is

ABBIAMO RISCRITTO LE FUNZIONI PESO

$$R_{yy}(t_1,t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\beta)\, w_1(\alpha) w_2(\beta) d\alpha\, d\beta = \iint_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\beta)\cdot h(t_1-\alpha)h(t_2-\beta) d\alpha\, d\beta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_1-\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\alpha,\beta)\cdot h(t_2-\beta) d\beta = R_{xx}(\alpha,\beta) * h(\beta) * h(\alpha)$$

È SBAGLIATO, VA QUI

and taking into account that:

- the stationary input autocorrelation depends only on the interval $\gamma = \beta - \alpha$
- $d\beta = d\gamma$
- $d\alpha = -\,d\gamma$
- the output autocorrelation is also stationary and depends only on the interval τ

$$\boxed{R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\gamma) * h(\gamma) * h(-\gamma) = R_{xx}(\gamma) * k_{hh}(\gamma)}$$

and therefore

FORMULA VISTA IN PASSATO

$$\boxed{S_y(f) = S_x(f)\cdot |H(f)|^2}$$

Questo è un caso specifico, meglio ricordare le formule generali

LOW PASS FILTER

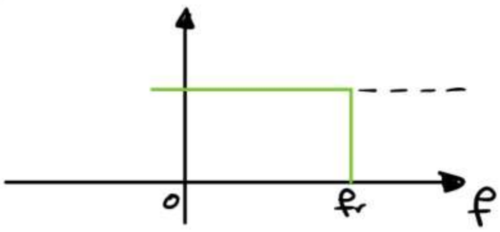
Dobbiamo definire il segnale e il rumore. Dobbiamo capire cosa ci interessa del segnale (Forma o altro?). Inoltre ci interessano le situazioni in cui il segnale è completamente corrotto dal rumore.

LOW PASS FILTER → Xè al giorno d'oggi usiamo spesso frequenze molto elevate e in genere noi usiamo solo una limitata banda di questi.

il filtro passa basso fa si di ridurre la banda nel dominio della frequenza.

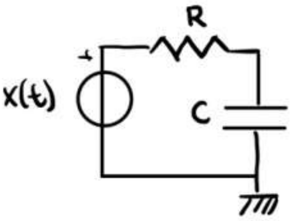
Se riduciamo nel dominio della frequenza allora si allarga nel dominio del tempo.

Per ora pensiamo al filtro passa basso come un rect in frequenza che mantiene le frequenze basse



Notiamo che spostando questo rect possiamo ottenere un passa alto.

INTEGRATORE RC



Sappiamo che la delta response è

$$h(t) = \frac{1}{T_f} 1(t) e^{-t/T_f}$$

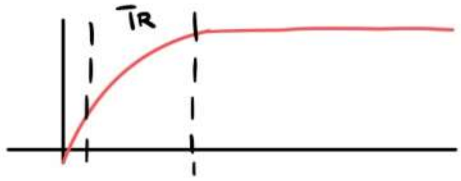
Tipicamente mettiamo l'ampiezza $1/T_f$ in modo d'avere l'area del segnale che è unitaria

Vogliamo l'area = 1 perché così non introduciamo amplificazioni, infatti se l'area della funzione peso (che in questo caso è solo ribaltata e shiftata dalla delta response) è 1 allora Fourier in 0 è 1 e non amplifichiamo la componente in DC.

Inoltre noi vogliamo trovare il miglior filtro, perciò dobbiamo comparare ingresso e uscita

Calcoliamo la risposta al gradino dell'RC
il tempo di risposta dal 10 al 90 %
è

$$T_R = 2,2 T_f = 1/3f_p$$

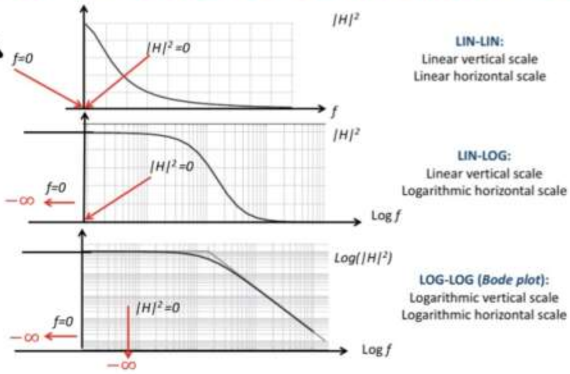


Le formule di risposta al gradino sono

$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f T_f} \qquad |H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (2\pi f T_f)^2}$$

CONSIDERIAMO ORA I GRAFICI DEI DIVERSI CASI (ES LINEARE /LOGARITMICO ECC)

Mi dice dove si trova f=0 nei grafici



Visto che è un filtro a parametri costanti la funzione peso del filtro è

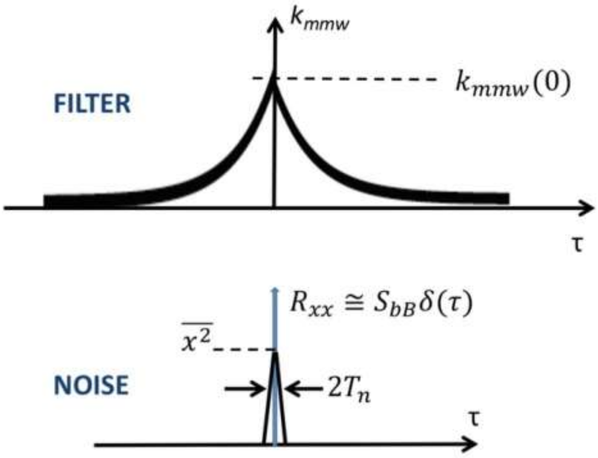
$$W_m(\alpha) = h(t_m - \alpha)$$

e anche

$$|W_m(f)|^2 = |H(f)|^2$$

CALCOLIAMO L'AUTOCORRELAZIONE DEL FILTRO E DEL RUMORE

SUPPONIAMO DI FILTRARE WIDE-BAND NOISE : TIME DOMAIN ANALYSIS



$$k_{mmw}(\tau) = \frac{1}{2T_f}\, e^{-\left|\frac{\tau}{T_f}\right|}$$

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \cdot k_{mmw}(\tau)\, d\tau \quad *$$

Se la larghezza dell'autocorrelazione del rumore è molto più piccola di quella del filtro allora possiamo approssimare l'autocorrelazione del rumore con una delta e quindi otteniamo un calcolo più facile della formula *

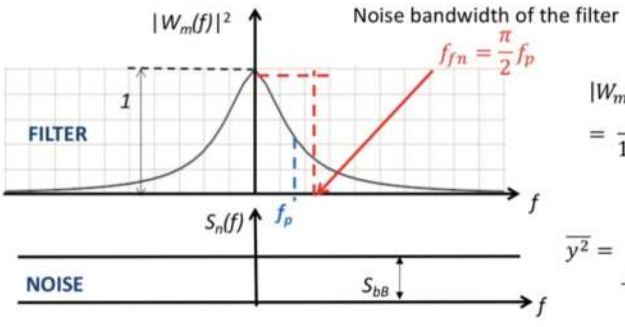
We can then approximate $R_{xx} \cong S_{bB}\delta(\tau)$ and obtain

$$\overline{y^2} = S_{bB} \cdot k_{mmw}(0) = \frac{S_{bB}}{2T_f}$$

L'AMPLIFICAZIONE DEL FILTRO NON È IMPORTANTE!!

Questo perché nel rapporto segnale rumore questa amplificazione non si vede altrimenti non avremmo bisogno di un filtro ma basterebbe un amplificatore

CALCOLI FATTI PRIMA SOLO CHE ADESSO LI FACCIAMO IN FREQUENZA



$$|W_m(f)|^2 = |H(f)|^2 = \\ = \frac{1}{1 + (2\pi f T_f)^2}$$

$$\overline{y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) \cdot |W_m(f)|^2\, df$$

IMPORTANTE!

il rumore bianco vero non esiste ma in questo caso noi possiamo approssimarlo come tale

The noise is considered wide-band if it has spectrum much wider than the filter weighting spectrum, that is, if its bandlimit $f_n >> f_p$

We can then approximate $S_x(f) \cong S_{bB}$ and obtain

$$\overline{y^2} = S_{bB} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |W_m(f)|^2\, df = S_{bB} \cdot k_{mmw}(0) = \boxed{\frac{S_{bB}}{2T_f}} = S_{bB} \cdot 2f_{fn}$$

STESSO RISULTATO DI PRIMA!!

Equivalent noise bandwith (non mi è chiaro cosa sia)

L'idea è di approssimare con un rect il filtro nel dominio della frequenza, così facendo possiamo scrivere l'output mean square noise come

$$\overline{y^2} = S_{bB} \cdot 2f_{fn}$$

L'unica cosa che possiamo cambiare è f_n

Queste equazioni valgono per qualsiasi filtro passa basso

Since it is

$$\overline{y^2} = S_{bB} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |W_m(f)|^2 \, df = S_{bB} \cdot k_{mmw}(0)$$

for any LPF the correct bandwidth limit f_{fn} is

$$f_{fn} = \frac{k_{mmw}(0)}{2}$$

ESTREMAMENTE IMPORTANTE !!!

and in particular for the RC integrator

$$\boldsymbol{f_{fn} = \frac{1}{4T_f} = \frac{\pi}{2} f_p}$$

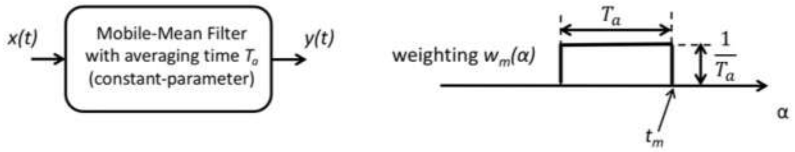
All'esame se abbiamo tempo spieghiamo le formule che abbiamo usato così aumentiamo il voto

12.03.2021 3h di lezione

ACTIVE LOW PASS FILTER (VEDERE SLIDE È SOLO UN ESEMPIO PER FARCI CAPIRE CHE PER NOI L'AMPLIFICAZIONE NON È IMPORTANTE PERCHÉ NOI STUDIAMO OGNI STAGE E L'SNR NON CAMBIA CON L'AMPLIFICAZIONE)

MOBILE - MEAN LOW PASS FILTER

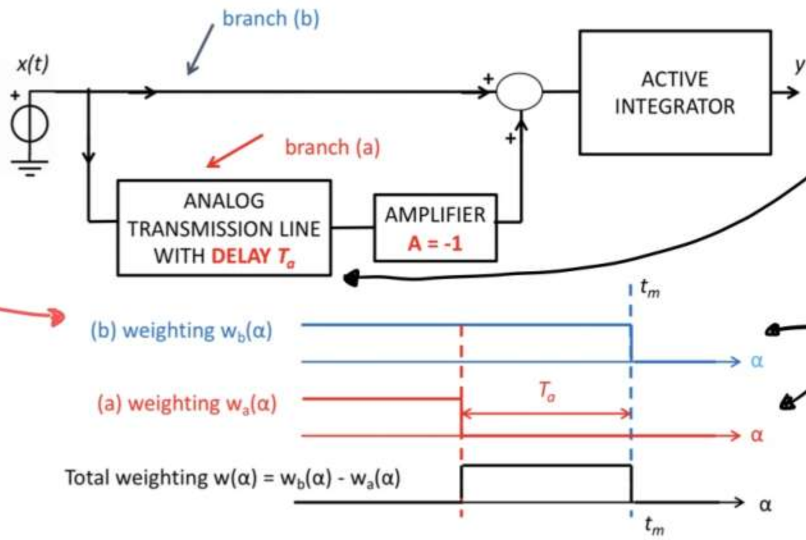
L'idea è di fare una media (credo pure variabile) con un filtro a parametri costanti. (Questo è mostrato dalla funzione peso del filtro che è la stessa per ogni sample e tempo)



Noi vogliamo un rect come funzione peso (se controlliamo notiamo che fa la media)

Non mi è molto chiaro xè la funzione peso del filtro deve essere un rect.

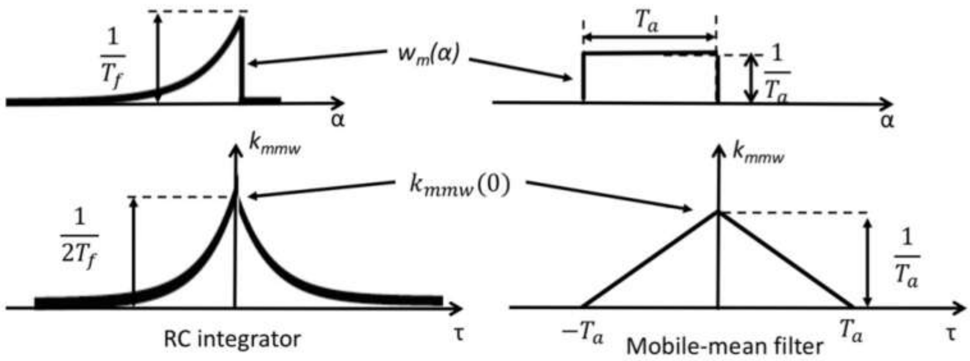
La funzione peso dell'integratore è la risposta del delta ribaltata



Per fare la delay line usiamo un filo molto lungo.

In pratica sono 2 funzioni peso dell'integratore e unendole otteniamo il rect.

COMPARIAMO IL FILTRO RC E QUESTO



ABBIAMO UN AMPLIFICAZIONE 1 SU TUTTI E 2 I FILTRI. POSSIAMO QUINDI CONFRONTARE DIRETTAMENTE I VALORI DEL RUMORE D'USCITA.

PER AVERE QUESTI VALORI CI SERVE IL VALORE IN Ø DELLA AUTOCORRELAZIONE DELLE FUNZIONI PESO.

Signal: the filters have **equal DC gain** (unity) and produce equal output with DC signal in.

Noise: for wide-band input noise the output noise is computed as

$$\overline{y^2} = S_{bB} \cdot k_{mmw}(0) = S_{bB} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_m{}^2(\alpha)\, d\alpha$$

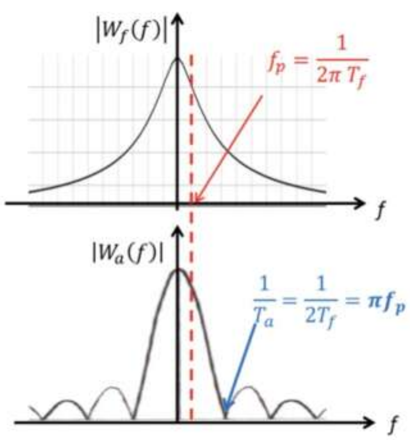
EXAMPLE

therefore, for having **equal output rms noise** it must be

$$\boxed{T_a = 2T_f}$$

SE Ta = 2Tf OTTENIAMO LO STESSO RUMORE TRA I 2 FILTRI. PER QUESTO PRIMA AVEVA DETTO CHE UN FILTRO RC PUÒ ESSERE VISTO COME UN INTEGRATORE SU UN PERIODO DI 2Tf.

LA STESSA COSA PUÒ ESSERE OTTENUTA NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA



RC integrator
with $RC = T_f$

$$|W_f(f)| = |H_f(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f T_f)^2}}$$

Mobile-mean filter
with averaging interval $T_a = 2T_f$
(and unity gain)

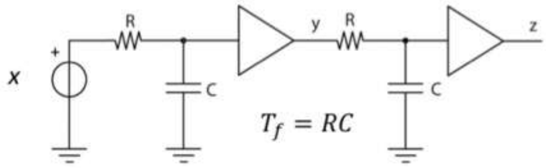
$$|W_a(f)| = |H_a(f)| = \frac{|\sin 2\pi f T_f|}{2\pi f T_f}$$

ATTENZIONE! NEL CASO DEL MOBILE ABBIAMO DEI PUNTI IN CUI LA FUNZIONE PESO È NULLA. QUESTO CI VA MOLTO BENE PERCHÉ SE METTIAMO LO ZERO IN DETERMINATE FREQUENZE DOVE SAPPIAMO CI SONO DISTURBI IN MODO DA ELIMINARLI.

Non possiamo avere un rect nel dominio della frequenza xè ciò significherebbe che nel dominio del tempo la funzione peso sarebbe un sinc, ma il sinc va da $-\infty$ a $+\infty$ e noi sappiamo che una funzione peso prima di tm è Ø quindi non può funzionare.

ESEMPIO

For LPF filters with real poles, it is often easier to compute the noise bandwidth in time-domain rather than in frequency-domain, because it implies simple integrals (of exponentials and powers of *t*). **Example: cascade of two identical RC cells**



$$h(t) = \frac{t}{T_f^{\,2}} e^{-\frac{t}{T_f}}$$

NON SAPPIAMO QUALE SIA $K_{hh}(0)$ PERCIÒ FACCIAMO L'INTEGRALE QUADRO DI $h(t)$

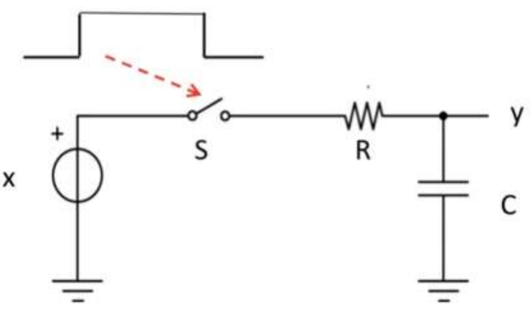
(DOVREBBE ESSERE COME MOLTIPLICARE 2 FILTRI RC DATO CHE SONO IN SERIE)

$$\overline{z^2} = S_{bB} \cdot k_{hh}(0) = S_{bB} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} h(t)^2\, dt = S_{bB} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{T_f^{\,2}}\right)^2 e^{-\frac{2t}{T_f}} dt$$

which integrated by parts gives

$$\overline{z^2} = S_{bB} \cdot \frac{1}{4T_f}$$

SWITCHED - PARAMETER RC LOW-PASS FILTER

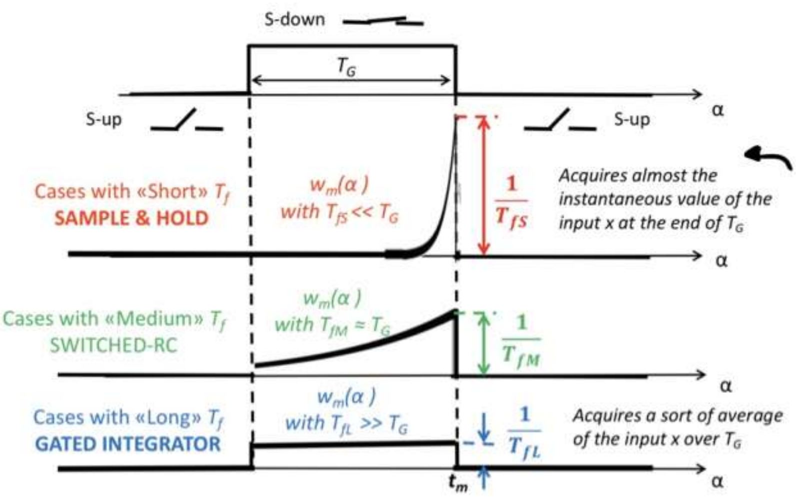


Chiudiamo lo switch solo se abbiamo il segnale. Teniamo aperto lo swith quando non abbiamo il segnale.

Per fare questo abbiamo bisogno di un segnale di sincronizzazione per sapere quando arriva il segnale

CALCOLIAMO LA FUNZIONE PESO

Non so bene cosa sia Tf, credo che sia la τ del filtro RC



L'AREA È 1 PERCHÈ AMPIEZZA * τ = AREA

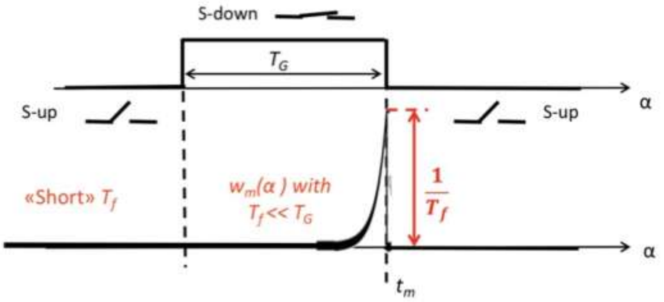
QUI L'AREA NON È 1

NEMMENO QUI L'AREA È 1

CAPIAMO CHE IL RUMORE NON È LO STESSO PER FILTRI DIVERSI XÈ QUI (NON CONSTANT PARAMETER FILTER) L'AMPLIFICAZIONE È DIVERSA.

NOI SIAMO INTERESSATI SOLO AL PRIMO E AL 3° TIPO DI FILTRO

1) SAMPLE AND HOLD



Usiamo il rumore bianco allora il rumore d'uscita è

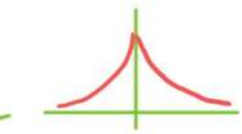
$$\overline{y_n^2} = S_b \cdot \frac{1}{2T_f}$$

il sample and hold ideale è una delta ma nella realtà noi non abbiamo questo perché non possiamo switchare a velocità infinita.

Per studiare il sample and hold possiamo studiare il filtro RC a parametri costanti e poi mettere in fondo uno switch per renderlo non costante

READOUT NOISE

- **READOUT NOISE** of a sampling circuit is the contribution to the output noise due to the internal noise sources in the sampling circuit itself
- In the S&H the main source of readout noise is the wide-band Johnson noise of R with spectral density $S_{bB} = 2kTR$ (bilateral)



Since

$$w(\alpha) = \frac{1}{T_f} e^{-\frac{(t_m-\alpha)}{T_f}} 1(t_m - \alpha) \quad \text{and} \quad k_{ww}(\tau) = \frac{1}{2T_f} e^{-\frac{|\tau|}{T_f}}$$

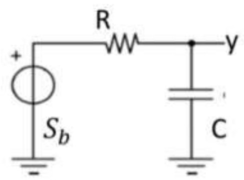
the readout noise is

$$\overline{y_R{}^2} = S_{bB} \cdot k_{ww}(0) = 2kTR \cdot \frac{1}{2T_f} = 2kTR \cdot \frac{1}{2RC}$$

REMEMBER

VISTO CHE IL RUMORE È BIANCO

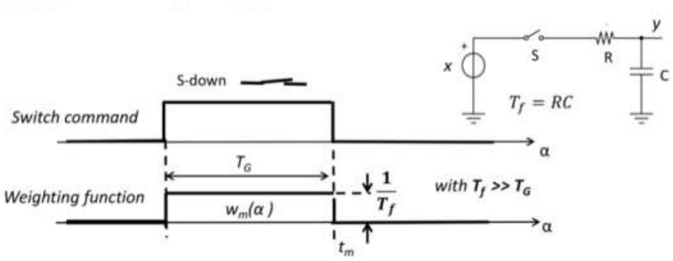
$$\boxed{\overline{y_R^2} = \frac{kT}{C}}$$



this is just the noise generated and self-filtered by a constant parameter RC filter and is INDEPENDENT OF THE R VALUE, in agreement wth the S&H circuit model.

L'SH non è un buon filtro per il rumore perché è wideband (nel dominio della frequenza) questo accade perché la funzione peso e l'autocorrelazione sono molto strette nel tempo.

GATED INTEGRATOR



In questo caso il guadagno non è più 1 è meno

Da notare che abbiamo la stessa forma della funzione peso del caso del mobile mean low pass filter tuttavia qui il guadagno non è 1. Ma noi sappiamo che il rapporto segnale rumore è indipendente dall'ampiezza (se studiamo i blocchi singolarmente).

Allora perchè non usiamo il mobile mean low pass filter? Perchè creare un delay molto lungo con la linea di trasmissione è praticamente impossibile. Tuttavia con il gated integrator ci serve il segnale di sincronizzazione.

ANCHE SE ABBIAMO LA STESSA FORMA DELLE FUNZIONI PESO E DELL'AMPIEZZA ABBIAMO COMUNQUE UNA IMPORTANTE DIFFERENZA, infatti il gated integrator è un filtro a parametri non costanti mentre l'altro è un filtro a parametri costanti. Con il gated integrator non posso mettere in cascata altri filtri analogici perchè in l'uscita di un filtro a parametri costanti l'uscita è sempliata, infatti all'uscita di un gated integrator ho un numero non un segnale.

Questo perchè la funzione peso del filtro (nei filtri a parametri non costanti) dipende da t_m e quindi per ogni t_m ho una funzione peso e in uscita un solo valore.
Nel caso di filtri a parametri costanti la funzione peso è la stessa per ogni t e quindi in uscita ho un segnale.

FILTERING AND S/N ENHANCEMENT BY Greater integrator

Filtering and S/N enhancement by GI

14

INPUT:

- signal x_s constant in T_G (DC signal)
- wide-band noise S_b (bandwidth $f_n >> 1/T_G$ and autocorrelation width $T_n << T_G$)

$$\overline{x_n^2} = S_b 2f_n = S_b/2T_n$$

OUTPUT:

Signal $y_s = x_s \cdot \frac{T_G}{T_f} = x_s G$ i.e. with gain $\boxed{G = \frac{T_G}{T_f} \ll 1}$ ← GUADAGNO

NON HO CAPITO MOLTO XE'

$$\text{Noise} \quad \overline{y_n^2} = S_b \cdot \frac{T_G}{T_f^2} = \frac{S_b}{T_G} \cdot \left(\frac{T_G}{T_f}\right)^2 = \frac{S_b}{T_G} \cdot G^2 =$$

$$= \frac{S_b}{2T_n} \frac{2T_n}{T_G} G^2 = \underbrace{\overline{x_n^2}}_{\text{RUMORE D'INGRESSO}} \cdot \frac{2T_n}{T_G} \cdot G^2$$

Signal-to-noise ratio

SEGNALE USCITA

RUMORE USCITA

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{y_s}{\sqrt{\overline{y_n^2}}} = \frac{x_s \cdot G}{\sqrt{\overline{x_n^2} G^2}} \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}}$$

VERY IMPORTANT

NOTIAMO CHE NON DIPENDE DAL GUADAGNO

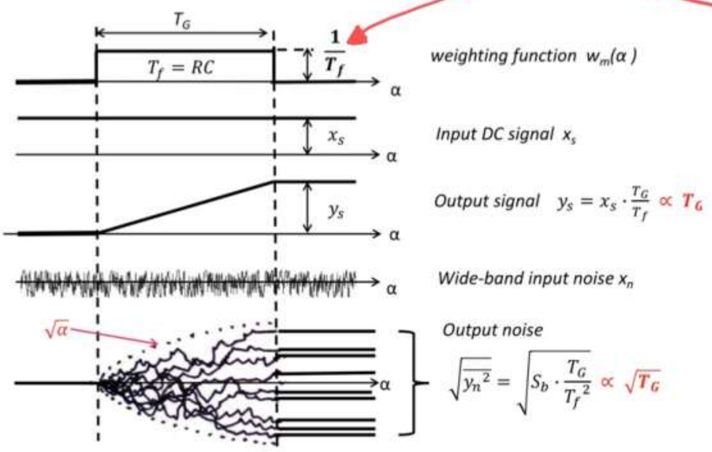
È IL S/R D'INGRESSO

NB: the output signal increases as T_G and the noise as $\sqrt{T_G}$, therefore the S/N increases as the square root of the gate time $\sqrt{T_G}$

Notiamo che riduciamo il rumore per un fattore $\sqrt{\frac{T_G}{2T_n}}$

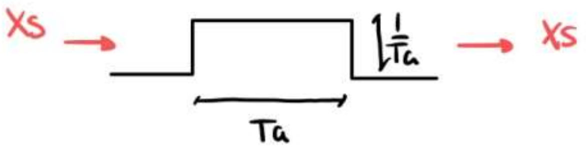
GUADAGNO = $\frac{T_G}{T_f}$

↓ COSA IMPORTANTE E DIFFICILE DA CAPIRE



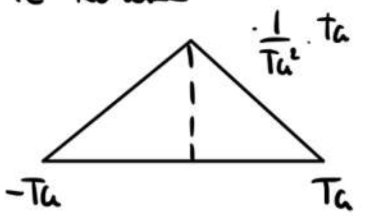
Se fissiamo l'ampiezza e variamo Ta notiamo che variamo il guadagno.
Aumentando Ta aumentiamo ciò che andiamo ad integrale e quindi prendiamo più segnale ma anche più rumore.
Comunque a noi ci va bene prendere un Ta grande perché il rumore aumenta proporzionalmente a $\sqrt{T_G}$ mentre il segnale cresce in proporzione a Ta.
(non chiarissimo)

ESEMPIO



Se Xs segnale d'ingresso e guadagno = 1 allora in uscita ho Xs.

FACCIAMO IL RUMORE



$$\overline{y^2} = S_B \cdot K_{ww}(0) = S_B \cdot \frac{1}{T_G}$$

POI FACCIO L'SNR E OTTENGO CHE (... ME LO SONO PERSO)

Gated integrator compared to LPF

Fair comparison between different LPF with different DC gain G can be made by considering the value of the **filtered noise referred to the input** of the filter (and the input signal). This is equivalent to consider the **output with unity DC gain** (if necessary, by considering to add further gain stages).
For a GI this noise is

$$\left(\overline{x_n^2}\right)_{GI} = \frac{\left(\overline{y_n^2}\right)_{GI}}{G^2} = \frac{S_b}{T_G}$$

For a constant-parameter RC (inherently with G=1) that filters the same wide-band noise S_b it is

$$\left(\overline{x_n^2}\right)_{RC} = \left(\overline{y_n^2}\right)_{RC} = \frac{S_b}{2RC}$$

Therefore, as concerns the S/N obtained for input DC signals accompanied by wide-band noise, GI and RC integrator are equivalent if

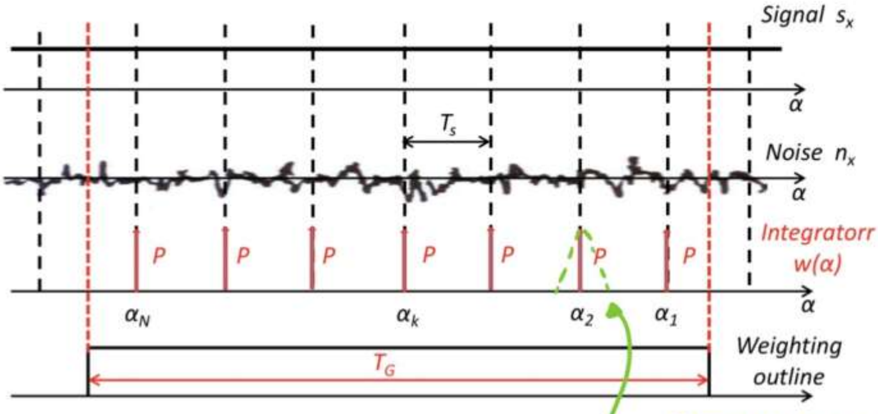
$$T_G = 2RC$$

Proviamo poi a comparare un Filtro RC con un Gated Integrator con Ta = 2RC e un piccolo amplificatore per avere guadagno a 1.
Poi plottiamo le 2 funzioni peso al quadrato e notiamo che sono molto simili e capiamo come possiamo ottenere le stesse soluzioni. (Vedere slide per vedere grafici e capire)

16.03.2021 2h

DISCRETE-TIME INTEGRATOR

Vogliamo creare un filtro discreto a partire dal gated integrator che è continuo.
Dobbiamo prendere molti campioni tutti allo stesso peso



- Ogni campione ogni T_s
- Che la larghezza dell'autocorrelazione $2T_n \ll T_s$

P: Ampiezza
N: Numero campioni

USIAMO IL RUMORE BIANCO

Nel gated integrator sappiamo che il rapporto segnale rumore è $\propto \sqrt{T_G}$

(NON HO CAPITO XE' N)

The **output signal** is

$$s_y = N \cdot P s_x \quad \text{(that is, the DC gain is } G = N \cdot P\text{)}$$

DOVREBBE ESSERE IL CAMPIONE

POSSIAMO SCEGLIERE UN P CHE CI DIA G = 1, OTTENIAMO LO STESSO RISULTATO MA CONFRONTIAMO SOLO I RUMORI.

The **output noise** is $n_y = \sum_{k=1}^{N} P \cdot n_{xk}$ and

$$\overline{n_y^2} = P^2\overline{(n_{x1}^2 + n_{x2}^2 \ldots + n_{x1}n_{x2} + \cdots)} = P^2(\overline{n_{x1}^2} + \overline{n_{x2}^2} + \ldots + \overline{n_{x1}n_{x2}} + \cdots)$$

The noise samples are not correlated

Questo xe' $2T_n \ll T_s$

$$\overline{n_{x1}n_{x2}} = \overline{n_{x2}n_{x3}} = \cdots = 0$$

and the noise is stationary $\overline{n_{x1}^2} = \overline{n_{x2}^2} = \cdots = \overline{n_x^2}$

Therefore

$$\overline{n_y^2} = N \cdot P^2 \overline{n_x^2}$$

By summing N samples the signal is increased by N and the rms noise by $\sqrt{N}$
The SNR is thus improved by the factor $\sqrt{N}$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{s_y}{\sqrt{\overline{n_y^2}}} = \frac{N \cdot P s_x}{\sqrt{N \cdot P^2 \overline{n_x^2}}} = \sqrt{N} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_x$$

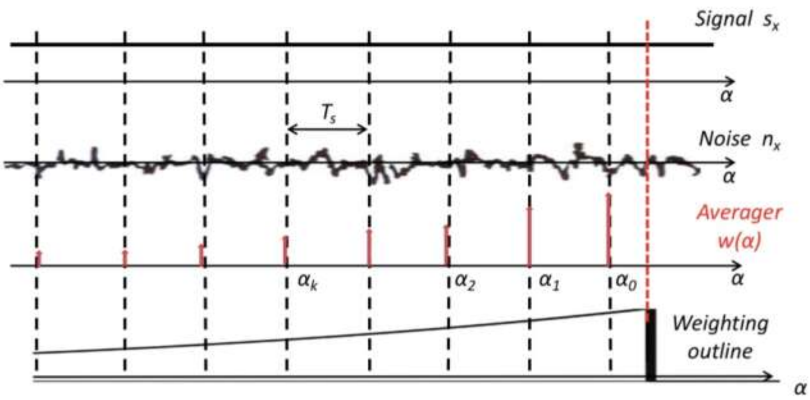
REMEMBER

IL RUMORE CRESCE CON LA RADICE QUADRATA DI N

FILTRO RC DISCRETO

Facciamo la stessa cosa soltanto che qui i campioni seguono l'andamento della funzione peso del filtro RC continuo.

Cosa succede se il segnale Sx non è costante ma ad esempio è un esponenziale adesso?



- Samples are taken with sampling frequency $f_s=1/T_s$ i.e. at intervals T_s
- Input: DC-signal s_x and wide-band noise n_x (autocorrelation width $2T_n << T_s$) ← VOGLIAMO ANCORA CAMPIONI NON CORRELATI
- **The sample weight slowly decays with the sample «age»: $w_k = Pr^k$ with $(1-r) << 1$** → IMPONIAMO COSÌ

- OUTPUT SIGNAL

$$S_y = S_x \cdot P \cdot \sum_{k=0}^{\infty} r^k = S_x \cdot P \cdot \frac{1}{1-r}$$

il guadagno quindi è $G = P \cdot \frac{1}{1-r}$

è $S_x \cdot$ somma di tutti i campioni

- NOISE

$$\overline{n_y^2} = P^2\left(\overline{n_{x0}^2} + r^2 \cdot \overline{n_{x1}^2} + \cdots + r^{2k} \cdot \overline{n_{xk}^2} + \cdots + r^k r^j \cdot \overline{n_{xk} n_{xj}} + \cdots\right)$$

The noise samples are not correlated ($\overline{n_{xk} n_{xj}} = 0$ for $k \neq j$) ← IMPOSTO PRIMA ($2T_n << T_s$)

and the noise is stationary ($\overline{n_{x0}^2} = \overline{n_{x1}^2} = \cdots = \overline{n_x^2}$)

Therefore

$$\overline{n_y^2} = \overline{n_x^2} \cdot P^2 \left(1 + r^2 + \ldots + r^{2k} + \ldots\right) = \overline{n_x^2} \cdot P^2 \cdot \frac{1}{1-r^2}$$

The SNR is thus improved to

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \frac{s_y}{\sqrt{\overline{n_y^2}}} = \frac{Ps_x}{1-r} \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\overline{n_x^2} P^2}{1-r^2}}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}$$

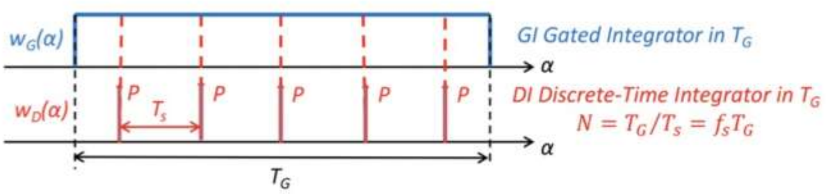
← FORMULA GENERALE

But the attenuation ratio r is very close to unity ($1-r) << 1$ hence ($1+r) \approx 2$ and therefore

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y \cong \left(\frac{S}{N}\right)_x \sqrt{\frac{2}{1-r}}$$

X NOI NON È IMPORTANTE SAPERE LE FORMULE MA CAPIRE COME RICAVARLE.

GATED INTEGRATOR VS. DISCRETE TIME INTEGRATOR



Prendiamo sempre $2T_n << T_s$ e ricordiamo che nel caso di autocorrelazione a triangolo

$$\overline{n_x^2} = S_b 2f_n = S_b/2T_n$$

- Supponiamo che il guadagno di entrambi sia 1 $S_y = S_x$

PERCIÒ L'ATTENUAZIONE DEL RUMORE NEI 2 SARÀ

- Noise reduction by GI $\sqrt{\overline{n_{yG}^2}} = \sqrt{\overline{n_x^2}} \Big/ \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}}$
- Noise reduction by DI $\sqrt{\overline{n_{yD}^2}} = \sqrt{\overline{n_x^2}} \,/\, \sqrt{N}$

Possiamo rendere il rapporto segnale rumore di DI migliore di quello del GI solo aumentando N? NO, perché dovremmo ridurre Ts e non varrebbe più la regola $2T_n << T_s$ e i campioni iniziano ad essere correlati.

In ogni caso: Abbiamo comunque un miglioramento del segnale rumore ma non più di $\sqrt{N}$. Chiaramente più aumentiamo N più l'SNR migliora ma la matematica si complica.

Si nota che $(SNR)_{DI} \le (SNR)_{GI}$ con $(SNR)_{DI} \to (SNR)_{GI}$ con $N \to +\infty$

E QUESTO È DIMOSTRABILE IN 2 MODI [1 NEL DOMINIO DEL TEMPO E 1 NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA]

- Dominio del tempo

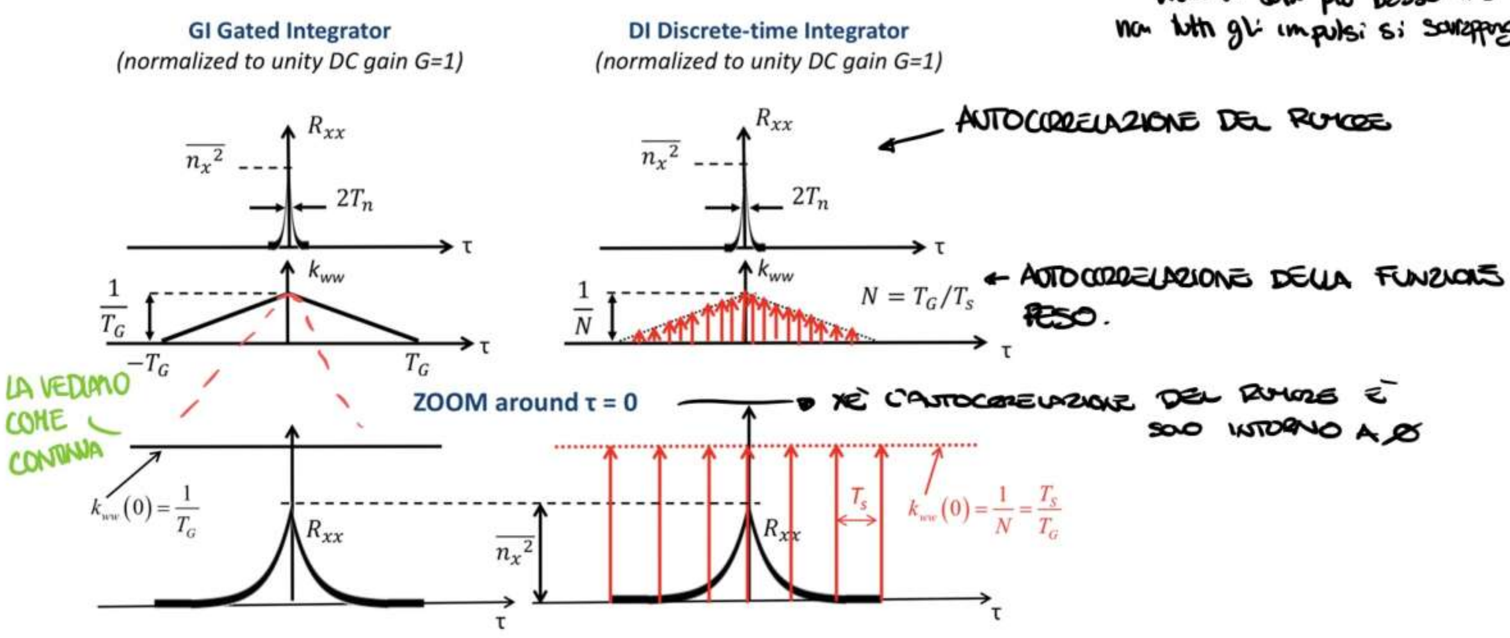
Sempre supponiamo guadagno 1 così dobbiamo studiare solo il rumore

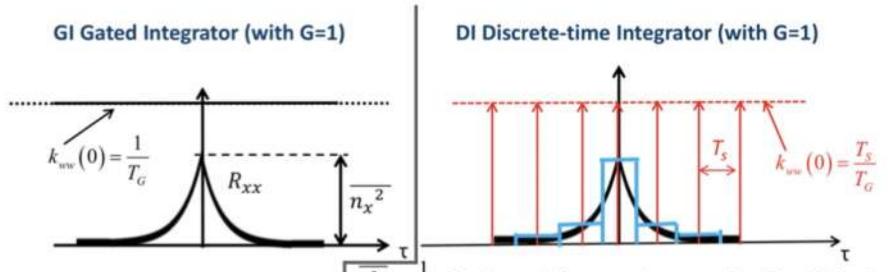
In questo caso studiamo il caso in cui i campioni non sono più non correlati.

l'autocorrelazione del treno di delta che altro non sarebbe la funzione del GI discreto è:

Ci viene questo perché moltiplicando i 2 segnali e facendo l'integrale ci viene delta in ∅ mentre dalle altre parti ci viene un delta più basso xè non tutti gli impulsi si sovrappongono.

PERCIÒ AVREMO CHE





$$\overline{n_{yD}^2} = \frac{1}{T_G} \cdot T_S \cdot (\text{sum of } R_{xx} \text{ samples at } \tau = 0; \pm T_S; \pm 2T_S; ....)$$

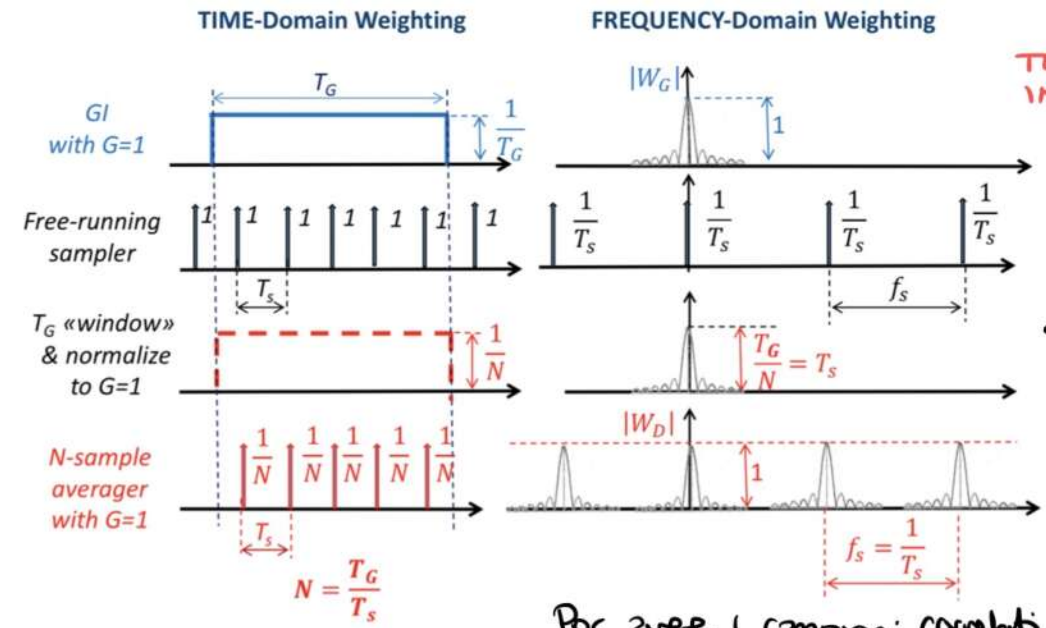
$$\boxed{\overline{n_{yG}^2} = \frac{1}{T_G} \cdot (\text{area of } R_{xx})} \qquad \boxed{\overline{n_{yD}^2} = \frac{1}{T_G} \cdot (\text{area of the scaloid that approximates } R_{xx})}$$

Sarebbe l'autocorrelazione del rumore per l'autocorrelazione della funzione filtro e poi integrata. Solo che x noi l'autocorrelazione del filtro è costante e perciò ci viene questo

The scaloid area is greater than the R_{xx} area, therefore (DIMOSTRABILE MA NON CI FREGA)

$$\boxed{\overline{n_{yD}^2} \geq \overline{n_{yG}^2} = \overline{n_x^2} \cdot \frac{2T_n}{T_G}} \quad \text{with} \quad \boxed{\overline{n_{yD}^2} \to \overline{n_{yG}^2} \quad as \quad T_S \to 0}$$

- Dominio della Frequenza



TRASFORMATA DEL GATED INTEGRATOR

NUMERO INFINITO DI DELTA CHE POI MOLTIPLICHIAMO PER UN RECT PER OTTENERE IL RECT CAMPIONATO

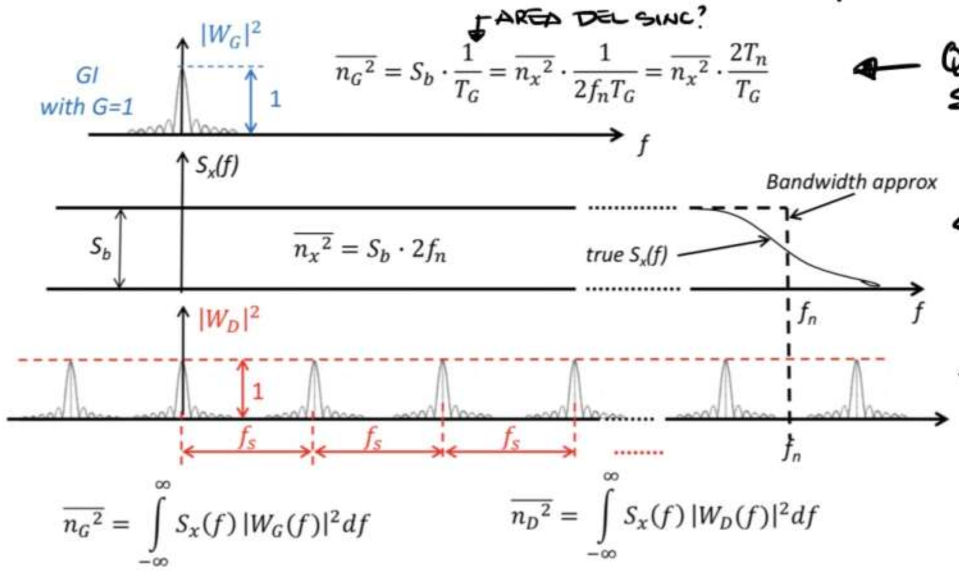
RISULTATO DEL DISCRETE TIME INTEGRATOR

Per avere i campioni correlati dobbiamo ridurre Ts

AREA DEL SINC?

$$\overline{n_G^2} = S_b \cdot \frac{1}{T_G} = \overline{n_x^2} \cdot \frac{1}{2f_n T_G} = \overline{n_x^2} \cdot \frac{2T_n}{T_G}$$

Qui FACCIAMO L'AREA DI UN SOLO SINC



Spettro del rumore bianco?

Qui FACCIAMO L'AREA DI TUTTI I SINC e quindi per forza l'area e quindi il rumore è più grande. Più riduciamo Ts più fs aumenta e quindi i sinc escono dalla banda del rumore bianco

$$\overline{n_G^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,|W_G(f)|^2 df \qquad \overline{n_D^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,|W_D(f)|^2 df$$

The figure illustrates how the output noise $\overline{n_D^2}$ is reduced and S/N is enhanced by increasing the sampling frequency f_s (for a given averaging time T_G)

Notiamo che dobbiamo andare a $f_s \to +\infty$ e non basta far uscire tutti i sinc dal rect del rumore bianco perché la coda del sinc è $+\infty$ e quindi avremmo qualcosa che dà l'area.

IN GENERALE

a) As long as $f_s \ll f_n$:

- the noise samples are uncorrelated
- each line of $|W_D|^2$ is identical to $|W_G|^2$ of the GI (with same DC gain G=1)
- a high number N_L of lines of $|W_D|^2$ falls within the noise bandwidth $2f_n$
- the output noise of the DI is N_L times that of the GI

$$\overline{n_D{}^2} = \overline{n_G{}^2} \cdot N_L$$

With good approximation it is

$$N_L \cong 2f_n/f_s$$

and it is confirmed that for uncorrelated samples the S/N increases as $\sqrt{N}$

$$\overline{n_D{}^2} = \overline{n_x{}^2} \cdot \frac{1}{T_G f_s} = \frac{\overline{n_x{}^2}}{N}$$

b) When f_s becomes comparable to f_n or higher

- the previous result is no more valid.
- the output noise must be computed with the actual noise spectrum

$$\overline{n_D{}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)\,|W_D(f)|^2 df \geq \overline{n_G{}^2}$$

Formula vista in precedenza che dobbiamo ricordare.

- The figure shows that $\overline{n_D{}^2}$ is always higher than $\overline{n_G{}^2}$ and attains it for $f_s \to \infty$

$$\lim_{f_s \to \infty} \overline{n_D{}^2} = \overline{n_G{}^2}$$

18.03.2021 — ESERCITAZIONE — 3h

RICHIAMI DI TEORIA

- Descrizione di un segnale (Può essere descritto nel tempo $x(t)$ e $X(f)$)

AUTOCORRELAZIONE DEL SEGNALE $K_{xx}(\tau)$ $\quad \left[R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df\right]$

ENERGY SPECTRUM $\quad S_x(f) = \mathcal{F}[R_{xx}(\tau)]$

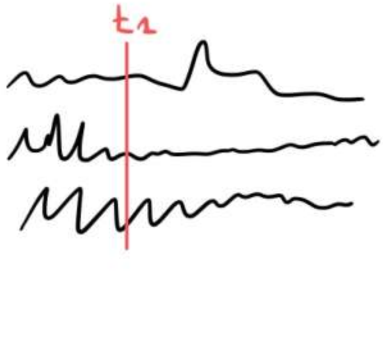
- Descrizione del rumore

Probabilità unilatera $p(x)dx$

Probabilità congiunta $p(x_1, x_2, t_1, t_2)dx$

- Momenti del secondo ordine

$\sigma^2(t_1)$



Funzione di autocorrelazione del rumore

$R_{xx}(t_1, \tau)$

ABBIAMO LO SPETTRO CHE È SEMPRE UNICO $S_x(f)$

$S_x(f) = \mathcal{F}[\langle R_{xx}(t,\tau)\rangle]$ $\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df = \langle \sigma^2 \rangle$

- SE IL RUMORE È STAZIONARIO ALLORA: $\sigma^2, R_{xx}(\tau)$ non dipendono più da t

quindi $S_x(f) = \mathcal{F}[R_{xx}(\tau)]$ $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,df$

FORMULE SUL FILTRAGGIO

- Filtrare un segnale

in tempo continuo $y(t) = \int_{-\infty}^{t_m} x(\alpha)\, w(\alpha)\, d\alpha$

se ho un filtro a parametri costanti sappiamo che la funzione peso è $w(\alpha) = h(t_m - \alpha)$

- Filtrare il rumore (con input come segnale stazionario)

$$R_{yy}(t_1, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\gamma)\, K_{12w}(\gamma)\, d\gamma$$

Cross correlazione della funzione peso tra t_1 e $t_1 + \tau$.

$$\sigma_y^2(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\gamma)\, K_{11}(\gamma)\, d\gamma$$ OPPURE $$\sigma_y^2(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\,|W_1(f)|^2\, df$$ (credo che il prof le abbia chiamate $\overline{y^2}$)

Se abbiamo un filtro a parametri costanti

$w(\alpha) = h(t_m - \alpha)$ e anche che $|W(f)|^2 = |H(f)|^2$

perciò $S_y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$

sigma del rumore è importante perché se abbiamo una probabilità gaussiana allora sappiamo che tutto il rumore sta in $\pm 3\sigma$

LOW PASS FILTER

1) Avere una rete RC passiva, in questo caso la delta response è $h(t) = \frac{1}{T_F} e^{-\frac{t}{T_F}}$ con $T_F = RC$.

2) Filtro passa basso attivo, con una rete RC e un op-amp, allora la risposta all'impulso ho la stessa forma ma un guadagno (che non cambia l'SNR)

$$h(t) = \frac{G}{T_F} e^{-t/T_F}$$

esempio per far vedere che il guadagno non fa variare l'SNR.

- Input = segnale costante $x(t) = B$

- Input : stationary white noise S_u (unilateral spectral density costante)

Facciamo l'SNR con i 2 Filtri

1) LPF passivo

SEGNALE DI OUTPUT $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} B \cdot \frac{1}{T_F} e^{-\frac{(t_m-\alpha)}{T_F}} d\alpha = B \cdot \frac{1}{T_F} \cdot T_F = B$

RUMORE D'USCITA $N = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u}{2} \cdot \frac{1}{1+(2\pi f T_F)^2} df}$

Per avere lo spettro bilaterale

Ricordiamo che

$\frac{d}{dx} \operatorname{atan}(x) = \frac{1}{1+x^2}$

$\operatorname{atan}(\pm\infty) = \pm\frac{\pi}{2}$

$= \sqrt{\frac{S_u}{2} \cdot \frac{1}{2\pi T_F} \cdot \pi} = \sqrt{\frac{S_u}{2} \cdot \frac{1}{2T_F}}$

IL MINIMO SEGNALE RILEVABILE È QUELLO CHE DA SNR = 1 (è una Definizione)

Quindi otteniamo che nel filtro passivo $SNR = B \Big/ \sqrt{\frac{S_u}{2} \cdot \frac{1}{2T_F}}$

2) CASO DEL LPF ATTIVO.

$S = G \cdot B$ ← il segnale amplificato

$N = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u}{2} \cdot \frac{G^2}{1+(2\pi f T_F)^2} df} = \sqrt{\frac{S_u}{2} \cdot \frac{G^2}{2T_F}}$

Ma l'SNR non cambia!!!

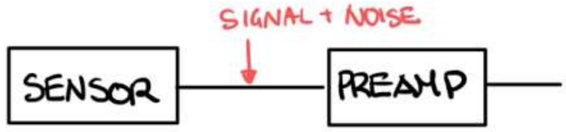
TESTO D'ESAME

A sensor is connected to a preamplifier featuring a wide bandwidth, limited by a single pole at f_S=100kHz. The acquisition system provides a single pulse with a known shape and the pulse amplitude V_P is to be measured. An auxiliary synchronism signal is available, which points out the arrival time of the signal. The noise coming with the signal features a uniform **unilateral** spectral density equal to $\sqrt{S_{N,U}}$ = 10nV/√Hz and a wide band, limited by the preamplifier.

Consider the following two cases:

- rectangular signal with a pulse duration T_P=10ms
- exponential signal $V_P1(t)e^{-(t/T_P)}$, with T_P=10ms

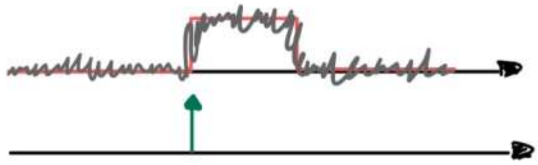
For both cases:



$f_s = 100\,KHz$

A noi ci interessa solo l'ampiezza e non la forma del segnale (Possiamo rompere anche la forma del segnale)

Abbiamo anche un segnale di sinc per sapere dove inizia il segnale



a) Evaluate the minimum measurable amplitude for each pulse without any filtering, i.e. measured directly at the preamp output.

Come abbiamo detto prima il segnale minimo misurabile è quello con SNR = 1

Vedendo le bande del segnale capiamo che il preamplificatore non ha alcuna azione filtrante sul nostro segnale.
Supponiamo che il preamplificatore abbia guadagno unitario (G = 1)

Dobbiamo misurare il segnale al suo massimo che è il punto in cui abbiamo il rapporto segnale rumore massimo (cioè VP per tutti e 2 i segnali)

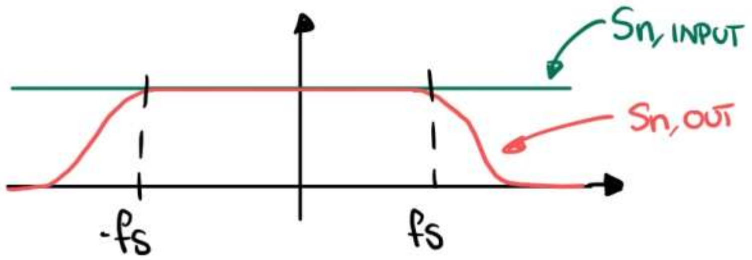
Visto che il Pre-amp ha 1 solo polo possiamo vederlo come un filtro RC e perciò possiamo calcolare il rumore come nel filtro passabasso (all'esame qui sono da fare tutti i passaggi perché sono molto facili)

SAPPIAMO CHE $G_P = 1$ e ABBIAMO UN POLO A f_s

LO SPETTRO IN USCITA È LIMITATO DAL POLO

VISTO CHE $G = 1$ allora

$S_{n,out}(0) = S_{n,in}(0)$



E QUINDI IL RUMORE SARÀ

$$N = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{n,out}(f)\,df} = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_u}{2} \cdot \frac{1}{1 + \left(2\pi f \cdot \frac{1}{2\pi f_s}\right)^2}}$$

è risolviamo (dovrebbe venire la stessa formula di prima)

$$= \sqrt{S_{n,u} \cdot \frac{\pi}{2} f_s}$$

Notiamo quindi che il pre-amp fa da filtro per il rumore

infatti il rapporto segnale rumore sarà

$$\frac{S}{N} = \frac{V_P}{\sqrt{S_{n,u} \cdot \pi/2 \, f_s}} \rightarrow \text{Noi vogliamo } \frac{S}{N} = 1$$

Vale per tutti e 2 i segnali visto che in tutti e 2 misuriamo Vp PER QUANTO DETTO PRIMA SUL PUNTO MASSIMO DEL SEGNALE E L'SNR

$$\text{Quindi } V_{P,min} = 10\,nV/\sqrt{Hz} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} 100\,KHz} = 3{,}96\,\mu V$$

b) Select an **analog** filter to improve the sensitivity of the measurement setup, i.e. a **lower** value of the minimum signal that can be measured. The filter can be different in the two cases. Explain in detail the guidelines to optimize the selection of filter parameters. Select the filter parameters for maximizing the Signal-to-Noise ratio (S/N) and evaluate the minimum measurable amplitude $V_{P,min}$.

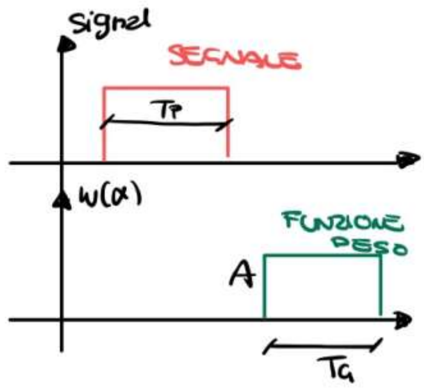
PER ORA NOI CONOSCIAMO SOLO I FILTRI PASSABASSO E DI QUESTI QUELLI ANALOGICI SONO

- GATED INTEGRATOR → (Può essere usato perchè usa il segnale di sincronizzazione)
- MOBILE MEAN FILTER → Non va bene perchè avere una delay line di 10mS è impossibile da realizzare
- RC-LPF → Usabile

ABBIAMO 4 CASI IL GI con tutti e 2 i segnali e i 2 segnali con l'RC. (Vediamo qual'è migliore)

• • • • • • • •

1) Rect e Gated Integrator



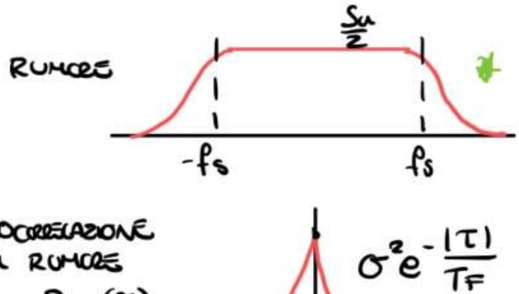
Dove metto la mia funzione peso?

La metto nel punto in cui mi da il massimo segnale (nel senso di quanto tempo deve essere shiftata)

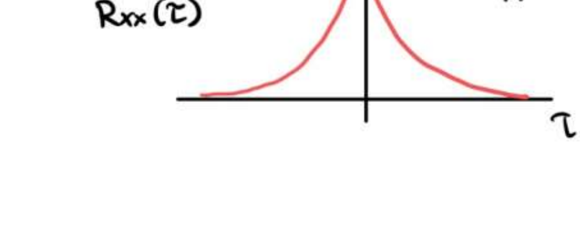
Se metto la funzione peso in un posto dove non interseca il segnale ottengo il segnale nullo.

Sappiamo che il segnale è $S = A \cdot V_P \cdot T_a$ CON $0 \leq T_a \leq T_P$ quindi con la funzione peso dentro il segnale.

-RUMORE

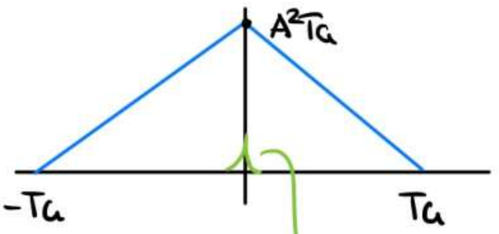


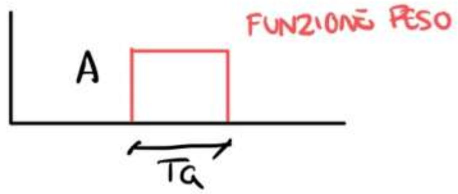
$$T_F = \frac{1}{2\pi f_s} = 1{,}59\,\mu s$$



$$\sigma^2_{OUT,P} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) \cdot K_{n_w}(\tau)\, d\tau$$

L'autocorrelazione della funzione peso della funzione peso è un triangolo con valore in zero pari a $A^2 T_G$





Questa è l'autocorrelazione del rumore (è molto più piccola del segnale, quasi una delta)

Allora possiamo approssimare l'integrale con il valore di $K_{nw}(0)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)\, K_{nw}(\tau)\, d\tau \simeq K_{nw}(0) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau)\, d\tau}_{} = A^2 T_G \cdot \frac{S_u}{2}$$

è il valore in zero dello spettro del rumore

Quindi il rapporto segnale rumore è

$$SNR = \frac{A \cdot V_p \cdot T_G}{\sqrt{A^2 \cdot T_G \cdot \frac{S_u}{2}}} = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_u}{2}}} \sqrt{T_G}$$

QUINDI

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{MAX} \text{ è per } T_G = T_P \longrightarrow V_{P_{MIN}} = 70{,}7\,mV$$

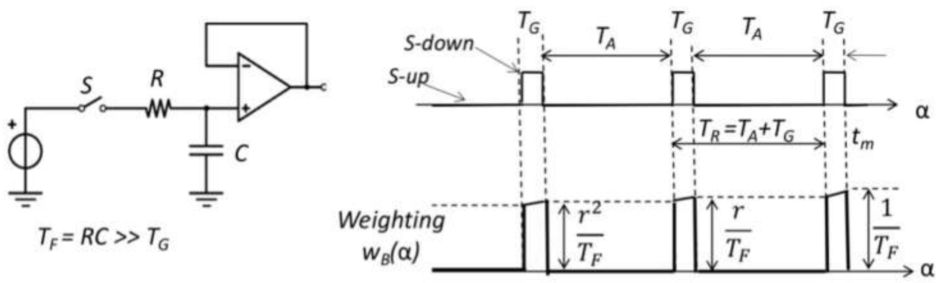
XO non ha senso prendere $T_G = T_P$ come abbiamo detto prima, altrimenti prenderemo solo rumore.

19.03.2021

3a Lezione

BOXCAR INTEGRATOR

è un mix di tutti i filtri visti prima



È come un GI solo con un ipotesi in meno, infatti nel GI ipotizzavamo che prima di integrare avevamo ∅ carica nel condensatore.
Qui togliamo questa ipotesi.

NOTIAMO SUBITO CHE È UN FILTRO A PARAMETRI NON COSTANTI, QUINDI CI SERVE UN SEGNALE DI SINCRONIZZAZIONE

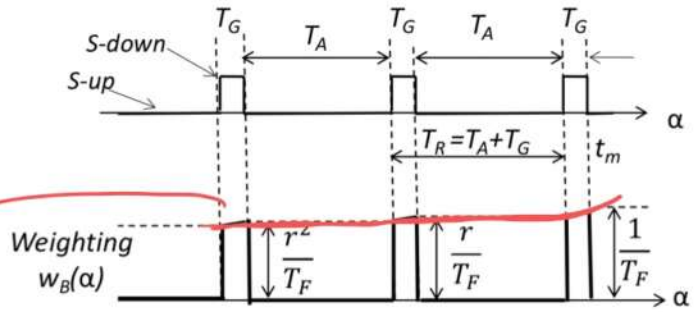
NOTIAMO CHE IPOTIZZIAMO $T_F = RC >> T_G$

NOTIAMO CHE LA PRIMA VOLTA CHE chiudiamo lo switch ho lo stesso comportamento di un GI, visto che il condensatore è scarico.
Successivamente il condensatore si scaricherà di poco ogni volta che chiudiamo il switch.

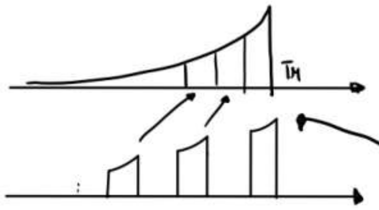
In pratica la prima volta la funzione peso ha ampiezza $1/T_F$ e poi questa va a calare come

$$r = e^{-\frac{T_A}{T_F}}$$

CALA come questa



L'area della funzione peso è 1 xè

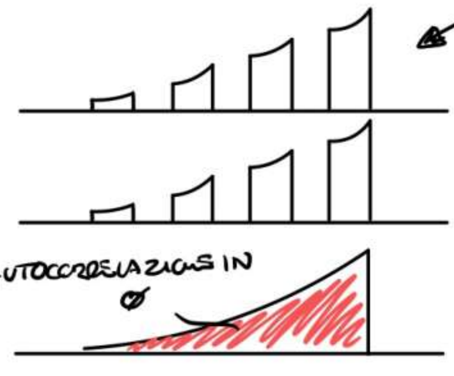


Notiamo che è la stessa area dell'esponenziale e quindi viene 1

Tempo quando chiudiamo l'interruttore, questa è la funzione peso e quindi il "tempo è catturato".

Se prendiamo la funzione peso del filtro notiamo che non è quella dell'RC ma quando facciamo la autocorrelazione in ∅ otteniamo un risultato ≠ 0 solo quando ho lo switch chiuso. Notiamo che è come fare l'autocorrelazione in ∅ del filtro RC (solo quella in ∅)

Facciamo l'autocorrelazione in ∅, quindi non ho traslazione, moltiplichiamo e integriamo e ci viene l'integrale dell'esponenziale



Calcoliamo poi il rumore d'uscita

The input wide-band noise S_b with bandwidth $2f_n$, autocorrelation width $2T_n$, has mean square value

$$\overline{n_x^2} = S_b \cdot \frac{1}{2T_n}$$

The BI output noise is

$$\overline{n_y^2} = S_b \cdot k_{wwB}(0) = S_b \cdot 1/2T_F = \overline{n_x^2} \cdot \frac{T_n}{T_F}$$

Therefore, since BI has G=1 the S/N enhancement is

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_F}{T_n}}$$

RICORDIAMO CHE IL segnale d'uscita = segnale ingresso perché G=1

IL SNR non dipende dal rate dei campioni perché è ottenuto facendo la media attraverso ad un numero dato e non attraverso a un dato intervallo di tempo

In pratica noi quando chiudiamo lo switch abbiamo un GI e sappiamo che in uscita dal GI abbiamo un numero. In pratica ogni volta che chiudiamo lo switch abbiamo un numero che noi "pesiamo" come un esponenziale decrescente e poi facciamo tipo la media di questi campioni

The BI is equivalent to the cascade of two filtering stages

a) Acquisition of samples by a GI with same T_G and T_F as the BI, which enhances the S/N by the factor

$$\sqrt{T_G/2T_n}$$

← SNR del Gated Integrator

b) Exponential averaging of the samples with attenuation ratio

$$r = e^{-T_G/T_F} \cong 1 - T_G/T_F$$

which enhances the S/N by the factor

$$\sqrt{(1+r)/(1-r)} \cong \sqrt{2/(1-r)} = \sqrt{2T_F/T_G}$$

← SNR di quello che fa la media

NB: this factor is INDEPENDENT of the RATE of samples, because the AVERAGE IS DONE ON A GIVEN NUMBER OF SAMPLES and not on a given time.

The S/N enhancement is thus confirmed and clarified

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} \cdot \sqrt{\frac{2T_F}{T_G}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_F}{T_n}}$$

← SNR TOTALE = moltiplicazione dei 2 SNR

e otteniamo lo stesso valore di prima.

DOMANDA: Perché abbiamo l'esponential averaging? se usassimo la stessa ampiezza cioè un GI andrebbe meglio perché prendiamo più segnale e l'SNR sarebbe migliore? Allora perché esiste il BI?

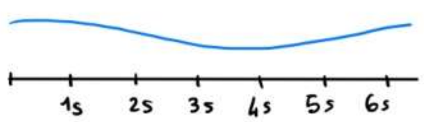
Se usiamo un GI diamo lo stesso peso a qualcosa successo nel passato e qualcosa vicino a tm. Nel BI tramite la funzione peso a esponenziale noi diamo più peso alle cose successe vicino a tm rispetto a quelle del passato.

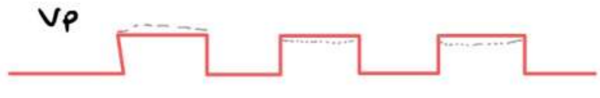
Questo va bene nella vita perché il mio segnale nella realtà non ha ampiezza fissa nel tempo (pensiamo al rect) ma potrebbe fluttuare lentamente in ampiezza

Tipo

SEGNALE CHE CAMBIA MOLTO LENTAMENTE

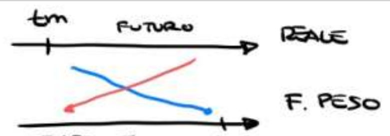
AMPIEZZA Vp





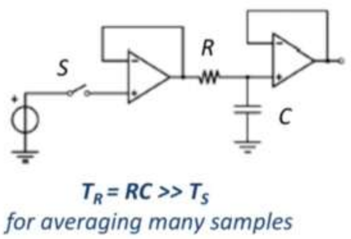
In pratica noi prendiamo il valore a tm e vogliamo sapere l'ampiezza a tm ma non possiamo valutare i segnali del passato allo stesso modo di quelli di tm perché sappiamo che l'ampiezza varia lentamente, quindi valutiamo meno i segnali del passato (e li pesiamo come un esponenziale, facciamo questo xè creare un esponenziale è molto facile).

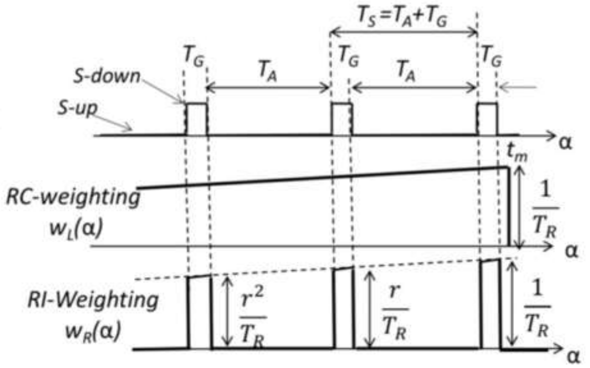
QUI PARLO DI PASSATO, MA CREDO INTENDA QUELLO DELLA FUNZIONE PESO. QUINDI IN REALTÀ È IL FUTURO



RATEMETER INTEGRATOR (RI)

Partiamo dal BI ma aggiungiamo il buffer dopo lo switch, così il condensatore si può scaricare anche quando S è aperto





La funzione peso è simile a quella vista prima

In questo caso però r cambia visto che il condensatore si può scaricare sempre

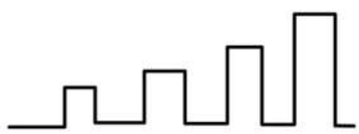
$$r = e^{-(T_G+T_A)/T_F} = e^{-T_S/T_F}$$

VISTO CHE qui non "prendiamo" tutti i pezzi dell'esponenziale notiamo che l'area e quindi il guadagno non è 1.

Per calcolare l'area possiamo considerare piatta la parte che campioniamo e sommare le aree di questi rettangoli

- The **DC gain is G < 1** (the RC filter has G=1, but it receives just a fraction of the input!)
- With $T_R >> T_S$ the DC gain G is proportional to the sample rate $f_S = 1/T_S$

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} w_R(\alpha)d\alpha \cong \frac{T_G}{T_S} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_L(\alpha)d\alpha \cong \frac{T_G}{T_S} = f_S \cdot T_G$$



Lo vediamo così ↑

NB: if the input signal amplitude x_S is constant but f_S varies, the output signal y_S varies. In fact, the circuit is also employed as **analog ratemeter**: with constant input voltage x_S it produces a quasi DC output signal proportional to the repetition rate f_S

E come calcoliamo l'autocorrelazione in ∅ adesso? Sarebbe molto complesso.

Ma noi sappiamo che SNR finale è la moltiplicazione delle componenti, Gated Integrator e exponential averaging. In questo caso avremo un diverso tipo di exponential averaging.

a) Acquisition of samples by a GI with same T_G and T_F as the RI, which enhances the S/N by the factor

$$\sqrt{T_G/2T_n}$$

b) Exponential averaging of the samples with attenuation ratio

$$r = e^{-T_S/T_R} \cong 1 - T_S/T_R$$

which enhances the S/N by the factor

$$\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \cong \sqrt{\frac{2}{1-r}} = \sqrt{\frac{2T_R}{T_S}} = \sqrt{2T_R f_S}$$

NB: this factor DEPENDS on the sample RATE f_S because the AVERAGE IS DONE ON A GIVEN TIME and not on a given number of samples. The weight reduction is below 1/100 for samples that at the measurement time t_m are «older» than $4.6 \cdot T_R$

The S/N enhancement thus depends on the sample rate f_s

$$\left(\frac{S}{N}\right)_y = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{\frac{T_G}{2T_n}} \cdot \sqrt{\frac{2T_R}{T_S}} = \left(\frac{S}{N}\right)_x \cdot \sqrt{f_S T_G \frac{T_R}{T_n}}$$

NOTIAMO CHE L'SNR DIPENDE DA f_s, cosa che non avveniva nel BI, qui la frequenza del segnale è molto importante.

Se abbiamo un segnale periodico di cui sappiamo bene la frequenza non abbiamo problemi, ma se f_s cambia nel tempo allora ci cambia anche il SNR e a noi non ci va bene, infatti usiamo il BI.

Il senso del RI è quello di misurare f_s, infatti se supponiamo di avere tutti i dati tranne la frequenza allora tramite l'SNR possiamo ricavarla

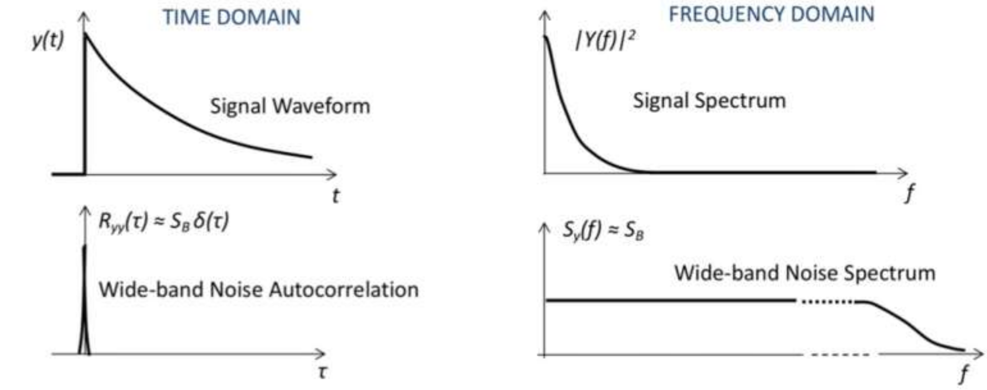
OPTIMUM FILTER

Vogliamo studiare il filtro ottimo..

• FILTRI OTTIMI 1) MISURAZIONE DELL'AMPIEZZA

Per semplificarci il lavoro studiamo il sistema con il rumore bianco stazionario. (cioè supponiamo che l'autocorrelazione del rumore sia moooolto più piccola di quella del segnale)

- Narrow autocorrelation, i.e. **width much smaller than the signal duration**
- Wideband uniform spectrum, i.e. **upper bandlimit much higher than that of the signal**



Come posso migliorare l'SNR?

Per misurare l'ampiezza noi dobbiamo fare in modo che il filtro prenda il massimo segnale e lasci fuori il rumore dove non c'è il segnale.

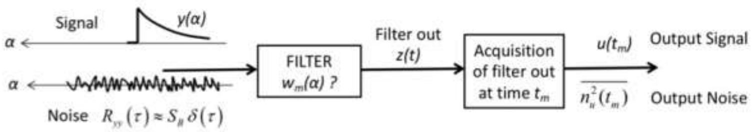
Come trovo il filtro ottimo?

Low-pass filters tailored to the signal are suitable, but we'd like to know more, since basic questions are still open:

- *is there an optimal filter and if yes, what is it?*
- *If yes, what is the **best obtainable result**? That is, what is the optimized S/N and what is the smallest measurable amplitude?*

The issue is to find out the optimal weighting function, since it completely characterizes a linear filter.
Let's set in evidence the signal area A and the normalized waveform *b(t)*

$$y(t) = A \cdot b(t) \quad \text{with} \quad \int_{-\infty}^{\infty} b(t)\,dt = 1$$



QUESTION: is there a weighting function $w_m(\alpha)$ that optimizes $\frac{S}{N} = \frac{u(t_m)}{\sqrt{\overline{n_u^2(t_m)}}}$?

Esiste una funzione peso che mi da il massimo SNR? e come la ricavo?

The signal and noise acquired in the measurement are

$$u(t_m) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\alpha) w_m(\alpha) d\alpha = A \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b(\alpha) w_m(\alpha) d\alpha = A \cdot k_{bw}(0) \quad \leftarrow \text{SEGNALE D'USCITA}$$

$$\overline{n_u^2(t_m)} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yy}(\alpha) k_{ww}(\alpha) d\alpha = S_B \cdot \int_{-\infty}^{\infty} w_m^2(\alpha) d\alpha = S_B \cdot k_{ww}(0) \quad \leftarrow \text{RUMORE D'USCITA}$$

Therefore

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{u^2(t_m)}{\overline{n_u^2(t_m)}} = \frac{A^2}{S_B} \cdot \frac{k_{bw}^2(0)}{k_{ww}(0)} \quad \leftarrow \text{VOGLIAMO MASSIMIZZARE L'SNR}$$

The $w_m(\alpha)$ that optimizes S/N for a given pulse shape $b(\alpha)$ is found by exploiting the known property of correlation functions (based on Schwartz's inequality)

$$\boxed{k_{bw}^2(0) \le k_{bb}(0) \cdot k_{ww}(0)} \qquad \text{that is} \qquad \frac{k_{bw}^2(0)}{k_{ww}(0)} \le k_{bb}(0)$$

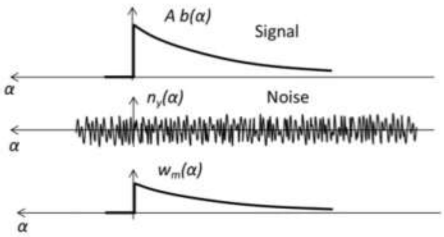
where the maximum is achieved with **filter weighting proportional to the signal shape**

$$w_m(\alpha) \propto b(\alpha) \qquad \text{which normalized to unit area is} \qquad \boxed{w_m(\alpha) = b(\alpha)}$$

and gives $\max\left[k_{bw}^2(0)\right] = k_{bb}^2(0)$ that is $\max\left[\dfrac{k_{bw}^2(0)}{k_{ww}(0)}\right] = k_{bb}(0)$

Quando la funzione peso è proporzionale alla forma del segnale (stessa forma) allora abbiamo il massimo della Schwartz inequality

MATCHED FILTER



In pratica va bene perché la funzione peso del filtro segue il mio segnale, cioè è Ø quando il segnale è Ø ed è max quando il segnale è max

The best result in measurements of the amplitude of signal pulses accompanied by **stationary** white noise is obtained with weighting function equal to the signal shape. This conclusion is intuitive: since the noise is uncorrelated, the output noise power is the weighted sum of the noise instantaneous power at all times; since this power is equal at all times, it is convenient to give higher weight when the signal is higher.

The filter with weighting function $w_m(\alpha)$ matched to the signal shape $b(\alpha)$

$$\boxed{w_m(\alpha) \propto b(\alpha)}$$

is indeed called **MATCHED FILTER**

Quando usiamo una funzione peso proporzionale alla forma del segnale otteniamo che il rapporto segnale rumore è:

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{opt}^2 = \frac{A^2}{S_B} \cdot k_{bb}(0) = \frac{A^2}{S_B} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} b^2(\alpha) d\alpha}$$

recalling that the energy E_y of the signal $A\, b(t)$ is

$$E_y = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} b^2(\alpha) d\alpha = A^2 \int_{-\infty}^{\infty} B^2(f) df$$

we see that $(S/N)^2_{opt}$ is simply

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{opt}^2 = \frac{E_y}{S_B} = \frac{\text{signal energy}}{\text{noise power density (bilateral)}}}$$

MA QUAL'È IL MINIMO SEGNALE CHE POSSO RILEVARE?

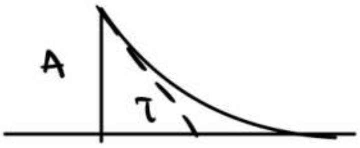
Diciamo che l'SNR minimo dipende dall'applicazione. Tuttavia noi tipicamente usiamo

$$SNR_{MIN} = 1$$

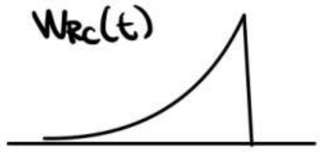
che è una definizione, infatti in alcune applicazioni questo SNR è molto brutto.

ESEMPIO

Supponiamo un segnale siffatto



Dobbiamo avere una funzione peso proporzionale a questo segnale. ATTENZIONE L'RC HA UNA FUNZIONE SIMILE MA RIBALTATA QUINDI È TOTALMENTE DIVERSA



Non possiamo fare questa funzione peso xè va a infinito e noi dobbiamo stopparci a t_m.

NEGLI ESERCIZI NOI FAREMO IL MIGLIOR FILTRO TRA RC E GATED INTEGRATOR DATO UN SEGNALE ESPONENZIALE D'INGRESSO, NON DOBBIAMO CONFONDERCI NON È MATEMATICAMENTE CORRETTO.

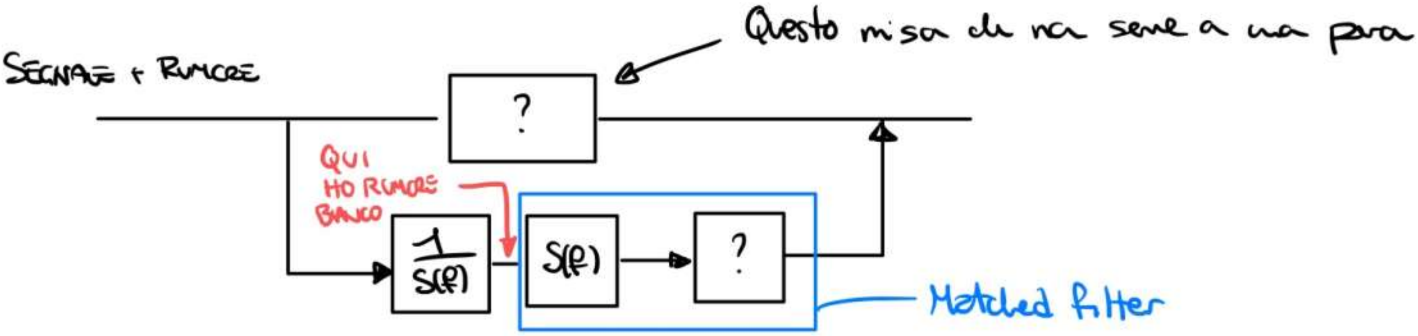
SUPPONIAMO ORA DI AVERE QUALSIASI RUMORE STAZIONARIO

(non solo rumore bianco)

Risolviamo il problema con una proprietà dei filtri a parametri costanti, cioè la possibilità di ritornare al valore iniziale e la possibilità di scambiare i filtri in coscata.

NEL CASO DI RUMORE BIANCO STAZIONARIO

SE IL RUMORE NON È BIANCO NON POSSO FARE COSÌ



Visto che il rumore non è bianco ha una certa spectral density $S(f)$. I 2 filtri $1/S(f)$ e $S(f)$ si "semplificano" tra loro.
Sono nella stessa situazione iniziale, allora qual'è il vantaggio?

Tra i 2 filtri $1/S(f)$ e $S(f)$ ho un punto con spectral density che è piatta quindi ho un rumore bianco. e sapendo che da lì ho rumore bianco tutto quello dopo non è altro che un matched filter

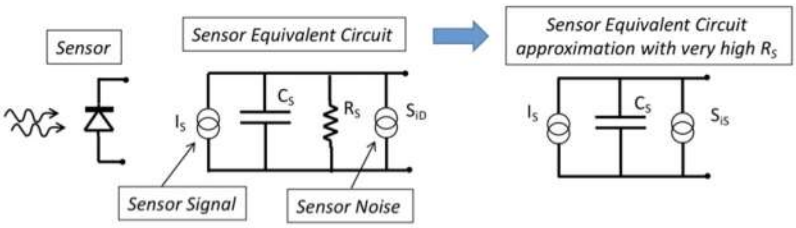
Ma è lo stesso matched filter che fare sul segnale? NO!! perchè il segnale non è lo stesso che ho in ingresso perchè è passato nel filtro 1/S(f)

23.03.2021 2h

OPTIMUM FILTER 2

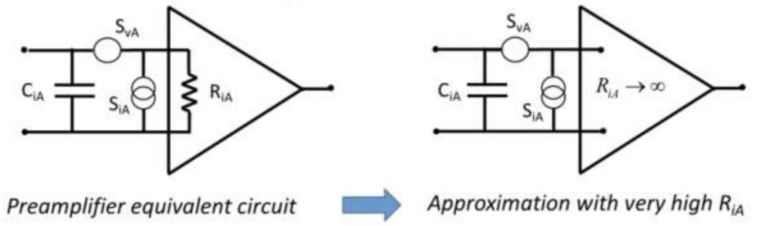
High impedence Sensors

i sensori ad alta impedenza possono essere visti come dei generatori di corrente, con ai loro capi un condensatore dovuto a diverse cose. P-i-N junction sono tipi di sensori ad alta impedenza.
L'idea è possiamo modellare il sistema come segue



Come possiamo leggere questo sensore? Dobbiamo connetterlo ad un amplificatore

Low-Noise amplificatore



Dove R_{iA} è la vera resistenza dell'input non quella ad anello chiuso

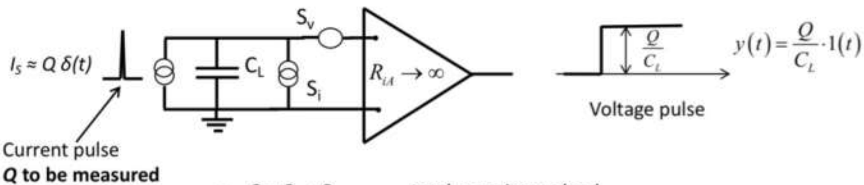
Noi vogliamo $R_{iA} \to \infty$ visto che ci ricordiamo che il rumore della resistenza è

$$S_{iR} = \frac{4KT}{R_i}$$

Se R_{iA} è troppo basso rischiamo di rovinare troppo il rumore, per questo noi tendiamo ad usare R_{iA} molto alte

INFO ESTERNA: il rumore della tensione per una $R = 1K\Omega$ è $4nV/\sqrt{Hz}$

UNIAMO IL SENSORE E L'AMPLI



Usiamo $I_S \approx$ delta perchè noi vogliamo vedere la nostra abilità a leggere segnali veloci

- $C_L = C_S + C_{iA}$ total capacitance load
- $S_v = S_{vA}$ voltage noise generator (wideband white spectrum) (AMPLI)
- $S_i = S_{iD} + S_{iA}$ current noise generator (wideband white spectrum)

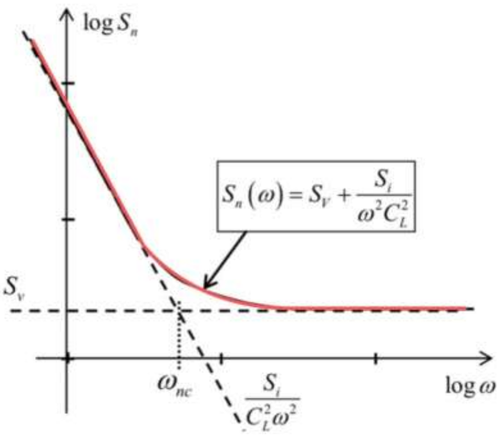
Abbiamo rumore sia di tensione che di corrente, trasformiamo il rumore di corrente in uno di tensione e otteniamo:

$$\boxed{S_n(\omega) = S_V + \frac{S_i}{\omega^2 C_L^2}}$$

notiamo che il rumore di corrente è integrato sulla capacità, perciò il rumore non è bianco.

Anche il segnale in uscita sarà integrato sulla capacità $Q = C \cdot V$ e infatti otteniamo un gradino.

STUDIAMO IL RUMORE



il totale del rumore è questo. Sv e Si erano bianchi ma poi noi a colpa dei condensatori integriamo Si e quindi il totale non è bianco. Ma abbiamo un vantaggio, il rumore "l'abbiamo colorato noi" quindi abbiamo informazioni

Definiamo Wnc il punto dove si incrociano le rette e lo chiamiamo Noise-Corner angular frequency.

IN questo caso otteniamo che

Crossing of the component defines ω_{nc} Noise-Corner angular frequency

$$S_v = \frac{S_i}{C_L^2 \omega_{nc}^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_{nc} = \frac{\sqrt{S_i}}{C_L \sqrt{S_v}}}$$

$T_{nc} = 1/\omega_{nc}$ Noise-Corner time constant

$$\boxed{T_{nc} = \frac{1}{\omega_{nc}} = \frac{\sqrt{S_v}}{\sqrt{S_i}} C_L}$$

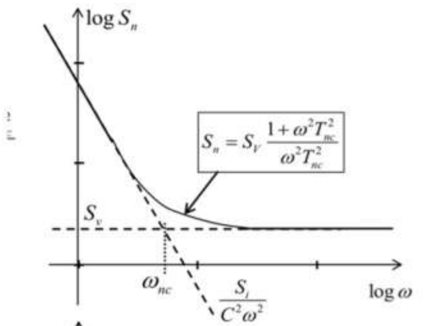
Notiamo che Tnc è la costante di tempo ed è C_L per qualcosa. Definiamo la noise corner resistence

$$R_{nc} = \sqrt{S_v} / \sqrt{S_i}$$

così che $T_{nc} = R_{nc} \cdot C_L$

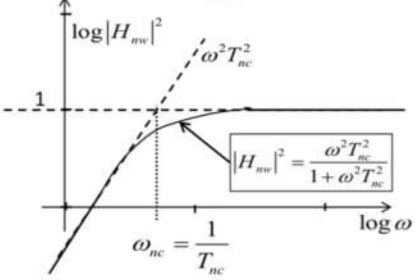
NOI Per i filtri ottimi vogliamo riportare il rumore in rumore bianco. Che filtro dobbiamo usare?

Dobbiamo avere un filtro che sia piatto dove già abbiamo il rumore bianco e che "tiri giù" la curva dove il nostro rumore sale in modo da avere tutto piano.



Risoriviamo tutto il rumore in Sv

$$S_n(\omega) = S_V \left(1 + \frac{S_i}{\omega^2 S_V C_L^2}\right) = S_V \left(1 + \frac{1}{\omega^2 T_{nc}^2}\right) = S_V \frac{1+\omega^2 T_{nc}^2}{\omega^2 T_{nc}^2}$$



Così rendiamo evidenti poli e zeri. Per rendere l'uscita piatta dobbiamo cancellarli tutti e 2.
Ciò vuol dire avere uno zero a 0 frequency e un polo in Wnc

$$\boxed{|H_{nw}(\omega)|^2 = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2}}$$

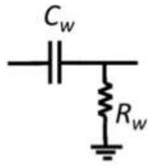
(Occhio che deve essere così per $|H(\omega)|^2$ perché ricordarsi l'output dei filtri) Qui siamo fortunati perché abbiamo ω^2 nel rumore!!!

Se abbiamo solo w non avremmo potuto farlo!! (Lo vedremo + avanti)

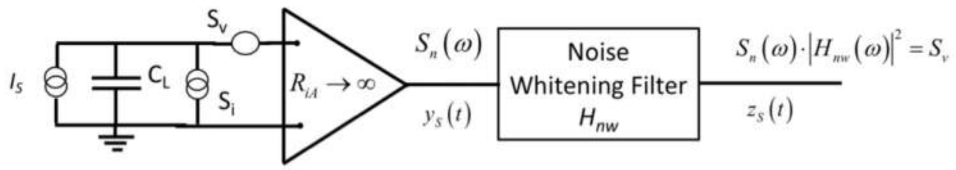
Questo filtro non è altro che un semplice filtro passa alto con costante di tempo uguale a quella del rumore definita in frequenza

$$H_{nw}(\omega)=\frac{j\omega R_w C_w}{1+j\omega R_w C_w}$$

with $R_w C_w = T_{nc}$



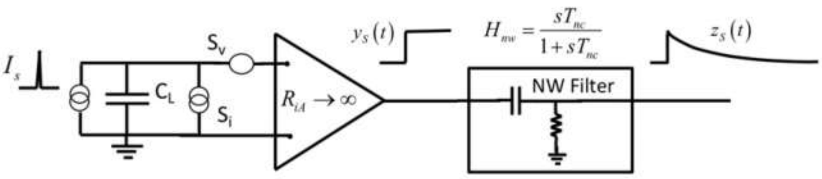
Perciò

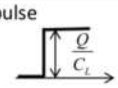
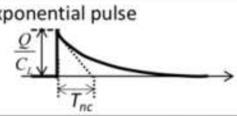


Abbiamo il rumore bianco.

ATTENZIONE IL SEGNALE È STATO MODIFICATO DAL FILTRO PASSA ALTO !!!

Prima abbiamo il segnale delta che poi viene integrato dal condensatore e diventa un gradino. Poi il gradino passa nel filtro passa alto e diventa un exponenziale decrescente



Input (current)	Preamp Output (voltage)	NW Filter Output (voltage)
δ – pulse 	Step pulse 	Exponential pulse 
$I_s(t)=Q\cdot\delta(t)$	$y_S(t)=\frac{Q}{C_L}\cdot 1(t)$	$z_S(t)=\frac{Q}{C_L}\cdot 1(t)\cdot\exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right)$
$I_s(s)=Q$	$Y_S(s)=\frac{Q}{C_L}\cdot\frac{1}{s}$	$Z_S(s)=\frac{QT_{nc}}{C_L}\frac{1}{1+sT_{nc}}$

ORA SIAMO NELLA CONDIZIONE DI APPLICARE IL FILTRO OTTIMO !!!

CREIAMO IL NOSTRO FILTRO OTTIMO !! Ricordiamo che creiamo il filtro ottimo facendo la funzione peso uguale al segnale solo con area unitaria. Perciò il matched filter sarà:

$$w_m = 1(t)\cdot\frac{1}{T_{nc}}\exp\left(-\frac{1}{T_{nc}}\right)$$

c'è il quadrato perché il rumore sarebbe sotto radice x ciò elevo il segnale al quadrato e lascio il rumore senza nulla

e poi possiamo calcolare l'SNR

$$\eta_o^2=\left(\frac{S}{N}\right)^2_{opt}=\frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty}z_s(\alpha)w_m(\alpha)d\alpha\right]^2}{S_v\cdot\int_{-\infty}^{\infty}w_m^2(\alpha)d\alpha}=\frac{Q^2}{C_L^2}\frac{T_{nc}^2}{S_v}\int_{-\infty}^{\infty}w_m^2(\alpha)d\alpha=\frac{Q^2}{C_L^2}\frac{1}{2}\frac{T_{nc}}{S_v}$$

Questa è la miglior SNR fisicamente ottenibile. Inoltre il filtro ottimo può essere realmente realizzato ma è di difficile implementazione. Ed ancora, in questo caso il filtro ci mette tempo infinito per completare l'azione (la funzione peso va a infinito quindi ci serve l'infinito per mettere tm)

Capiamo che non abbiamo tempo infinito, entreremo nel dominio dell'approssimazione

APPROSSIMAZIONI PRATICHE DEI FILTRI OTTIMI

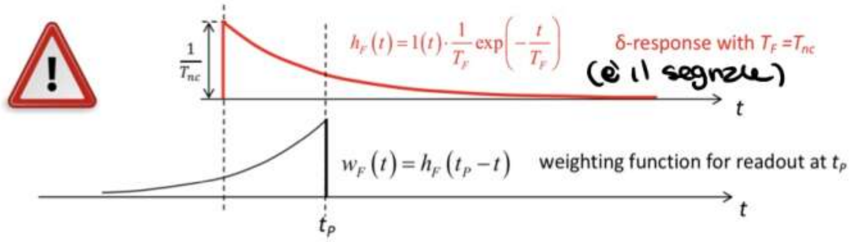
(Ricordiamo ancora che il filtro RC non è uguale alla funzione peso nel nostro caso perché è invertito)
il matched filter è comunque un filtro passa basso (MA non l'RC), possiamo creare un filtro passa basso che si comporti come il matched filter? DIFFICILE.

Proviamo a vedere se il filtro RC (PUR NON ESSENDO IL MATCHED FILTER!) è una buona **APPROSSIMAZIONE** del matched filter:

A simple **RC integrator** (single-pole low-pass filter) can be an **approximation** of the matched filter. With $RC = T_{nc}$ its δ-response $h_F(t)$ is identical to the weighting function $w_M(t)$ of the matched filter. The **RC weighting** $w_F(t)$ has the same shape as $w_M(t)$ of the matched filter, but it's not fully correct because it is **reversed in time!**

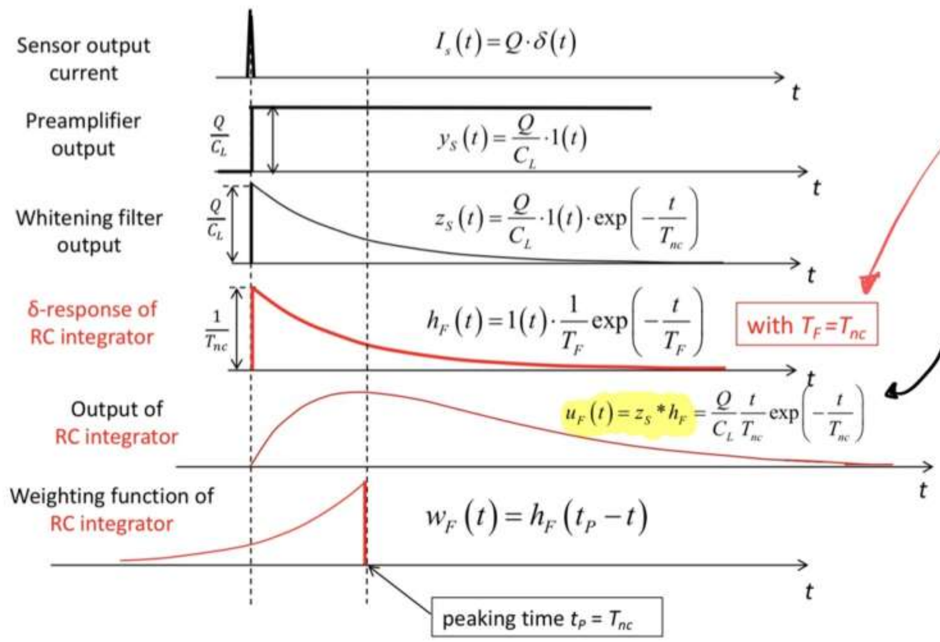
La delta response è uguale e questo vuol dire che la funzione peso è invertita

l'approssimazione ottima l'avremo quando $RC = T_{nc}$ (non intuitivo lo dimostreremo)



Dobbiamo poi scegliere il valore di tp (tp ottimo per l'approssimazione)

IL RISULTATO TOTALE SARÀ: (Faremo poi la dimostrazione con Giulia)



ha solo la delta response uguale al segnale.

è l'integrale della funzione peso per il segnale o la convoluzione tra i 2 segnali

ATTENZIONE NOI NON SIAMO INTERESSATI ALLA FORMA DELL'OUTPUT A NOI CI INTERESSA SOLO IL VALORE DI Q, INFATTI IL SEGNALE È PROPORZIONALE A Q.

Per massimizzare l'SNR dobbiamo prendere il segnale nel punto massimo e perciò tp è locata dove l'uscita è al massimo.

(così il valore massimo della funzione peso ce l'ho nel punto di massimo segnale e quindi "pesa di più sul totale" e a noi va bene perché sappiamo che è punto migliore per l'SNR)

(NON HO CAPITO BENE STA COSA, CIOÈ L'OUTPUT DOVREBBE ESSERE DIPENDENTE GIÀ DA TP QUINDI NON HA SENSO METTERLO LÌ? BOH, DA CAPIRE) ???????

COMPARIAMO IL FILTRO OTTIMO CON QUELLO APPROSSIMATO

The RC output signal waveform is $u_F(t) = \frac{Q}{C_L}\frac{t}{T_{nc}}\exp\left(-\frac{t}{T_{nc}}\right)$

Signal peak value (at $t = T_{nc}$) $s_F = u_F(T_{nc}) = \frac{1}{e}\frac{Q}{C_L}$

Noise $\sqrt{\overline{n_F^2}} = \sqrt{S_v}\cdot\sqrt{k_{hh}(0)} = \sqrt{\frac{S_v}{2T_{nc}}}$

S/N $\eta_F = \frac{s_F}{\sqrt{\overline{n_F^2}}} = \frac{1}{e}\frac{Q}{C_L}\sqrt{\frac{2T_{nc}}{S_v}}$ ← È LA SNR DEL FILTRO APPROSSIMATO IN QUESTO CASO

Comparing the RC approximation with the ideal optimum filter system we see that

$s_F = \frac{2}{e}s_o \approx 0,736\cdot s_o$ the signal is lower

$\sqrt{\overline{n_F^2}} = \sqrt{\overline{n_o^2}}$ the noise is equal ← il rumore è lo stesso xè l'autocorrelazione in zero è la stessa.

$\eta_F = \frac{2}{e}\eta_o \approx 0,736\cdot\eta_o$ the S/N is lower

the performance of the filter system with RC approximation of matched filter is about 27% worse than the absolute optimum. ← Dobbiamo capire noi se ci va bene in base alla nostra applicazione.

Note that the loss is due to bad exploitation of the signal

25/03/2021 ESERCITAZIONE 3h

Sempre questo testo d'esame

A sensor is connected to a preamplifier featuring a wide bandwidth, limited by a single pole at f_S=100kHz. The acquisition system provides a single pulse with a known shape and the pulse amplitude V_P is to be measured. An auxiliary synchronism signal is available, which points out the arrival time of the signal. The noise coming with the signal features a uniform **unilateral** spectral density equal to $\sqrt{S_{N,U}}$ = 10nV/√Hz and a wide band, limited by the preamplifier.

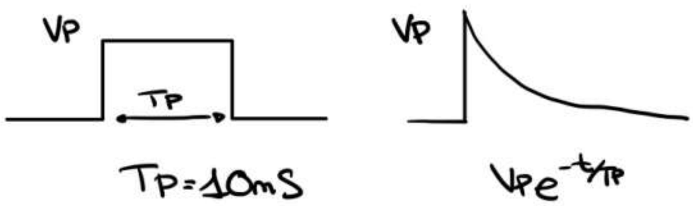
Consider the following two cases:

- rectangular signal with a pulse duration T_P=10ms
- exponential signal $V_P 1(t)e$^-(t/T_P), with T_P=10ms

For both cases:

Eravamo al punto b

RICORDIAMO CHE I NOSTRI SEGNALI SONO



• RICORDIAMO CHE NEL CASO 1 DEL B abbiamo usato un GI per il rect

Come possiamo calcolare il rumore in frequenza?

Una possibilità è quella di avere

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_n(f)\,|W_1(f)|^2\,df$$

abbiamo usato $W_1(f)$ perché è un filtro a parametri non costanti

L'altra opzione è quella di usare l'equivalent noise Bandwith, che nel caso del GI è

$$f_n = \frac{1}{2T_G}$$

è il GI l'opzione migliore per filtrare il segnale rettangolare? Sì, perché la funzione peso del GI è un rettangolo!!!

l'SNR per il filtro ottimo è

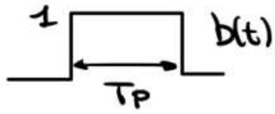
$$SNR_{OPT} = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_u}{2}}} \sqrt{K_{bb}(0)}$$

Dove Su è l'unilateral spectral density e b(t) è la funzione che moltiplicata a VP mi da il segnale d'ingresso, in questo caso b(t) è un rect di altezza 1 mentre VP è una costante. (RICORDIAMO CHE L'AREA DI b(t) NON DEVE ESSERE UNITARIA)

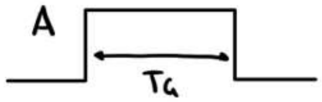
Perciò l'SNR_{OPT} SARÀ

$$SNR_{OPT} = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_{nu}}{2}}} \cdot \sqrt{T_P}$$

è l'autocorrelazione di b in Ø



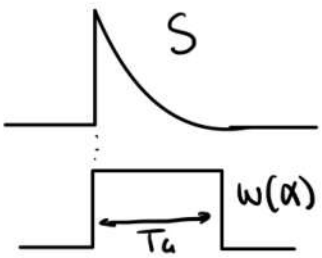
Proviamo provare a usare il GI anche per il segnale esponenziale (ci va bene xè non dobbiamo ricalcolare il rumore)



$$\sigma^2 = \frac{S_{nu}}{2} A^2 T_a$$

← l'abbiamo già calcolata l'altro giorno

Dobbiamo solo calcolare il segnale. Dobbiamo decidere dove iniziare a campionare il segnale.



Iniziamo a campionare il segnale sul picco.

Perciò

$$S = V_P \cdot A \cdot T_P \left(1 - e^{-\frac{T_a}{T_P}}\right)$$

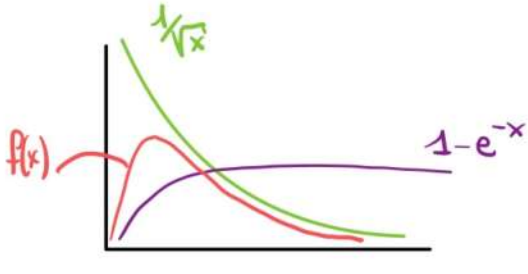
è l'integrale della moltiplicazione dei 2 segnali

PERCIÒ L'SNR è

$$SNR = \frac{V_P A T_P \left(1 - e^{-\frac{T_a}{T_P}}\right)}{\sqrt{\frac{S_{nu}}{2} \cdot A^2 \cdot T_a}}$$

Dobbiamo trovare il Ta che ci da il massimo SNR, ma esiste il massimo? riscriviamo l'SNR

$$SNR = \frac{V_P \cdot \sqrt{T_P}}{\sqrt{\frac{S_{nu}}{2}}} \cdot \frac{(1 - e^{-x})}{\sqrt{x}} \qquad \text{con} \quad x = \frac{T_a}{T_P}$$



Graficamente sappiamo che il massimo c'è

il MAX di f(x) è x = 1,25

Ma attenzione non possiamo trovare questo valore matematicamente, se all'esame troviamo qualcosa così dobbiamo provare con diversi valori

Chiamiamo improvement factor (IF) $\frac{(1-e^{-x})}{\sqrt{x}}$ e cambiamo x

Per $x = 0{,}5$ $IF = 0{,}556$
Per $x = 1$ $IF = 0{,}6$
Per $x = 1{,}5$ $IF = 0{,}58$

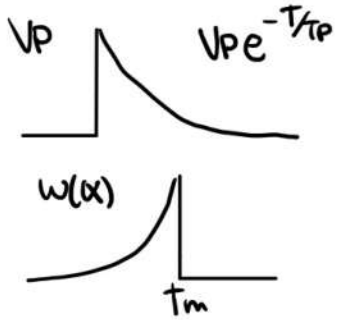
← Dato questo e visto il grafico possiamo intuire dove è il grafico

Alla fine noi sappiamo che $T_a = 1{,}25\,T_p$ e se lo usiamo otteniamo che V_{PMIN} con un GI e il segnale esponenziale è:

$$V_{PMIN} = 110\,nV$$ ← centra qualcosa con l'SNR=1

(ABBIAMO USATO IL GI UNICAMENTE XÈ AVEVAMO GIÀ IL RUMORE, ESISTE UN FILTRO MIGLIORE?)

PROVIAMO A USARE IL FILTRO RC



Dobbiamo decidere dove mettere t_m e quale τ deve avere il filtro.

INIZIAMO DAL RUMORE DEL FILTRO (ricordiamo che è un filtro a parametri costanti). Usiamo l'equivalent noise bandwith.

$$\sigma^2 = S_{n,u} \cdot \frac{1}{4\tau}$$

Calcoliamo il segnale

$$y(t) = x(t) * h(t)$$ → Andiamo nel dominio di Laplace dove $Y(s) = X(s) \cdot H(s)$

$$= \frac{V_P T_P}{1+sT_P} \cdot \frac{1}{1+s\tau}$$

e ora torniamo al dominio del tempo. Abbiamo 2 casi

Se $\tau = T_P$ allora $y(t) = \frac{V_P}{T_P}\tau e^{-t/T_P}$ ← Noi ci focalizziamo solo su questa perché è la soluzione migliore (può essere dimostrato)

Se $\tau \neq T_P$ allora $y(t) = \frac{V_P T_P}{\tau - T_P}\left(e^{-t/\tau} - e^{-\frac{t}{T_P}}\right)$

Allora il segnale è
$$S = \frac{V_P}{T_P} \cdot t_m e^{-\frac{t_m}{T_P}}$$

e se poi calcoliamo l'SNR_{MAX} ci deve venire il massimo per $t_m = T_P$
(possiamo calcolarlo con la derivata)
l'SNR_{MAX} viene quindi

$$SNR_{MAX} = \frac{V_P \cdot \frac{1}{e}}{\sqrt{S_{n,u} \cdot \frac{1}{4T_P}}}$$ e otteniamo $V_{P,MIN} = 136\,nV$

che è maggiore di quella del GI, quindi il GI era meglio.

Possiamo fare meglio di questo? Quanto siamo distanti dall'ottimo?

Il miglior risultato teorico che possiamo ottenere per il segnale esponenziale è il filtro ottimo

in questo caso l'SNR è
$$SNR = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_{n,u}}{2}}} \sqrt{K_{bb}(0)}$$ con $b(t) =$ 

(Fare questo conto è un ottimo modo per controllare i conti dei nostri altri filtri studiati in precedenza, ottimo per l'esame)

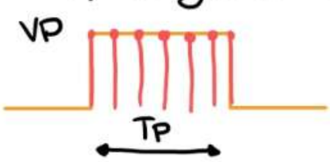
$$= \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_{n,u}}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{T_P}{2}} \rightarrow V_{P,MIN} = 100\,nV$$

Con il GI abbiamo un 10% di errore in più (se è tanto o poco dipende dalla nostra applicazione)

[A CASA POSSIAMO PROVARE A STUDIARE IL SEGNALE RETTANGOLARE CON UN FILTRO RC]

c) Instead of using an analog filter, consider now an acquisition chain that performs a sampling of the signal and converts the samples into digital words which are sent to a PC for elaboration. Discuss the criteria to select the sampling frequency and what kind of elaboration you would select to optimize the measurement. Select the filter parameters for maximizing the Signal-to-Noise ratio (S/N) and evaluate the minimum measurable amplitude $V_{P,min}$.

Caso 1) Segnale rettangolare

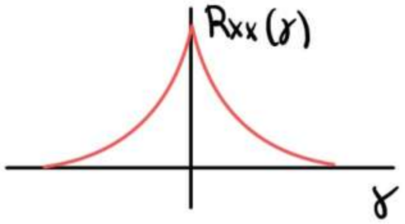


Dobbiamo scegliere la frequenza di campionamento

Dobbiamo campionare abbastanza in modo da migliorare l'SNR, ma anche non troppo altrimenti il sistema diventa troppo complesso.

Inoltre se noi campioniamo troppo i campioni di rumore non sono più incorrelati e questo ci incasina i conti.

il rumore all'output del preamplificatore (dove noi prendiamo il segnale) ha un autocorrelazione del tipo



frequenza del Preamplificatore = 100kHz

$$\tau = \frac{1}{2\pi f_s} = 1{,}59\,ms$$

Noi diciamo che i campioni di rumore non sono più correlati quando

$$T_{S_{ampling}} \gg \tau$$

è lo stesso τ

Per esempio noi prendiamo $T_S = 10\tau$ (è conservativo)

- ORA DOBBIAMO CALCOLARE IL SEGNALE E IL RUMORE

La cosa più facile da fare è dare lo stesso peso a tutti i campioni, inoltre ci da anche il "filtro ottimo digitale".

Perciò il segnale è

$$S = \sum_{k=1}^{N} V_P = N V_P$$

per ogni campione il segnale è V_P

il rumore è

$$N = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \sigma_{IN}^2} \qquad \sigma_{IN}^2 = \sqrt{S_{nu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_s}$$

l'SNR è quindi

$$SNR = \frac{N V_P}{\sqrt{N \cdot \sigma_{IN}^2}} = \frac{V_P}{\sqrt{S_{nu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_s}} \cdot \sqrt{N}$$

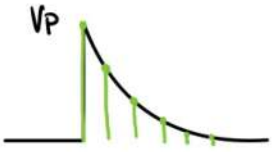
Dove $N = T_P / T_{sampling} = 629$.

RICORDARE CHE ABBIAMO FATTO QUESTO SOLO VISTO CHE CAMPIONI INCORRELATI

in questo caso $V_{P_{MIN}} = 158\,nV$

Possiamo fare meglio? Si aumentando $T_{sampling}$ ci avviciniamo al filtro analogico ottimo ma non potremmo usare le formule che abbiamo visto prima perchè ci sarebbe la correlazione.

E NEL CASO DEL SEGNALE ESPONENZIALE COSA SUCCEDE?



Nel dominio digitale posso campionare in modo pesato nello stesso modo del segnale. In linea teorica ho il filtro ottimo digitale, se potessi usare una f di campionamento ∞ potrei fare il filtro ottimo.

Supponiamo anche qui $T_S = 10\tau$

è la funzione peso che ha la stessa forma del segnale

il segnale è

$$S = \sum_{k=0}^{N} V_P e^{-\frac{kT_S}{T_P}} \cdot \overbrace{1 e^{-\frac{kT_S}{T_P}}} = V_P \sum_{k=0}^{N} e^{-\frac{2kT_S}{T_P}}$$

Chiamiamo $\alpha = e^{-\frac{2Ts}{Tp}}$ allora $S = \frac{1}{1-\alpha}$ (perché $\sum_{k=0}^{N} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$)

IL RUMORE È

$$N = \sqrt{\sum_{K=0}^{N} \sigma_{IN}^2 \cdot \underbrace{1^2 \cdot e^{\frac{-2KTs}{Tp}}}_{\text{è la funzione peso elevata al quadrato}}} = \sigma_{in}\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$$

il rapporto segnale rumore dunque è

$$SNR = \frac{V_p}{\sigma_{IN}} \cdot \frac{\frac{1}{1-\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{V_p}{\sigma_{IN}} \cdot \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$1-\alpha = 1 - e^{-\frac{2Ts}{Tp}} \simeq \frac{2Ts}{Tp}$$

$$= \frac{V_p}{\sigma_{in}} \cdot \sqrt{\frac{Tp}{2Ts}}$$

più basso Ts più alto è l'SNR ma attenzione questa formula vale solo con campioni incorrelati

con $Ts = 10\tau$ otteniamo $V_{PMIN} = 223nV$

Possiamo fare meglio di così? Se riduciamo Ts in teoria possiamo approcciare il valore del filtro ottimo $V_{PMIN} = 100nV$ (ma non con le nostre formule)

26.03.2021 3h

FILTRO PASSA-ALTO E RUMORE 1/f

Ricordiamoci il problema del rumore 1/f visto nella lezione precedente.

$$|H_{nw}(\omega)|^2 = \frac{\omega^2 T_{nc}^2}{1+\omega^2 T_{nc}^2}$$

(Occhio che deve essere così per $|H(\omega)|^2$ perché ricordarsi l'output dei filtri) Qui siamo fortunati perché abbiamo ω^2 nel rumore!!!

Se abbiamo solo ω non avremmo potuto farlo!! (Lo vedremo + avanti)

Ad oggi è molto importante xè è molto presente nei mosfet.

- Basic **distinction** between 1/f and white noise:
  time span of interdependence between samples
  for **white** noise: samples are **uncorrelated even at short** time distance
  for **1/f** noise: samples are strongly **correlated even at long** time distance

Nella realtà il rumore 1/f è dato da circa $1/|f|^{\alpha}$ con $0{,}8 < \alpha < 1{,}2$

- 1/f noise arises from physical processes that generate a **random superposition** of elementary pulses with **random pulse duration** ranging from **very short to very long**.

E.g. in MOSFETs 1/f noise arises because:
a) carriers traveling in the conduction channel are randomly captured by local trap levels in the oxide, stop traveling and stop contributing to the current
b) trapped carriers are later released by the level with a random delay
c) the level lifetime (=mean delay) strongly depends on how far-off is from the silicon surface (= from the conduction channel) is the level in the oxide
d) trap levels are distributed from very near to very far from silicon, lifetimes are correspondingly distributed from very short to very long

Specificazione del rumore 1/f

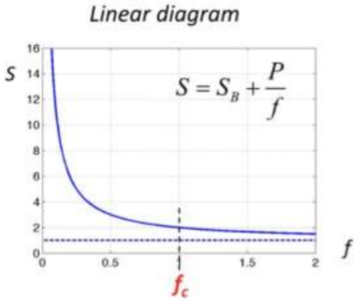
- Spectral density $S_f(f) = \dfrac{P}{f}$ noise power $\overline{n_f^2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{P}{f}\,df$ (with unilateral S_f)

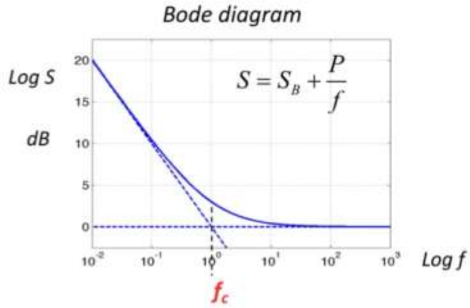
Tipicamente non abbiamo il valore di P.

Tipicamente i circuiti hanno sia rumore bianco sia 1/f, esiste quindi un valore fc (chiamato frequency corner) che è il punto in cui il rumore bianco e 1/f hanno lo stesso valore

Ci va bene xè

- circuits and devices have both 1/f noise S_f and white noise S_B





- S_f is specified in relative terms referred to the white noise S_B by specifing the «corner frequency» f_c at which $S_f = S_B$

- The **1/f noise corner frequency** f_c is defined by

$$\frac{P}{|f_c|} = S_B \qquad \text{hence} \qquad P = S_B f_c$$

Cioè con la fc e lo spettro del rumore bianco ricaviamo P.

Più piccolo fc meglio è per noi. Perché se fc è grande ho molto rumore fc

RUMORE 1/f POTENZA E LIMITI DI BANDA

Come per il rumore bianco anche il rumore 1/f non ha banda infinita abbiamo un cut off sia a basse che ad alte frequenze

The ideal 1/f noise spectrum runs from f = 0 to f → ∞ and has divergent power $\overline{n_f^2} \to \infty$
(recall that also the ideal white spectrum has $\overline{n_B^2} \to \infty$)

$$\overline{n_f^2} = \int_0^{\infty} \frac{P}{f}\,df \to \infty$$

A **real** 1/f noise spectrum has **span limited** at both ends and is **not divergent**.

If there is wide spacing between the high-frequency and low-frequency limitations they can be **approximated by sharp cutoff** at low frequency f_i and high frequency $f_s >> f_i$ and the noise power can be evaluated as *

ALLORA SCRIVIAMO COSì IL RUMORE

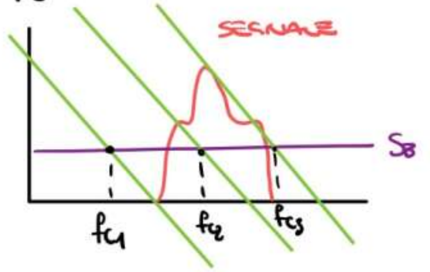
$$\overline{n_f^2} \approx \int_{f_i}^{f_s} \frac{P}{f}\,df = P\ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right) = S_B f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)$$

REMEMBER

The actual 1/f bandlimits f_s and/or f_i of given filter types will be illustrated later.

---

* Beware !
ONLY if $f_S >> f_i$ the sharp cutoff gives a **GOOD APPROXIMATION** of the noise power !



Notiamo che con fc1 sul segnale il rumore è solo SB mentre con gli altri fc il rumore è molto più alto ed è ovviamente peggio per noi

Dalla formula approssimata del rumore sappiamo che

$$\overline{n_f^2} \approx \int_{f_i}^{f_s} \frac{P}{f}\, df = S_B f_c \ln\left(\frac{f_s}{f_i}\right)$$

NOTE THAT:

- $\overline{n_f^2}$ is divergent for $f_s \to \infty$ (like white noise). A limit at high frequency is necessary for avoiding divergence, but in real cases a finite limit always exists. ← Dobbiamo avere una limitazione ad alte frequenze (non è un problema)
- $\overline{n_f^2}$ is divergent for $f_i \to 0$ (like random-walk noise $1/f^2$). A limit at low frequency is necessary for avoiding divergence, but we will see that in real cases there is always a finite limit ← Limitazione anche a basse frequenze (strano)
- $\overline{n_f^2}$ depends on the **ratio f_s/f_i** and **NOT the absolute values fs and f_i** ← Se aumento fs e fi dello stesso valore ottengo lo stesso risultato

NOTIAMO INOLTRE CHE PER $f_i \to 0$ E $f_s \to \infty$ IL VALORE DEL RUMORE DIVERGE LENTAMENTE, VISTO CHE I VALORI DI f_i E f_s SONO DENTRO UN LOGARITMO. QUESTO A NOI VA MOLTO BENE XÈ NON PAGHIAMO TANTO LA DIVERGENZA DEL RUMORE

ESEMPIO

EXAMPLE: 1/f noise with $\sqrt{P} = \sqrt{S_B f_C} = 100\,nV$

a) filtered with f_i = 1kHz and f_s = 10kHz (f_s / f_i = **10**)

$$\sqrt{\overline{n_{f,a}^2}} = \sqrt{2{,}3}\,\sqrt{S_B f_c} = 151\,nV$$

b) filtered with f_i = 1 Hz and f_s = 10MHz (f_s / f_i = $\mathbf{10^7}$, i.e. **x 10^6 higher**)

$$\sqrt{\overline{n_{f,b}^2}} = \sqrt{7 \cdot 2{,}3}\,\sqrt{S_B f_c} = 401\,nV$$ (just **x 2,7 higher**)

Un altra cosa buona del logaritmo è che possiamo approssimare i limiti di banda. Non è necessario sapere precisamente fs e fi.

1/f FILTERING

È molto importante capire che fi e fs non sono importanti ma è importante solo il rapporto.

FORMULA STANDARD — CAMBIO DI VARIABILE

$$\boxed{\overline{n_f^2} = S_B\, f_c \int_0^{\infty} |W(f)|^2 \frac{df}{f}} = S_B\, f_c \int_{-\infty}^{\infty} |W(\ln f)|^2\, d(\ln f)$$

è l'area della funzione peso in un grafico logaritmico sull'asse orizzontale

Filtering of *1/f* noise can be better understood by changing variable from *f* to *lnf* *(beware: it's NOT A BODE diagram: the vertical scale is linear !!)*

- **1/f** noise: filtered power $\overline{n_f^2}$ ∝ **area of $|W|^2$ plot in logarithmic frequency** scale

  which is different from the case of

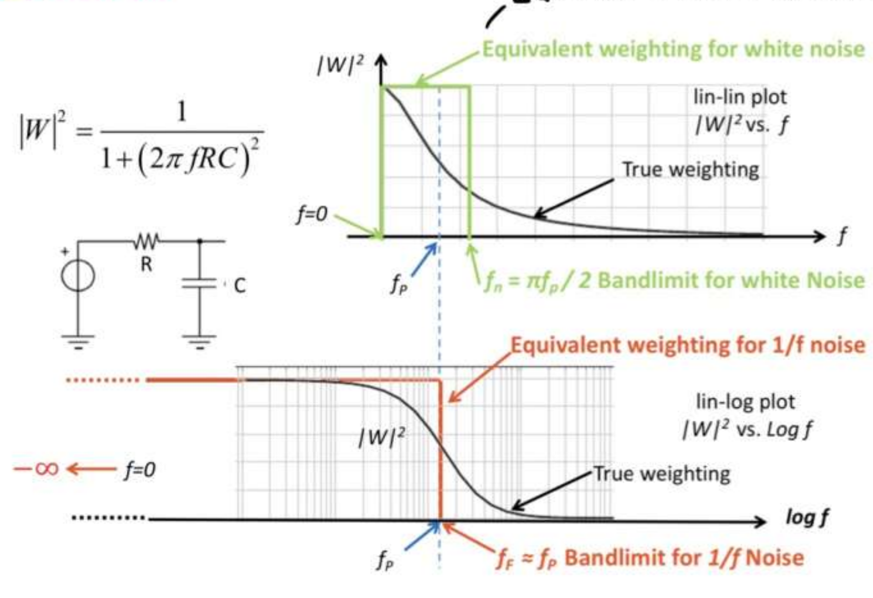
- **white** noise: filtered power $\overline{n_B^2}$ ∝ **area of $|W|^2$ plot in linear frequency** scale

  In both cases the noise power depends mainly on the **frequency span covered** by $|W|^2$, delimited by upper and lower bounds in frequency. However, the frequency span is **measured differently** :

  - for white noise, by the difference of the bounds
  - for 1/f noise, by the **logarithmic difference**, i.e. by the ratio of the bounds

ESEMPIO

EQUIVALENT NOISE BANDWITH



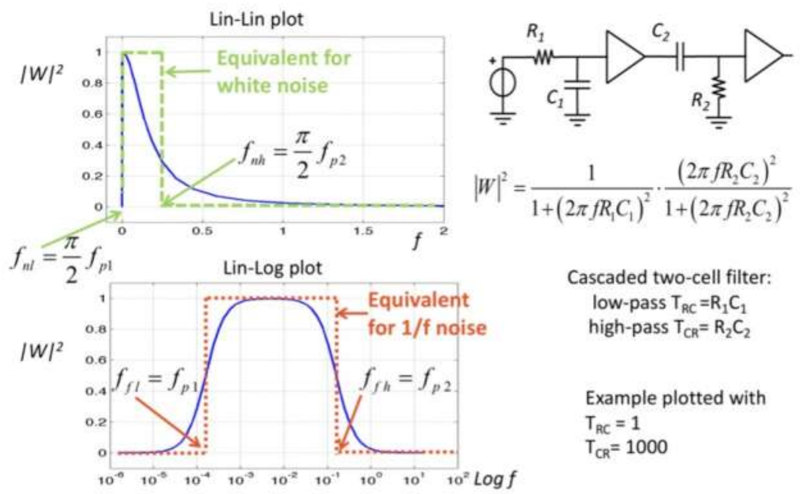
← CASO DEL RUMORE BIANCO

mettiamo $|W|^2$ nel grafico lin-log e calcoliamo l'area.

← Notiamo che ci viene area infinita com'è possibile?

Ci viene area infinita perché abbiamo usato solo un filtro passabasso quindi non abbiamo messo un limite per le basse frequenze

AGGIUNGIAMO UN PASSA-ALTO



Se supponiamo che il passa alto tagli molto vicino allo Ø allora l'area del rumore bianco sarà circa la stessa.

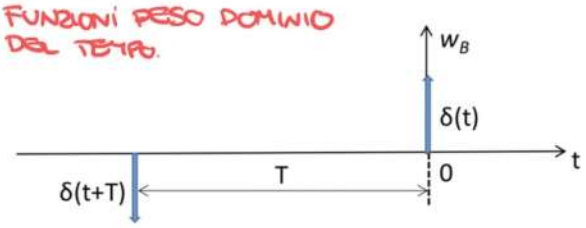
Notiamo invece che per il rumore 1/f l'area è finita.

CORRELATED DOUBLE SAMPLING [CDS]

Nella realtà niente si estende veramente fino a f=Ø nemmeno la DC, e questo perché iniziamo le misure ad un certo tempo e ci servirebbe tempo infinito per essere sicuri che niente cambi e che sia veramente a f=Ø.

Ogni volta che facciamo una misurazione facciamo un intrinsico filtraggio, perché è lo strumento che fissa lo zero, quindi in realtà io non misuro realmente un sistema ma faccio la differenza tra il sistema e il mio strumento di misurazione. Questo fatto fa un passa alto in automatico.

FUNZIONI PESO DOMINIO DEL TEMPO.



Queste è quello che facciamo nella realtà, i delta sono i sampling del segnale. Con δ(t) noi campioniamo il segnale e noi prima nel tempo avevamo un delta "di riferimento" cioè un offset che andremo a sottrarre ad ogni campionamento.

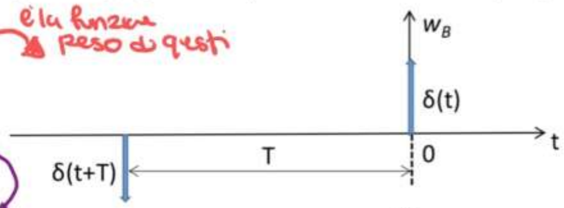
il "delta di riferimento" è in pratica l'offset del nostro strumento

Notiamo che così filtriamo il rumore il doppio, quindi prendiamo il valore del rumore 2 volte

Baseline sample subtracted from signal sample, **both** acquired with **instant sampling**

è la funzione peso di questi

Time-domain weighting



$w_B(t) = \delta(t) - \delta(t+T)$

Frequency-domain weighting

$W_B(\omega) = F[w_B(t)] = 1 - e^{i\omega T} = \underline{1 - \cos\omega T - i\ \sin\omega T}$ — Magia matematica

For noise $|W_B(\omega)|^2 = [1-\cos\omega T]^2 + \sin^2\omega T = 2\ [1-\cos\omega T]$

We can also write $|W_B(\omega)|^2 = 4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ [since it is $(1-\cos x) = 2\sin^2(x/2)$]

Non ci interessa tanto $W_B(\omega)$ ci interessa molto di più $|W_B(\omega)|^2$ perchè a noi ci interessa il rumore

At ωT<< 1 a **low frequency cutoff** is produced

$\boxed{|W_B(\omega)|^2 \approx \omega^2 T^2}$ (for x << 1 it is $\sin x \approx x$ and $\cos x \approx 1 - x^2/2$)

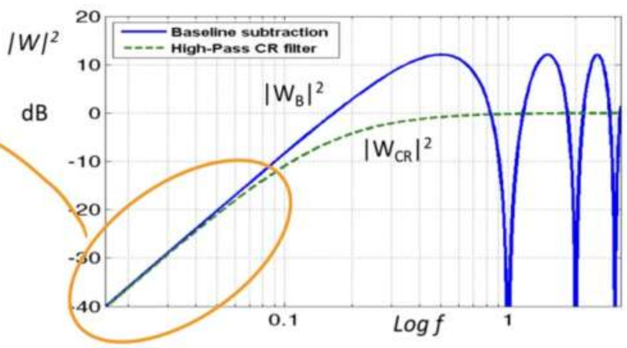
Sarà estremamente importante

Compariamo ora questo filtro con un filtro Passa-alto (visto che a noi ci serve un cut-off a basse frequenze)

Baseline subtraction with delay T	High-Pass CR filter (differentiator)
$\lvert W_B(\omega)\rvert^2 = 4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)$	$\lvert W_{CR}(\omega)\rvert^2 = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2}$
at low-frequency ω << 1/T	at low-frequency ω << 1/RC
$\lvert W_B(\omega)\rvert^2 \approx \omega^2 T^2$	$\lvert W_{CR}(\omega)\rvert^2 \approx \omega^2 R^2 C^2$

Plottiamo le 2 funzioni peso con T = RC

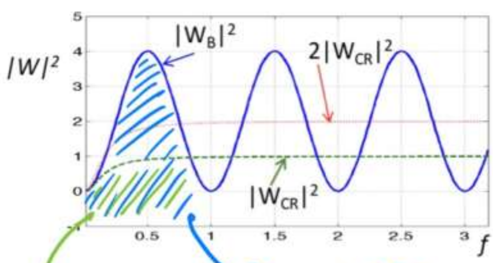
Notiamo che per basse frequenze i 2 filtri sono uguali



BODE DIAGRAM highlights the low-freq cutoff

Examples with equal cutoff T=RC plotted for T=1

Compariamo CDS e il Passa alto con il rumore bianco



LIN –LIN DIAGRAM white noise power ∝ area of $|W|^2$

NB: examples with equal cutoff T=RC plotted for T=1

Se plottiamo $2|W_{CR}|^2$ notiamo che la funzione peso oscilla attorno a questo valore

Quindi l'area di $|W_B|^2$ è esattamente l'area di $2|W_{CR}|^2$

Per il CDS questa è l'area

Per il passa basso è quest'area

Non è per nulla strano visto che come abbiamo detto prima visto che ci sono 2 delta abbiamo il doppio del rumore

$$\overline{n_B^2} = S_B \int_0^{f_S} |W(f)|^2 df$$

With Baseline sampling & subtraction	With CR high-pass filter
$\overline{n_B^2} = S_B \int_0^{f_S} 2 \cdot [1 - \cos \omega T]\, df$ that is $\overline{n_B^2} = 2\, S_B f_S$	$\overline{n_B^2} = S_B (f_S - f_i)$ and since $f_s >> f_i$ $\overline{n_B^2} \approx S_B f_S$

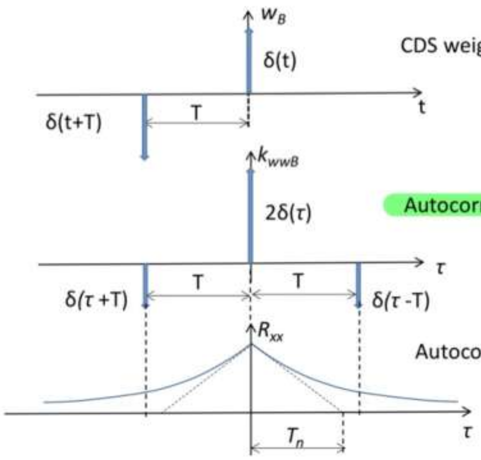
Double White noise power, as intuitive because:

1. white noise is acquired twice, in the baseline sampling and in the signal sampling.
2. The two noise samples are uncorrelated, hence their power is quadratically added.

Dal punto di vista della frequenza il CDS è un passa alto

è possibile fare lo stesso conto nel dominio del tempo?

Per calcolare il rumore nel dominio del tempo calcoliamo l'autocorrelazione della funzione peso.



Autocorrelation of band-limited white noise

$$R_{xx}(\tau) = \overline{n_x^2} e^{-\frac{|\tau|}{T_n}}$$

T_n noise autocorrelation time
$f_n = 1/4T_n$ noise band-limit

Questa è l'autocorrelazione del rumore bianco passato in un filtro passabasso

Perciò il rumore sarà

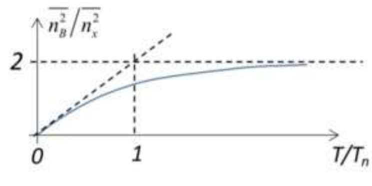
$$\overline{n_B^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) k_{wwB}(\tau) d\tau = \underline{2\overline{n_x^2}} - R_{xx}(T) - R_{xx}(-T)$$

Questo perchè l'autocorrelazione della funzione peso sono 3 delta

2 volte il valore in zero di $R_{xx}(\tau)$

Calcolando otteniamo

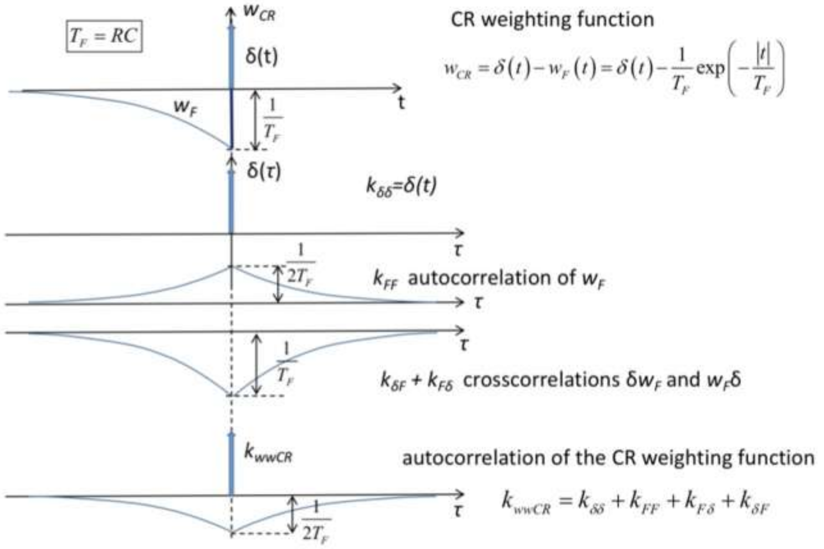
$$\boxed{\overline{n_B^2} = 2\overline{n_x^2} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{T_n}}\right)}$$



- Noise with **very short correlation time** (i.e. very high band-limit) is **doubled**: if $T_n \ll T$ we have $\overline{n_B^2} \approx 2\overline{n_x^2}$
- Noise with **long correlation time** (i.e. very low band-limit) is **strongly attenuated**: if $T_n \gg T$ we have $\overline{n_B^2} \approx \overline{n_x^2} \cdot 2\frac{T}{T_n} \ll \overline{n_x^2}$

Time-domain analysis clearly shows how with band-limited white noise the output noise power of CDS is double of that of a CR constant-parameter filter with equal cutoff, i.e. with $T_F = RC = T$

Filtriamo il rumore bianco con un passa-alto CR (nel tempo)



CR weighting function

$$w_{CR} = \delta(t) - w_F(t) = \delta(t) - \frac{1}{T_F}\exp\left(-\frac{|t|}{T_F}\right)$$

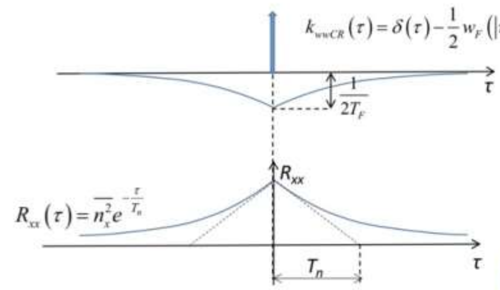
$$k_{wwCR} = k_{\delta\delta} + k_{FF} + k_{F\delta} + k_{\delta F}$$

Dividiamo la funzione peso del CR in 2 una con solo il delta e l'altra con l'esponenziale (non so xè c'è il delta)

Poi facciamo le 2 autocorrelazioni delle 2 componenti e poi le uniamo (crosscorrelazione)

e otteniamo l'autocorrelazione del CR

Moltiplichiamo poi l'autocorrelazione del filtro con l'autocorrelazione del rumore



$$k_{wwCR}(\tau) = \delta(\tau) - \frac{1}{2}w_F(|\tau|) = \delta(\tau) - \frac{1}{2T_F}\exp\left(-\frac{|\tau|}{T_F}\right)$$

$$\overline{n_B^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)k_{wwCR}(\tau)d\tau =$$

$$= R_{xx}(0) - 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\frac{1}{2}w_F(|\tau|)d\tau =$$

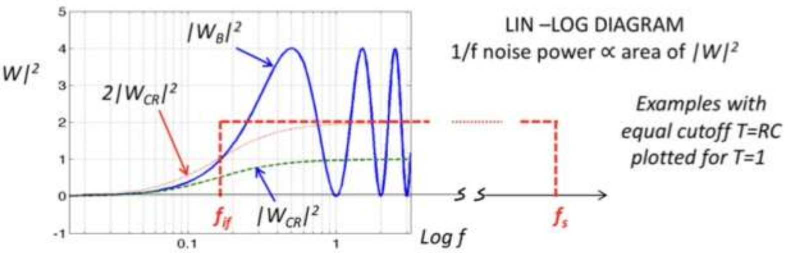
$$= \overline{n_x^2} - \overline{n_x^2}\int_0^{\infty}\frac{1}{T_F}\exp\left[-\tau\left(\frac{1}{T_n}+\frac{1}{T_F}\right)\right]d\tau$$

$$\boxed{\overline{n_B^2} = \overline{n_x^2}\left(1 - \frac{T_n}{T_F+T_n}\right) = \overline{n_x^2}\frac{T_F}{T_F+T_n}}$$

- Noise with **very short correlation time** (i.e. very high band-limit) is practically **passed as it is, not doubled** as for CDS: if $T_n \ll T_F$ we have $\overline{n_B^2} \approx \overline{n_x^2}$ ← NON ABBIAMO PIÙ IL DOPPIO COME NEL CDS
- Noise with **long correlation time** (i.e. very low band-limit) is strongly **attenuated at half the level of CDS**: if $T_n \gg T_F$ we have $\overline{n_B^2} \approx \overline{n_x^2}\cdot\frac{T_F}{T_n} \ll \overline{n_x^2}$ ← SIMILE AL CDS

Usiamo lo stesso approccio (in frequenza) con il rumore 1/f

NON STIAMO PIÙ STUDIANDO IL RUMORE BIANCO!!!



- Quella in verde racchiude l'area del passa alto CR.
- l'area del CDS è quella che sta sotto la linea blu

[Come detto prima il valore oscilla attorno a $2|W_{CR}|^2$

1/f noise power $\overline{n_f^2}$ limited also by a low-pass f_s, but with $f_s >> 1/T$ ($f_s >> 1/RC$)

$$\overline{n_f^2} = \int_0^{f_s}|W(f)|^2\frac{S_B f_C}{f}df = \underline{S_B f_C\int_0^{f_s}|W(f)|^2 d(\ln f)}$$

Ci dice che è solo l'area in un grafico lin-log

At low frequency $f<<1/T$ the $|W_B|^2$ and $|W_{CR}|^2$ have the same cutoff (with $T=RC$).
At higher frequency W_{CR} is constant $|W_{CR}|^2 \approx 1$ whereas the $|W_B|^2$ oscillates around a mean value 2, so that :

$$\int_0^{f_s}|W_B(f)|^2 d(\ln f) \approx 2\int_0^{f_s}|W_{CR}(f)|^2 d(\ln f)$$

VISTO CHE IL VALORE $|W_B|^2$ OSCILLA ATTORNO A $2|W_{CR}|^2$ ALLORA LO APPROSSIMIAMO CON QUESTO VALORE

Anche in questo caso come nel caso del rumore bianco il rumore d'uscita del CDS è 2 volte quello del passa alto CR.

For the CR filter it will be shown that the high-pass band-limit for 1/f noise is

$$f_{if} \approx f_p = \frac{1}{2\pi RC} \qquad \text{and} \qquad \overline{n^2_{f,CR}} = S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_{if}}\right)$$

Che valori di f_S e f_i usiamo? Non ho un valore preciso perché scendono piano.

By comparing the cut-off behavior of CDS and CR, we can conclude that for CDS

$$f_{if} \approx \frac{1}{2\pi T} \qquad \text{and} \qquad \overline{n^2_{f,B}} \approx 2\, S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_{if}}\right)$$

In futuro dimostreremo che valori mettere.

CONCLUSIONI

- Zero-setting by **correlated double sampling (CDS)** produces a high-pass filtering action that limits the power of 1/f noise.
- The **interval T between zero setting and measure in most real cases is quite long** (from a few seconds to several minutes) so that the high-pass **band-limit f_{if}** is quite **low.** This is a main drawback: the filtering is **not very effective** since the 1/f noise power is limited just to a moderately low level, which may be higher than that of white noise.
- Further drawback: **with respect to CR** high-pass filter with equal bandlimit f_{if} the output noise power is **approximately double** . This occurs because in the baseline sampling all frequency components are acquired, but in the subtraction only those with f<<1/T are really effective for reducing the 1/f noise. At higher frequencies
  - components with $f= (2n+1) / 2T$ (n integer) have power enhanced x 4
  - components with $f= n\, 1/T$ (n integer) are canceled, power is zero
  - at the intermediate frequencies the power varies between zero and x 4 (see diagrams)

30.03.2021 ESERCITAZIONE 2h

ESERCIZIO

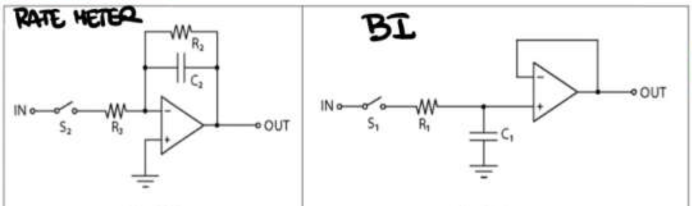


Fig. 1 (a) Fig. 1 (b)

Input signal: square pulse with amplitude V_i and duration T_P=10µs.

Noise: wideband (white) component with unilateral spectral density Sv=(10nV/Hz$^{1/2}$)^2.

B^2/f^2 component (integrated white noise) with unilateral B=1.6 mV Hz$^{1/2}$.

We want to measure the amplitude of signals coming from a low-impedance source (sensor with preamplifier). An auxiliary synchronism signal is available, which points out the arrival time of the signal. Exploit the two analog filters reported in figure 1. It is possible to use additional linear filters to improve the measurement.

a) Considering only the wideband component of the noise, i.e. overall white noise with unilateral spectral density Sv, select the filter parameters for both filters in order to measure the amplitude of each pulse individually. Evaluate the minimum amplitude that can be measured and compare the result with the optimum filter.

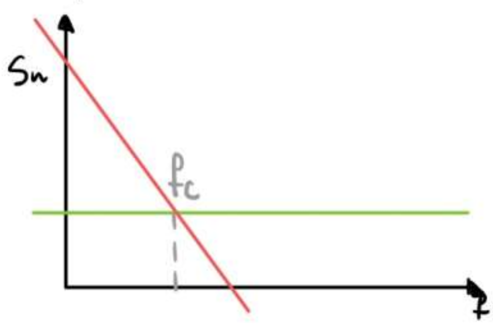
b) At this point, consider also the $1/f^2$ component of the noise. Discuss the weighting function of the matched filter in this case and evaluate the minimum measurable amplitude obtainable with the matched filter. Evaluate the minimum measurable amplitude obtainable with the exact same filters used to solve point a) (**i.e. same parameters**) and compare the results with the minimum signal amplitude that can be measured in these conditions. Discuss if and how the SNR could be improved with a different selection of the filters parameters. Finally, discuss if and how the SNR could be further improved exploiting these filters in conjunction with additional linear filters.

c) The pulse signals are generated by a monitoring system that performs a periodical task. Therefore, the pulses are generated with a repetition rate r_r=1kHz. The signal amplitude slowly varies over time, in a time range of about 1s. Exploit the repetitive nature of the signal to obtain a better SNR and minimum V_i. Explain and discuss how it is possible to exploit the filters of Fig.1 to improve the SNR and explain the differences with respect to the measurement of a single pulse. Select the filter parameters to optimize the measurement and calculate the improvement that can be obtained.

d) Now consider a r_r that slowly varies over time (time range of several seconds) in a range between 1kHz and 2kHz. Discuss if and how it is possible to exploit the same solution of point c) and discuss the results obtainable in this case.

e) Finally consider a statistical repetition rate with a Poisson distribution over time with average repetition rate of 1kHz. Discuss and compare the results that could be achieved with the solution of point b.

Lo spettro del nostro rumore sarà



> Vogliamo misurare l'ampiezza → non ci interessa la forma, quindi la possiamo cambiare

> Parla di segnali non segnale, quindi ci aspettiamo più segnali

• PUNTO a) [si considera solo il rumore bianco]

La parte più importante è "individually" cioè consideriamo gli impulsi singolarmente. Inoltre possiamo usare solo singolarmente i filtri che ci ha dato

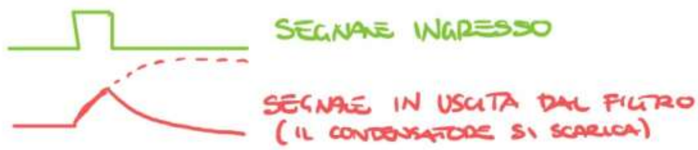
• il circuito a destra è un BI xè c'è uno switch e il condensatore rimane carico quando l'interruttore è aperto.

• il circuito a sinistra è un ratemeter xè il condensatore si scarica anche quando l'interruttore è aperto

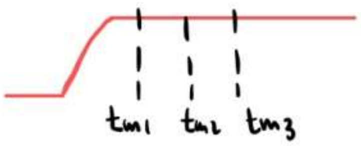
IN tutti e 2 i casi abbiamo che la delta response quando l'interruttore è chiuso è un esponenziale decrescente. Se mettiamo un τ molto grande $\tau >> T_p$ la funzione peso sarà molto simile ad un rect. (vogliamo creare un GI dato il segnale d'ingresso)

Ricordiamo che il ratemeter scarica il condensatore mentre il BI no, tuttavia per essere sicuro di creare un GI con tutti e 2 i circuiti devo resettare i condensatori in tutti e 2 i circuiti.

Nel Ratemeter l'output sarà un esponenziale decrescente ma decresce molto lentamente perché noi abbiamo deciso di avere τ molto alto. Questo fa sì che per avere l'SNR ottimo abbiamo un solo tm



Nel caso del BI questo "tiene in memoria" il valore quindi possiamo scegliere "qualsiasi tm" e comunque abbiamo SNR ottimo



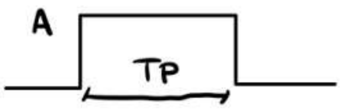
Nella realtà non possiamo mettere qualsiasi tm xè prima del prossimo segnale dovrò resettare il condensatore

Abbiamo creato un GI con tutti e 2 i filtri ma notiamo che ci sono differenze

• Nel caso del rate meter sappiamo che $R_2C_2 >> T_p$ → abbiamo un grado di libertà con R_1 (per gestire il guadagno)

• Nel caso del BI abbiamo che $RC >> T_p$ → non abbiamo gradi di libertà

IN TUTTI E 2 I CASI ABBIAMO CHE LA FUNZIONE PESO È



È UGUALE X TUTTI E 2 I FILTRI XÈ TRANNE L'AMPIEZZA HANNO LA STESSA FUNZIONE PESO

L'SNR È DUNQUE

$$SNR = \frac{S = A \cdot V_1 \cdot T_p}{N = \sqrt{\frac{S_V}{2} A^2 \cdot T_p}} = \frac{V_1}{\sqrt{\frac{S_V}{2}}} \sqrt{T_p} \qquad V_{1\,MIN} = 2{,}24\,\mu V$$

(Deve aver usato le formule del GI)

NOTIAMO CHE QUESTA FUNZIONE PESO È GIÀ L'OPTIMUM FILTER, QUINDI L'SNR È LA STESSA

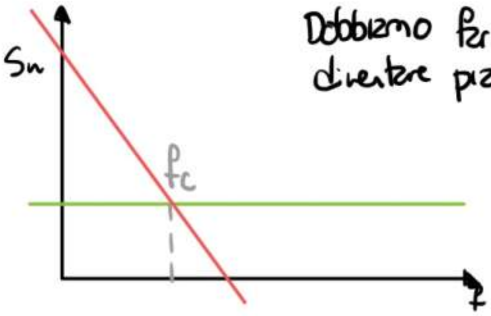
• PUNTO b)

Abbiamo sia rumore bianco e rumore $1/f^2$

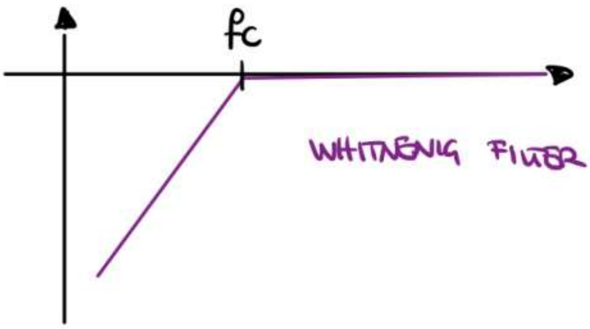
DOBBIAMO REALIZZARE IL FILTRO OTTIMO

- l'abbiamo già realizzato prima solo nel caso del rumore bianco, se ci chiede di farlo di nuovo qualcosa di diverso ci sarà
- il matched filter funziona solo con la white noise → dobbiamo usare un whitening filter

Dato lo spettro del rumore:



Dobbiamo farlo diventare piatto



Come implementiamo questo whitening filter? Con un passalto semplice tipo un CR.

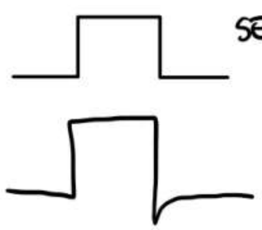
Dobbiamo fare sì che $f_p = \frac{1}{2\pi RC} = f_c$

Noi sappiamo che $B^2/f_c^2 = S_v$ → $f_c = \frac{B}{\sqrt{S_v}} = \frac{1{,}6\,mV\sqrt{Hz}}{10\,nV/\sqrt{Hz}} = 160\,KHz$

Questo significa che nel filtro passalto $RC = 1\,\mu s$

Dobbiamo capire l'effetto del filtro sia sul segnale che sul rumore

- RUMORE → Il rumore di output sarà bianco e sarà S_v
- SEGNALE →



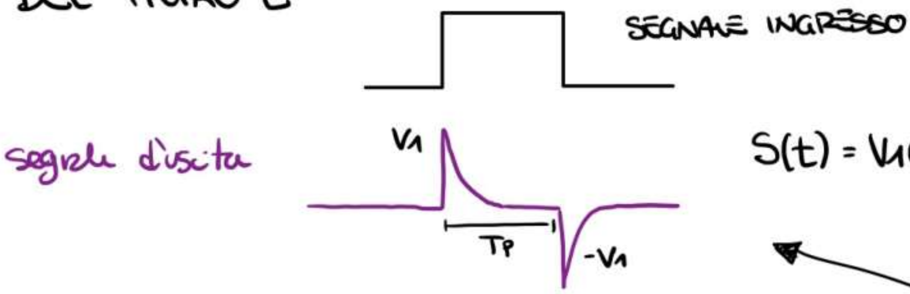
SEGNALE D'INGRESSO

Durata del segnale

con $T_{ca} >> T_p$ il segnale rimane circa uguale

LA NOSTRA τ È FISSATA DA f_c QUINDI ATTENZIONE!! INFATTI x NOI QUESTO È SBAGLIATO

ATTENZIONE PERÒ LA NOSTRA τ_{CR} È $\ll T_P$ QUINDI LA RISPOSTA DEL FILTRO È



$$S(t) = V_1 e^{-\frac{t}{\tau_{CR}}} \cdot u(t) + \left(-V_1 e^{-\frac{t-T_P}{\tau_{CR}}} \cdot u(t)\right)$$

CERCHIAMO ORA IL MATCHED FILTER (FUNZIONE PESO = AL SEGNALE)

WHITENING FILTER + MATCHED FILTER danno in uscita una tensione minima misurabile di:

$$V_{i\,MIN} = 7{,}07\,\mu V$$

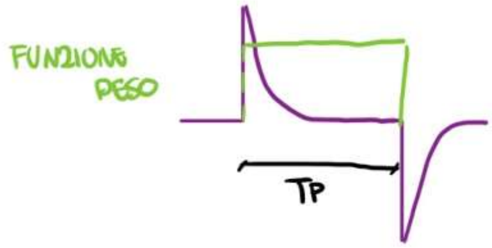
(ci ha dato solo il risultato i conti li dobbiamo fare noi)

>CONTINUIAMO CON IL PUNTO B)

USARE IL GI EQUIVALENTE CALCOLATO NEL PUNTO a) AL POSTO DEL MATCHED FILTER

Nel punto a) abbiamo usato un Gated Integrator equivalente con $T_G = T_P$.
Non possiamo usare il GI senza un withening filter altrimenti prendiamo tutto il rumore $1/f^2$ e la potenza del rumore va a $+\infty$.
Usiamo quindi il whitening filter prima del GI, sappiamo già la forma del segnale e il rumore.

Noi abbiamo $T_G = T_P$, dove mettiamo la nostra funzione peso?



L'unica cosa che possiamo fare è integrare solo tutto il positivo o solo tutto il negativo

(Se li avessimo presi tutti e 2, cosa che non possiamo fare visto che $T_G = T_P$ ci sarebbe venuto fuori $\emptyset$)

Calcoliamo l'SNR del WF + GI

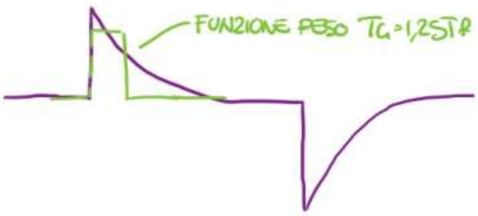
$$\frac{S = V_1 \cdot \tau_F \cdot A}{N = \sqrt{\frac{S_V}{2} \cdot A \cdot T_P}}$$

è lo stesso rumore visto prima perché anche qui abbiamo il rumore bianco

SI OTTIENE CHE $V_{i\,MIN} = 22{,}36\,\mu V$

X OTTENERE RISULTATI MIGLIORI CAMBIANDO I VALORI:
Se potessi cambiare T_G LO FAREI $T_G = 1{,}25\,T_P$ PERCHÈ COME ABBIAMO VISTO NEL TUTORIAL PRECEDENTE L'SNR MAX SI HA CON QUESTI VALORI

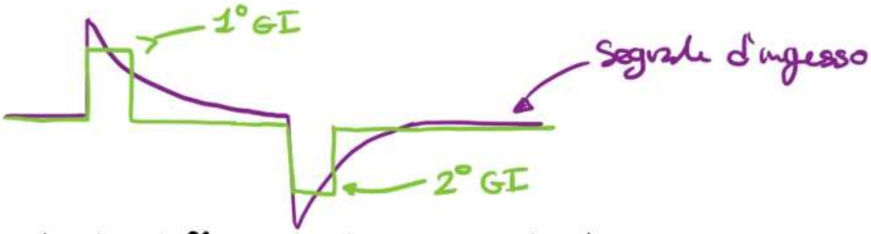
In quest ultimo caso avremmo che



Con questo si ottiene $V_{i\,MIN} = 11{,}08\,\mu V$

• ALTRO MODO PER MIGLIORARE L'SNR ?

Se siamo in grado di "salvare" il valore del primo impulso filtrato e filtrare anche il secondo sempre con un GI con $T_G = 1{,}25T_F$ e poi sottrarre i 2 valori in modo che non si annullino allora possiamo migliorare l'SNR.



Con 2 GI e facendo la differenza dei 2 risultati miglioriamo la sensibilità e perciò abbiamo un miglioramento di $\sqrt{2}$

$$V_{i\,MIN} = \frac{11{,}08\,\mu V}{\sqrt{2}} = 7{,}83\,\mu V$$ (siamo molto vicini al filtro ottimo)

Abbiamo un miglioramento di $\sqrt{2}$ perché prendiamo lo stesso segnale 2 volte e lo stesso rumore sempre 2 volte. Facendo l'SNR ci viene che

$$SNR = \frac{2 \cdot S}{\sqrt{2 \cdot N}} = \sqrt{2}\, SNR_{PRIMA}$$

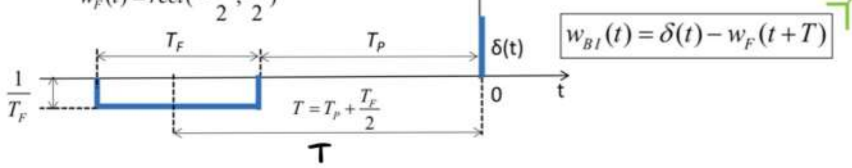
SNR + alto vuol dire meglio quindi va benissimo così

01.04.21 3h lezione

Come abbiamo capito l'altro giorno ogni volta che misuriamo un segnale prendiamo uno zero. Abbiamo visto che questo va bene perché fa da passa alto per il rumore 1/f ma raddoppiamo il rumore bianco (il rumore in generale).

MISURA DELLO ZERO: noi facciamo un sampling della baseline, vogliamo prendere solo le frequenze vicino alla DC (costante) ma noi usiamo un delta per fare questo (questo non va bene xè con il delta prendo tutte le frequenze). Possiamo fare sì di fare questo sampling della baseline con un passabasso. Vediamo se migliora qualcosa

CDS - Filtered Baseline



(distanza tra il delta e il centro del rect)

Funzione peso totale

Noi stiamo ancora considerando $T_P >> T_F$ (capiremo dopo perché)

Calcoliamo

$$W_{BI}(\omega) = F[w_{BI}(t)] = F\left[\delta(t) - w_F(t+T)\right] = 1 - e^{i\omega T} W_F(\omega)$$ ← Trasformata di Fourier

since $W_F(\omega) = \mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T_F}{2}\right)$ is real at any ω , we have ← x è un rect

$$W_{BI}(\omega) = 1 - W_F(\omega)\cos\omega T - iW_F(\omega)\sin\omega T$$ ← usiamo eulero su $e^{i\omega T}$

$$\left|W_{BI}(\omega)\right|^2 = 1 + W_F^2(\omega) - 2W_F(\omega)\ \cos\omega T$$ ← il quadrato della parte reale $(1-W_F(\omega)\cos\omega T)^2$ e $(iW_F(\omega)\sin\omega t)$ e poi il doppio prodotto

- At low frequency $(f << 1/T)$ it is $W_F(f) \approx 1$ and W_{BI} has a high-pass cutoff equivalent to a CR differentiator with $RC=T$

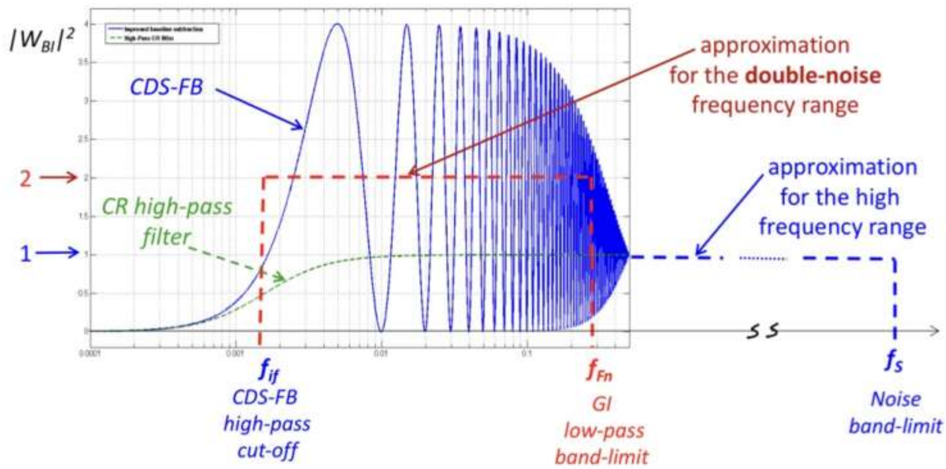
$$\boxed{\left|W_B(\omega)\right|^2 \approx \omega^2 T^2 = \omega^2\left(T_P + \frac{T_F}{2}\right)^2}$$ ← Approssimazione

$$\boxed{f_{if} \approx \frac{1}{2\pi T} = 1\Big/2\pi\left(T_P + \frac{T_F}{2}\right)}$$ cutoff frequency

WF è un passabasso (GI) quindi per f piccole → 1 e per f grandi → 0

- At high frequency above the GI low-pass cutoff $(f >> f_n = 1/2T_F)$ it is $|W_F(f)| \approx 0$ so that $|W_{BI}(f)|^2 \approx 1$
- In the intermediate range $(1/T << f << 1/2T_F)$ it is roughly $W_F(f) \approx 1$ so that roughly it is $|W_{BI}(f)|^2 \approx 2(1-\cos 2\pi f T)$. In this range the average value is about $|W_{BI}(f)|^2 \approx 2$, hence we can denote it as **double-noise range**

Graficchiamo



Example of CDS-FB with $T_P = 101$ and $T_F = 2$

for comparison, a CR filter with equal cutoff $RC = T = T_P + \frac{T_F}{2}$ is reported

m: NOI DOBBIAMO VEDERE QUESTO GRAFICO

NOTIAMO CHE PER f ALTE VA A 1 E PER f BASSE CRESCE COME UN PASSA ALTO.

NOTIAMO CHE QUI ABBIAMO SEMPRE LA SINUSOIDE DI CDS-FB MA SOLO NELLA BANDA DOVE C'È IL GI PASSABASSO

NOI DOPPIAMO IL RUMORE SOLO NELLA BANDA DEL GI. PRIMA IL RUMORE ERA DOPPIATO FINO AL NOISE BAND-LIMIT

• CALCOLIAMO IL RUMORE

$$\boxed{\overline{n^2} = \int_0^{f_S} S(f)\left|W_{BI}(\omega)\right|^2 df = \int_0^{f_S} S(f)\left[1 + W_F^2 - 2W_F\ \cos 2\pi f T\right] df}$$ ← Formula del rumore

By approximating W_{BI} as outlined, the noise power can be approximately evaluated

1/f noise $\quad \overline{n^2_{f,BI}} \approx S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_{if}}\right) + S_B f_C \ln\left(\frac{f_{Fn}}{f_{if}}\right)$

è l'area sotto la curva verde del grafico prima

è l'area della curva rossa

white noise $\quad \overline{n^2_{B,BI}} \approx S_B\left(f_S - f_i\right) + S_B\left(f_{Fn} - f_i\right) \approx S_B f_S + S_B f_{Fn}$

Capiamo che il rumore si doppia solo tra f_{iF} e f_{Fn}

Vale la stessa cosa anche nel caso del rumore bianco

In **CDS-FB the noise-doubling effect is strongly reduced** with respect to the simple CDS: it occurs only in the range from the low-frequency cutoff to the GI filtering band-limit.

In cases **where the GI band-limit is much smaller than the noise band-limit** ($f_S >> f_{Fn}$) the effect of noise doubling is practically negligible

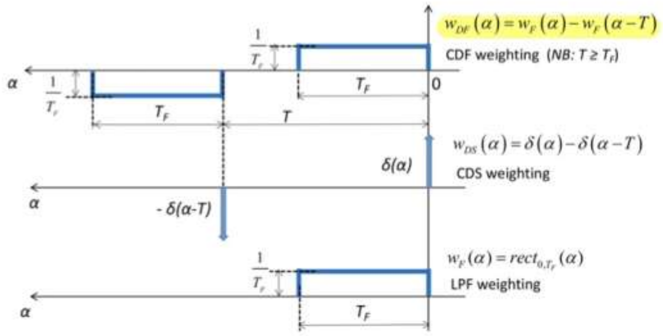
$$\overline{n^2_{f,BI}} \approx S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_{if}}\right) \qquad \overline{n^2_{B,BI}} \approx S_B f_S$$ ← TORNIAMO AI VALORI STANDARD

Tipicamente noi abbiamo $f_S >> f_{Fn}$ quindi possiamo approssimare.
Cioè se facciamo una lettura molto lunga della baseline (cosa realistica) allora possiamo approssimare il rumore come non doppio.

CORRELATED DOUBLE FILTERING

(Noi stiamo usando ancora un delta per acquisire il segnale, dalle lezioni precedenti sappiamo che acquisire un segnale con un delta non è ideale)

COSA SUCCEDE SE USIAMO UN PASSA BASSO (GI) ANCHE PER IL SEGNALE?



Abbiamo già studiato il caso con i delta perciò possiamo prendere i risultati di quello e dire che la nostra nuova funzione peso è la convoluzione tra un rect e la funzione peso dei 2 delta

CDF weighting = convolution of CDS weighting with LPF weighting

$$w_{DF}(\alpha)=w_{DS}(\alpha)*w_F(\alpha)$$

Since in time domain $w_{DF}(\alpha)=w_{DS}(\alpha)*w_F(\alpha)$

in frequency domain it is $W_{DF}(\omega)=W_{DS}(\omega)\cdot W_F(\omega)$

for noise computation $|W_{DF}|^2=|W_{DS}|^2\cdot|W_F|^2$

and since $|W_{DS}|^2=2(1-\cos\omega T)=4\sin^2(\omega T/2)$ — Funzione peso del Correlated double sampling (l'abbiamo studiata l'altro giorno)

we have

$$\boxed{|W_{DF}|^2=2(1-\cos\omega T)\cdot|W_F|^2=4\sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right)\cdot|W_F|^2}$$

$W_F(\omega)$ è un sinc

The main features of CDS reflect the fact that it is a combination of CDS and LPF :

1. **The LPF cuts the noise at high frequencies** with its LPF band-limit f_F
2. **The CDS cuts the noise at low frequencies** with its HPF band-limit $f_{iD} \approx 1/2\pi T$
3. **The CDS enhances the noise in the passband between the band-limits** (with enhancement factor roughly 2)

(Nelle slide continua con un esempio)

QUI ABBIAMO 2 GI (rect) DELLA STESSA DURATA, STIAMO RADDOPPIANDO ANCORA IL RUMORE?
(nel senso, quando nella realtà noi non usiamo un filtro e non un delta doppiamo sempre il rumore?) Ogni volta che faccio una misura doppio il rumore?

OVVIAMENTE CON QUEST'ULTIMA TOPOLOGIA MIGLIORO L'SNR, MA PER FARE QUESTO ABBIAMO DOPPIATO IL RUMORE INIZIALE?
(Ricordiamo che possiamo non considerare il doppio del rumore come nel caso GI e δ perché qui i 2 GI hanno lo stesso T, mentre nell'altro caso il GI ha banda molto più stretta del delta)

Per risolvere questo posso sampleare la baseline con un GI molto più largo di quello che uso nel caso del segnale così torno nel caso GI e δ così che posso non considerare il doppio del rumore

(Spiegare questo nell'esame se dice che c'è da prendere uno zero)

HIGH PASS FILTERS 2

Supponiamo di avere un impulso + 1/f noise + rumore bianco

Nel caso di $1/f^2$ sbiancavamo il rumore easy ma nel caso 1/f è moolto difficile farlo.
Dobbiamo trovare un approccio differente, dobbiamo ricordare che

a) for **1/f noise** the filtered power

- mainly depends on the span of the band-pass measured by the **bandlimit ratio**, hence it is **markedly sensitive to the lower bandlimit level**
- **weakly** depends on the **shape** of the filter weighting function

b) for **wideband noise** the S/N

- depends on the span of the band-pass measured by the **bandlimit difference**, hence it is **weakly sensitive to the lower bandlimit level**
- markedly depends on the shape of the weighting function

an alternative approach leading to quasi-optimum filtering can be devised

Allora usiamo questa procedura (non è quella ottima)

1) Mi dimentico completamente del 1/f e faccio il filtro ottimo per quello che resta
2) Alla fine di questo filtro aggiungo l' 1/f e computo quanto rumore porta l' 1/f, se sono fortunato il valore di questo rumore è infinitesimo. se sono sfortunato e il rumore non è approssimabile devo aggiungere un pezzetto senza peggiorare molto il filtraggio del rumore bianco.

VOGLIAMO CHE NEL CASO SFORTUNATO IL FILTRO SIA:

- design an **additional filter** for limiting the 1/f noise power without worsening excessively the filtering of the wideband noise.

It is obviously a **high-pass filter,** which must combine the goal of

a) reducing efficiently the 1/f noise power

with the further requirements of

b) limiting to tolerable level the **increase of the filtered wide-band noise**

c) limiting to tolerable level the **reduction of the output signal amplitude**

ESEMPIO

The issue is better clarified by considering as FIRST STEP the **optimum filter for signal and wide-band noise (or its approximation)** composed by

- Noise-whitening filter, with output white noise S_B and pulse signal. Let f_S be the upper band-limit and A the center-band amplitude of the pulse transform.
- Matched filter, which has weighting function matched to the pulse signal from the whitening filter and is therefore a low-pass filter with upper bandlimit f_S. The output has a signal with amplitude roughly $V_S \approx A f_S$ and band-limited white noise with band-limit f_S and power

$$\overline{n_B^2} \approx S_B f_S$$

For focusing the ideas, let's consider a well known specific case: filtering of pulse-signals from a high impedance sensor with an approximately optimum filter, i.e. with matched filter approximated by a constant-parameter RC integrator.
In this case, the output noise corresponding to the input wide-band noise is a white noise spectrum with band-limit set by a pole with time constant $RC=T_{nc}$

Usiamo il filtro passa-alto CR, ci risolve il problema del doppare il rumore
(è uno dei limiti richiesti)

Let's now take into account also a 1/f noise source, which brings at the whitening filter output a significant 1/f spectral density $S_B f_C / f$.

At high frequency, the 1/f component is limited by the upper bandlimit f_S of the matched filter.

At low frequency, the 1/f component can be limited by a lower band-limit f_i set by an additional constant-parameter filter. With $f_i << f_S$ the output power of the *1/f* noise can be evaluated as

$$\overline{n_{fn}^2} \approx S_B f_C \ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)$$

However, the constant-parameter high-pass filter operates also on the signal: it attenuates the low frequency components and thus causes a loss in pulse amplitude, hence a loss in S/N. The reduced amplitude is roughly evaluated as

$$V_S \approx A(f_S - f_i) = A f_S \left(1 - f_i/f_S\right)$$

For limiting the signal loss, f_i/f_S must be limited; e.g. for keeping loss < 5% it must be

$$f_i/f_S \le 0{,}05 \quad \text{that is} \quad \ln\left(f_S/f_i\right) \ge 3$$

Settiamo fi come frequenza minore di fs

Perdiamo una parte di segnale, quella compresa tra 0 e fi. Imponiamo che ci sia un limite sulla perdita del segnale (è uno dei limiti richiesti)

Ora vogliamo portare il rumore di 1/f <= a quello del rumore bianco (è uno dei limiti richiesti)

For reducing the 1/f noise to the white noise level or lower

$$S_B f_C \ln(f_S/f_i) \le S_B f_S$$

Sarebbe $S_B f_C \ln(f_S/f_i) \le S_B(f_S - f_i)$ ma $f_i \ll f_B$ e quindi approssimiamo

We need that $$f_C \le \frac{f_S}{\ln(f_S/f_i)}$$

and since for keeping the signal loss <5% it must be $\ln(f_S/f_i) \ge 3$

we need to have $$f_C < f_S/3$$

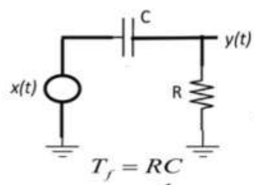
This means that the goal can be achieved only if the 1/f noise component is low or moderate. Note that **f_C and f_S are data** of the problem, they cannot be changed. In cases where f_C exceeds the above limit, a constant-parameter high-pass filter is NOT a suitable solution for reducing the 1/f noise power.

CONCLUSION: constant-parameter high-pass filters can be useful as additional filter for limiting the 1/f noise, but just in cases with moderate 1/f noise intensity, because of their detrimental effect on the signal pulse amplitude.

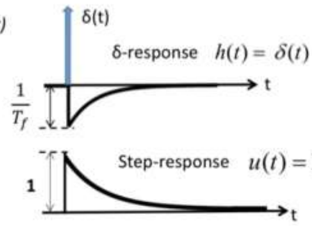
Non possiamo fare nulla, non abbiamo controllo sulle variabili: possiamo solo vedere se siamo in una situazione fortunata o no.

Se no siamo nella cacca perché nemmeno il filtro passa alto è servito e quindi per ridurre questo rumore dobbiamo perdere qualcosa del segnale

RECAP SUL FILTRO CR



$$T_f = RC$$
$$f_P = \frac{1}{2\pi T_f}$$



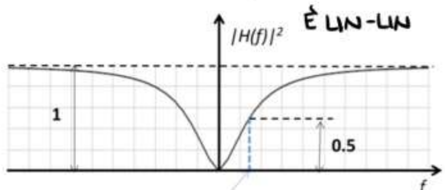
δ-response $h(t) = \delta(t) - 1(t)\frac{1}{T_f}e^{-\frac{t}{T_f}}$

Step-response $u(t) = 1(t)\, e^{-\frac{t}{T_f}}$

Transfer function

$$H(f) = \frac{j\,2\pi f T_f}{1 + j\,2\pi f T_f}$$

$$|H(f)|^2 = \frac{(2\pi f T_f)^2}{1 + (2\pi f T_f)^2}$$



È LIN-LIN

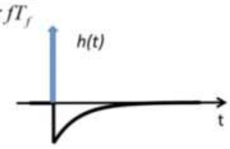
3 dB frequency (Pole) $f_p = 1/2\pi T_f$

Notiamo che il passa-alto è un passa tutto - un passa basso.

Infatti se vediamo la FDT di un HPF e la risposta al delta vediamo che sono un passatutto (1) e il passabasso

Transfer function $H(f) = 1 - \frac{1}{1 + j\,2\pi f T_f} = \frac{j\,2\pi f T_f}{1 + j\,2\pi f T_f}$

δ-response $h(t) = \delta(t) - 1(t)\frac{1}{T_f}e^{-\frac{t}{T_f}}$



il punto è che noi vogliamo calcolare l'equivalent noise bandwith, vogliamo approssimare il rumore bianco anche qui con un rect

High-pass band-limit for White noise

Premise: with only a high-pass CR filter the white noise power $\overline{n_B^2}$ is divergent, therefore we consider here also a low-pass filter with band-limit $f_s \gg 1/RC$.

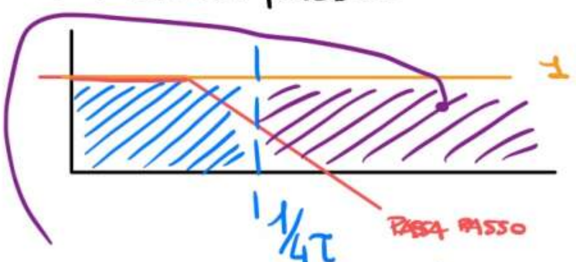
The high-pass band-limit f_i of the CR filter with weighting function *W(f)* is defined by

$$\overline{n_B^2} = S_B \int_0^{f_S} |W(f)|^2 df = S_B \int_0^{f_S} \frac{(f/f_p)^2}{1 + (f/f_p)^2} df = \underline{S_B(f_S - f_i)}$$

Voglio poter scrivere così, ma quale sarà f_i.

Ricordiamo che passa alto = passa tutto - passa basso

Nel caso del passabasso avevamo fatto



Sarà questa quindi l'equivalent noise bandwith per il passa-alto

L'equivalent noise bandwith per il passabasso

The computation of the integral can be avoided by recalling that

CR high pass filter = all-pass – RC low-pass filter

and therefore

high-pass band-limit f_i of the CR filter = low-pass band-limit f_h of the RC filter

$$f_{i\,CR} = f_{h\,RC} = \frac{1}{4RC}$$

Non vogliamo fare l'integrale vogliamo scrivere così

f_s è quello che limita il rumore bianco

Per il rumore 1/f

Passiamo in lin-log

High-pass band-limit for 1/f noise

Premise: with only a high-pass CR filter the 1/f noise power $\overline{n_f^2}$ is divergent, therefore we consider here also a low-pass filter with a high band-limit $f_s >> 1/RC$

The high-pass band-limit f_{if} of the CR filter is defined by

$$\overline{n_f^2} = S_B f_c \int_0^{f_S} \frac{\left(f/f_p\right)^2}{1+\left(f/f_p\right)^2} \frac{df}{f} = S_B f_c \int_{f_{if}}^{f_S} \frac{df}{f} = S_B f_c \ln\left(\frac{f_S}{f_{if}}\right)$$

In this case the first integral is fairly easily computed and shows that

$$f_{if} = \frac{f_p}{\sqrt{1+\left(f_p/f_s\right)^2}}$$

that is, for $f_s >> f_p$

$$\boxed{f_{if} \approx f_p = \frac{1}{2\pi RC}}$$

esattamente la frequenza del polo

(NON dobbiamo confonderci tra questo e quello del rumore bianco per l'esame)

BAND-LIMITS AND NOISE POWER

fs è importante per limitare sia il rumore bianco che quello 1/f

- **The upper frequency limit f_S:**
  - is necessary for limiting the white noise power
  - is useful also for limiting the 1/f noise power
  - the level of f_S is dictated by the pulse signal to be measured

- **The lower frequency limit f_i:**
  - is necessary for limiting the *1/f* noise power,
  - the selected level of f_i is conditioned by the pulse signal, it cannot be arbitrary
  - however, the reduction of *1/f* noise is significant even with fairly low f_i, that is with f_S/f_i values that are high, but anyway finite.

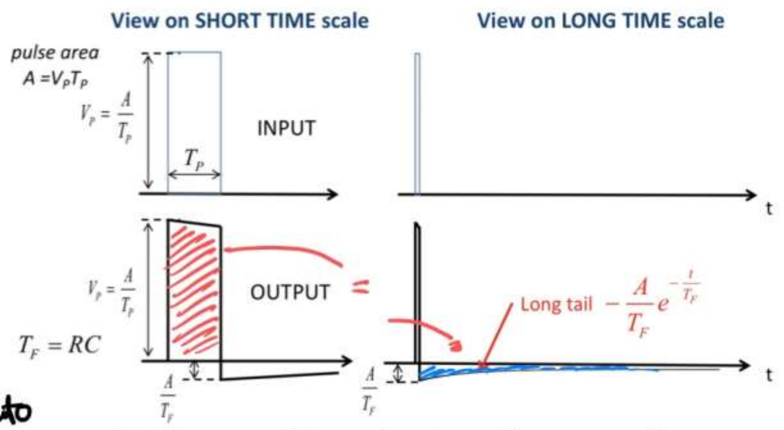
USO DEI FILTRI PASSA ALTO CR E RECT IN SEQUENZA

Per non perdere segnale dobbiamo mettere fi molto vicino a Ø oppure avere molto τ.

Let's look in detail the effect of a high-pass filter ($RC = T_F$) on a pulse signal

INPUT →

OUTPUT →

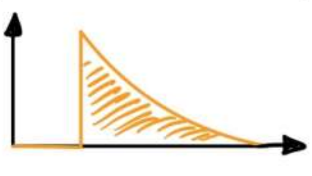


la coda è molto lunga perché TF è molto grande

l'area della coda ha area uguale al simil rect perché l'uscita di un filtro passa alto deve avere componente in DC = Ø quindi area nulla

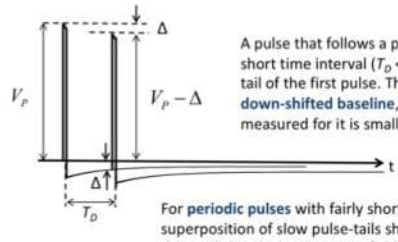
NB: DC transfer of CR is zero → net area of the output signal is zero

MA SE L'AREA DOVREBBE ESSERE Ø COM'È CHE L'USCITA AD UN GRADINO DEL CR È: (COME FA A NON ESSERE Ø)



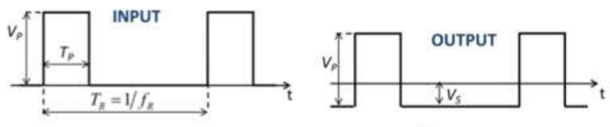
L'output ha area = Ø solo se l'area in ingresso è finita visto che lo step ha area infinita qui l'area può non essere zero.

TORNANDO A NOI NOTIAMO CHE LA CODA DEL SEGNALE È UN PROBLEMA XÈ SE ABBIAMO SEGNALI PERIODICI QUESTI INIZIERANNO CHE C'È ANCORA LA CODA. QUESTO FARÀ SÌ CHE CI SIA UNO SHIFT CHE PORTERÀ LA TOTALE AREA A Ø



A pulse that follows a previous one within a fairly short time interval ($T_D < 5\,T_F$) steps on the slow tail of the first pulse. Therefore, it **starts from a down-shifted baseline**, so that the amplitude measured for it is smaller than the true one.

For **periodic pulses** with fairly short repetition period $T_R << T_F$, the superposition of slow pulse-tails shifts down the baseline by a V_S that makes zero the net area of the output signal



Repetition-rate-dependent baseline-shift $V_S = V_P \dfrac{T_P}{T_R} = A\, f_R$

VANTAGGI E SVANTAGGI DEL CR

The high-pass filtering (differentiator action) of the CR filter has **MIXED effects.**

- The effect **on noise is ADVANTAGEOUS:** by cutting off the the low frequencies it markedly decreases the 1/f noise power (and mildly reduces the white noise power)
- The effect **on the signal is DISADVANTAGEOUS**:

➢ it **decreases the signal amplitude** by cutting off the low frequencies of the signal , hence f_i must be kept low ($f_i << f_S$ of the pulse) in order to limit the signal loss. However, this limits also the reduction of 1/f noise

➢ it **generates slow tails after the pulses**, which shift down the baseline and thus cause an error in the measured amplitude of a following pulse

➢ With a **periodic** sequence of equal pulses, all pulses find the **same baseline shift**. The amplitude error is constant, sistematically dependent on the repetition rate.

➢ With **random-repetition** pulses (e.g. pulses from ionizing radiation detectors) the pulses occur randomly in time. Hence the random superposition of tails produces a **randomly fluctuating baseline shift**. The resulting amplitude error is random: in this case the effect is equivalent to that of an additional noise source.

CONCLUSION: a differentiator action is **desirable on noise**, but **NOT on the signal.**

WANTED: not a constant-parameter differentiator, but a true **Base-Line Restorer (BLR)**

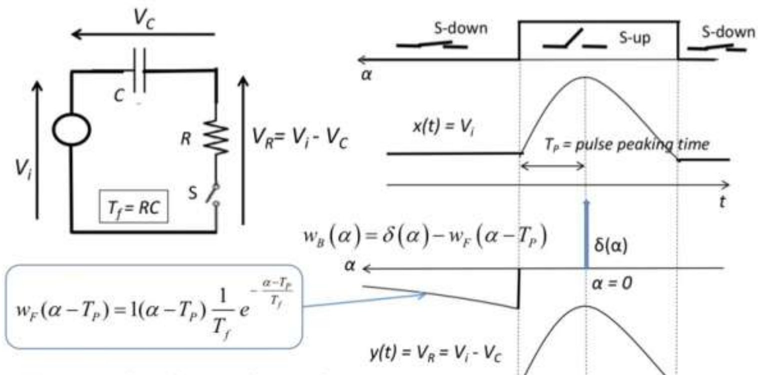
Per il rumore il CR è molto buono ma purtroppo ha quello di rovinare il segnale

Troveremo un modo per applicare il CR solo al rumore. In pratica faremo in modo di filtrare solo il rumore con un filtro a parametri non costanti

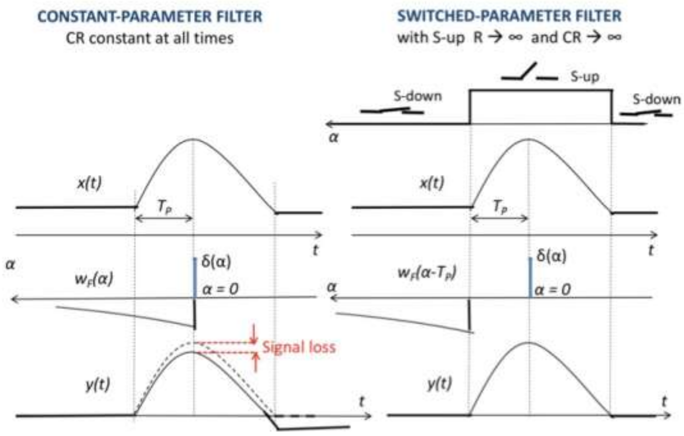
Aggiungiamo uno switch al CR in modo che chiudiamo l'interruttore solo quando vogliamo filtrare il rumore e lo apriamo quando non vogliamo modificare il segnale

BASELINE RESTORER (non tocchiamo il segnale)

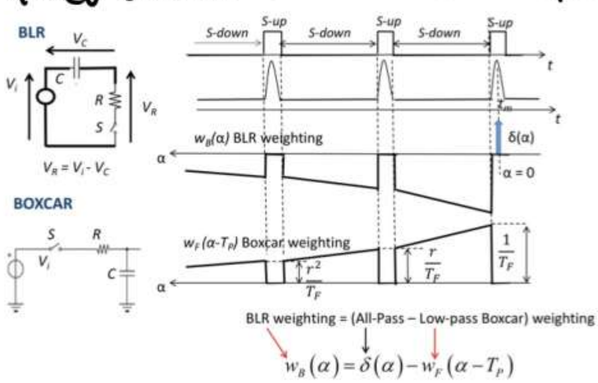
High-pass filtering action **on the noise** and **NOT on the signal: switched-parameter** CR filter with CR → ∞ when signal is present, finite CR = T_F when no pulse is present



As S is open at the pulse onset (at $\alpha = T_P$), charging of C stops and voltage V_C stays constant at the stored value



Noi ci ricordiamo che il Passa alto è un passa tutto - passa basso e noi conosciamo diversi passabasso. tipo possiamo usare un boxcar solo che qui lo usiamo con il rumore. Chiudiamo lo switch quando abbiamo il rumore e lo apriamo quando c'è il segnale



BLR weighting = (All-Pass – Low-pass Boxcar) weighting

$$w_B(\alpha) = \delta(\alpha) - w_F(\alpha - T_P)$$

08.04.2021 TUTORIAL 3h

CONTINUIAMO CON LO SCORSO ESAME PUNTI c), d), e)

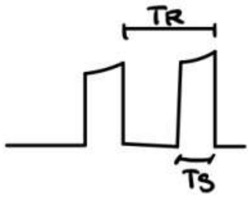
Ricordiamo che il segnale di interesse è

c) The pulse signals are generated by a monitoring system that performs a periodical task. Therefore, the pulses are generated with a repetition rate r_r=1kHz. The signal amplitude slowly varies over time, in a time range of about 1s. Exploit the repetitive nature of the signal to obtain a better SNR and minimum V_i. Explain and discuss how it is possible to exploit the filters of Fig.1 to improve the SNR and explain the differences with respect to the measurement of a single pulse. Select the filter parameters to optimize the measurement and calculate the improvement that can be obtained.

Data la natura ripetitiva del segnale vogliamo migliorare l'SNR

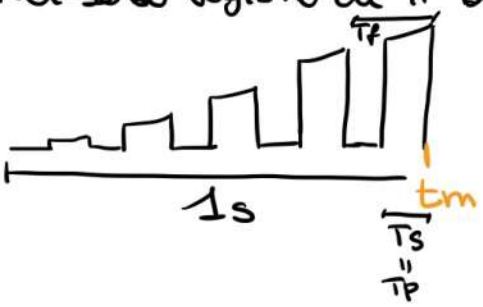
Dato che il segnale varia lentamente possiamo usare un BOXCAR integrator.

Il BOXCAR INTEGRATOR HA UNA FUNZIONE PESO DEL TIPO



Diamo il massimo peso all'ultima misurazione e esponenzialmente meno a quelle passate

Dobbiamo dimensionare TF che è la costante RC del BOXCAR, la dimensioniamo in modo che la funzione peso sia = ∅ dopo 1s da tm.
Nel senso vogliamo che il boxcar non prenda la variazione del segnale



Noi sappiamo che nel boxcar l'esponenziale cala solo quando l'interruttore è chiuso. quindi nella realtà l'esponenziale va a zero in meno di 1 secondo.

Per fare questo dobbiamo tenere conto della frequenza /ripetizione degli impulsi.

Allora la costante di tempo TF è : $T_F = \frac{1s}{5} \cdot \frac{T_S}{T_R} = 2ms$

5 xè è l'approssimazione di 4,6 per mandare l'esponenziale a ∅

Notiamo che $T_F \gg T_S$ e quindi il peso sul singolo impulso è pressoché costante, abbiamo come un GI su ogni impulso in cui poi applichiamo la media a esponenziale

• Con il GI sul singolo impulso avevamo misurato $V_{MIN} = 2,24\mu V$

• il fattore migliorativo del BOXCAR è :

$$IF = \sqrt{\frac{2 T_F}{T_S}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2ms}{10\mu s}} = 20$$

Questo significa che l'ampiezza minima misurabile è ridotta di un fattore 20

$$V_{i_{MIN_{BI}}} = 112nV$$

Sul singolo impulso il meglio che potevamo fare era il GI, sul treno di impulsi grazie al BI riusciamo a fare molto meglio.

Ricordiamo che l'esercizio ci dava la possibilità di usare 2 filtri il BI o l'Ratemeter proviamo a fare lo stesso esercizio con questo filtro

In generale nel Ratemeter l'esponenziale scende anche a interruttore chiuso, quindi

$$T_F = \frac{1s}{5} = 200mS$$ (La costante di tempo RC del Ratemeter è molto più grande di quella del BI)

"(Anche qui $T_F >> T_P$), allora anche qui posso partire dal GI e fare poi una "media esponenziale".

il fattore di miglioramento del Ratemeter è: $IF = \sqrt{2T_F \cdot \nu_r} = \sqrt{2 \cdot 200mS \cdot 1KHz} = 20$

Otteniamo lo stesso identico numero ⟶ $= 20$

Tra i 2 filtri cambia solo la costante di tempo RC ma abbiamo la stessa SNR e V_{MIN}.

Punto d)

d) Now consider a r_r that slowly varies over time (time range of several seconds) in a range between 1kHz and 2kHz. Discuss if and how it is possible to exploit the same solution of point c) and discuss the results obtainable in this case.

il fattore di miglioramento del BI non dipende da ν_r mentre quello del RATEMETER dipende da ν_r. MA quale dei 2 è meglio usare?

Quindi nel caso del BI anche se varia ν_r abbiamo lo stesso valore trovato in c)

Con il RATEMETER questo non succede ma quando variamo l'ν_r abbiamo una variazione dell'uscita xè più alto è il repetition rate maggiore è l'SNR mentre minore è lo stesso più cala l'SNR. Questo significa che l'SNR varia nel tempo.

Il Fattore di miglioramento minimo del RATEMETER è $IF_{MIN} = \sqrt{2 \cdot 200mS \cdot 1KHz} = 20$

" massimo " è $IF_{MAX} = \sqrt{2 \cdot 200mS \cdot 2KHz} = 28{,}3$

il migliore filtro dipende da cosa vogliamo, se vogliamo l'SNR fisso dobbiamo usare il boxcar mentre al contrario va meglio il RATEMETER.

(il Boxcar prende sempre lo stesso numero di picchi, possiamo usare lo stesso T_F solo xò è quello minimo usato nel punto c). In generale ho capito che T_F dipende dal periodo e quindi da ν_r, ma noi prendiamo il T_F con ν_r min così non abbiamo problemi xè garantiamo che vada a zero dopo 1s sia per $\nu_{r\,min}$ e $\nu_{r\,max}$

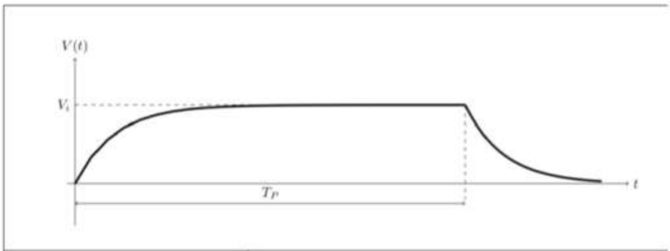
Punto e)

e) Finally consider a statistical repetition rate with a Poisson distribution over time with average repetition rate of 1kHz. Discuss and compare the results that could be achieved with the solution of point b.

Vale quello detto in d), se voglio essere indipendente dalla variazione del Vr uso il BI, se voglio tenere l'informazione della variazione uso il RATEMETER.

ESAME

Exam Text of 26/09/2008 (Problem 1)



Signal:	Preamplifier:
T_P=10ms	White noise unilateral spectral density $\sqrt{S_{N,U}} = 50nV/\sqrt{Hz}$
rise time $T_S \approx 0.2T_P$	1/f noise component with f_c=10kHz
amplitude V_i	Bandwidth: f_{PA}=100MHz

A pulse signal featuring an almost rectangular shape comes from a low impedance source and is fed to a preamplifier with the characteristics reported above.

Considering only white noise (by now):

a) Evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured at the output of the preamplifier without using any additional filtering stage.

b) Select a filter that allows you to observe the signal waveform with improved resolution. Evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured in these conditions.

c) Now consider the exact shape of the signal, which has a rising edge described by the following exponential function $V(t) = V_i * \left(1 - e^{-t/T_{SP}}\right)$, with T_{SP}=1ms, and falling edge with the same shape. Select a filter to improve the precision in the measurement of the signal amplitude and evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured with the selected filter. Before selecting the filter, discuss the characteristics of the optimum filter, then select a filter that can be easily implemented and that is a good approximation of the optimum filter.

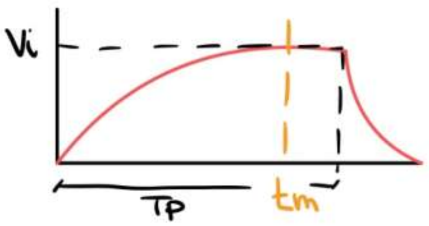
Now consider also the 1/f noise component:

d) In the conditions of point b), select an additional filter that allows you to observe the signal waveform limiting the impact of 1/f noise. Evaluate the noise contribution due to the 1/f noise component and therefore the minimum measurable signal amplitude in these conditions.

e) Considering now a known signal waveform as reported in point c), select an additional filter to limit the 1/f noise contribution. Evaluate the noise contribution due to the 1/f noise component and therefore the minimum measurable signal amplitude in these conditions.

Questo esame è diverso da tutti gli altri. xè noi sappiamo circa la sua forma ma non la sappiamo bene!!!

a) Vi MIN senza nessun filtro.



Per avere il max SNR prendo tm quando il segnale è al suo massimo

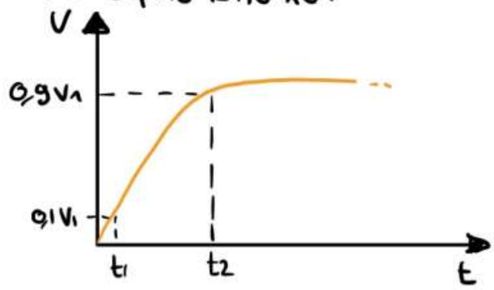
$$\frac{S}{N} = \frac{V_i}{\sqrt{S_{n,u} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{PA}}}$$

All'esame spiegare xè

Che da un $V_{i\,MIN} = 627\mu V$

b) Vogliamo migliorare l'SNR e mantenere la forma del segnale.

Possiamo usare un filtro RC-LPF (Non possiamo usare ad esempio un GI xè varia il segnale)
non capito tanto xè?



Se devo approssimare la prima parte del mio segnale più che un rect sembra un esponenziale

$$V_i\left(1 - e^{-\frac{t}{T_F}}\right)$$

ma cos'è T_F? il tempo che sto dal 10 al 90% del valore finale

- $V_1\left(1 - e^{-t_1/T_F}\right) = 0{,}1\,V_i$
- $V_1\left(1 - e^{-t_2/T_F}\right) = 0{,}9\,V_i$

Se noi diciamo che $T_S = t_2 - t_1$ allora possiamo dire che $T_F = \frac{T_S}{\ln 9}$

e quindi calcoliamo la banda del segnale come $BW = \frac{1}{2\pi T_F} = 175Hz$

Come dimensioniamo il nostro RC-LPF = ?

dobbiamo trovare la frequenza del polo del filtro RC f_p, per def noi mettiamo $f_p \geq 10BW$ (dipende da quanto conservativi siamo noi)

Se prendiamo $f_p = 2KHz$ otteniamo una $V_{iMIN} = \sqrt{S_{n\mu} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{pLPF}} = 2{,}8\mu V$

Ci è bastato solo guardare il segnale e ricavare la banda e mettere un LPF e visto che questo ha un polo molto più piccolo rispetto a quello del preamp riduciamo di molto anche l'SNR.

c) Ci sono date molte info sul segnale, sappiamo che

$$v(t) = \begin{cases} V_i(1-e^{-t/T_{SP}}) \\ V_i e^{-\frac{t-T_P}{T_{SP}}} \end{cases}, T_{SP} = 1ms$$

Cresce e decresce come un esponenziale con la stessa costante di tempo

Ora siamo interessati solo all'ampiezza.

Possiamo lavorare sul matched filter teorico, cioè il filtro che ha funzione peso uguale al segnale.

L'SNR in questo caso è $\left(\frac{S}{N}\right)_{OPT} = \frac{V_i}{\sqrt{\frac{S_{n\mu}}{2}}} \cdot \sqrt{K_{bb}(0)}$ $\quad b(t) = \begin{cases} 1-e^{-t/T_{SP}} \\ 1 \cdot e^{-\frac{t-T_P}{T_{SP}}} \end{cases}$

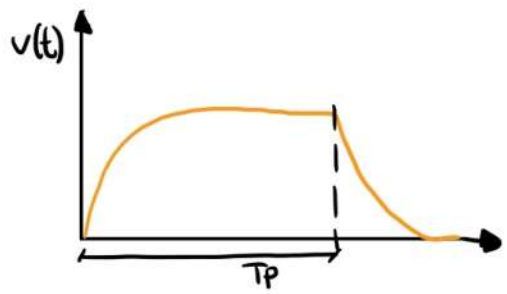
xè viva la bilateral

Allora otteniamo

$V_{iMIN_{OPT}} = 373nV$

Ma il filtro ottimo non è realizzabile

• Proviamo a usare un GI



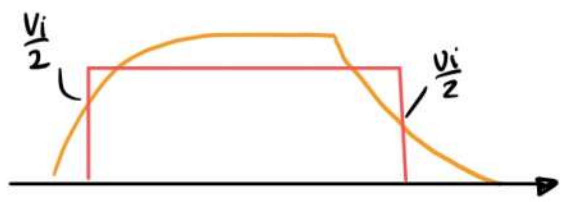
Dobbiamo decidere dove e per quanto tempo integrare il segnale (cioè dove mettere la funzione peso)

Noi sappiamo che vogliamo il segnale al suo massimo per avere una migliore SNR.

Per semplificare il problema mettiamo $T_G = T_P$

Intuitivamente dobbiamo iniziare a integrare quando $v(t)$ è $V_i/2$ e integriamo per un tempo lungo T_P (xè $T_G = T_P$).

Intuitivamente questo ha senso xè salita e discesa hanno la stessa τ e quindi ho $V_i/2$ da tutte e 2 le parti. Se mi spostassi un po' prima e un po' dopo avrei un area minore



(Questa cosa è dimostrabile e sarà il caso di farla, non so se lo farà lei.)

Ci viene quindi che stando a $x = 0.69\, T_{sp}$ abbiamo $V_{i,MIN} = 380\, nV$.

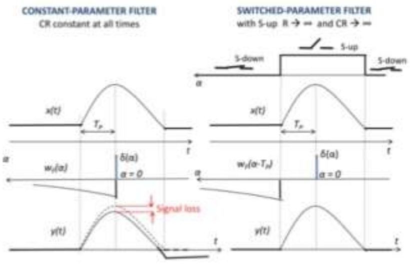
$\uparrow$ è il τ per avere $V_i/2$

9.04.2021 — 3h Lezione

Lezione più difficile di tutte

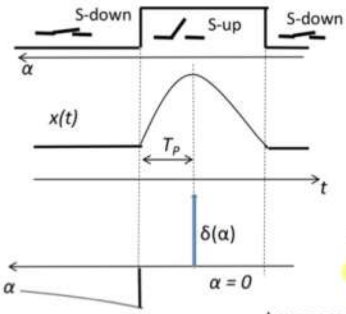
(Non facciamo lezione il 22 e 23 ma dobbiamo studiarci noi il band pass filter 2)

BASELINE RESTORER → Applichiamo il CR solo quando non abbiamo il segnale



Con la baseline restorer non modifichiamo il segnale

La funzione peso del baseline restorer è un passatutto (delta) - passabasso



BLR principle is alike filtered zero-setting, but with a **basic advantage:** much **shorter T_P** much **higher band-limit f_{if} (high-pass)**

(the BLR switch is electronically controlled, the interval T_P can be very short)

BLR weighting = All Pass – Low-pass

$$w_B(\alpha) = \delta(\alpha) - w_F(\alpha - T_P)$$

Come lowpass filter posso usare qualsiasi filtro passabasso, perciò posso scrivere la funzione peso generale così.

Low-pass weighting in frequency:

$$W_F(\omega) = F[w_F(\alpha)] = R_F(\omega) + i\, I_F(\omega)$$

BLR weighting in frequency:

$$W_B(\omega) = 1 - e^{j\omega T_P} W_F(\omega) = 1 - [\cos\omega T_P - j\sin\omega T_P]\cdot[R_F + jI_F] =$$
$$= [1 - R_F\cos\omega T_P - I_F\sin\omega T_P] - j[I_F\cos\omega T_P - R_F\sin\omega T_P]$$

Trasformata della funzione peso del BLR
1 xè è la trasformata di δ, $e^{-j\omega T_P}$ xè $w_F(\alpha - T_b)$ è shiftato
usiamo poi eulero e dividiamo parte reale e immaginaria

Calcoliamo ora $W_B(\omega)^2$

BLR weighting for noise:

$$|W_B(\omega)|^2 = [1 - R_F\cos\omega T_P - I_F\sin\omega T_P]^2 + [I_F\cos\omega T_P - R_F\sin\omega T_P]^2 =$$
$$= 1 + R_F^2 + I_F^2 - 2R_F\cos\omega T_P + 2I_F\sin\omega T_P =$$
$$= 1 + |W_F|^2 - 2R_F\cos\omega T_P - 2I_F\sin\omega T_P$$

Magia matematica

Let's consider just cases where the interval between pulses is much longer than T_F so that

$$w_F(\alpha) = 1(\alpha)\frac{1}{T_f}e^{-\frac{\alpha}{T_f}} \quad \text{and} \quad W_F(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_F}$$

Supponiamo di avere un filtro RC come filtro passabasso, w_F è la funzione peso dell'RC

and therefore

$$\boxed{|W_B(\omega)|^2 = 1 + \frac{1}{1+\omega^2T_F^2} - 2\frac{1}{1+\omega^2T_F^2}\cos\omega T_P + 2\omega T_F\cdot\frac{1}{1+\omega^2T_F^2}\sin\omega T_P}$$

RISULTATO

Iniziamo a studiare la formula a diverse frequenze

In the low-frequency region $\omega \ll \frac{1}{T_P}$ with the approximations

$$\sin\omega T_P \approx \omega T_P \qquad \cos\omega T_P = 1 - \frac{\omega^2 T_P^{\,2}}{2}$$

we get

$$|W_B(\omega)|^2 \approx 1 + \frac{1}{1+\omega^2 T_F^2} - \frac{2}{1+\omega^2 T_F^2} + \frac{\omega^2 T_P^2}{1+\omega^2 T_F^2} + 2\frac{\omega^2 T_P T_F}{1+\omega^2 T_F^2} =$$

$$= \frac{\omega^2 (T_P + T_F)^2}{1+\omega^2 T_F^2} = \frac{\omega^2 T_F^2}{1+\omega^2 T_F^2}\left(1+\frac{T_P}{T_F}\right)^2$$

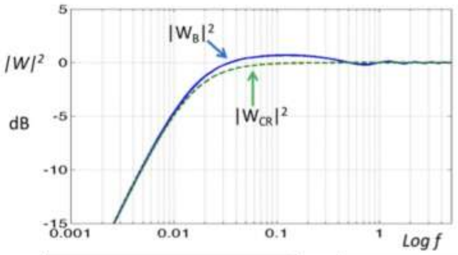
and in the lower region $\omega \ll \frac{1}{T_F} \ll \frac{1}{T_P}$

$$\boxed{|W_B(\omega)|^2 \approx \omega^2 (T_P + T_F)^2}$$ IMPORTANTE

That is, the BLR has a cutoff equivalent to a CR high-pass with RC= T_P+T_F

Ricordiamo che noi vogliamo cancellare l'1/f quindi vogliamo un taglio a basse f.

A f molto basse la funzione peso può essere approssimata con questa che è la stessa funzione peso di un CR con CR=Tp+TF



BODE DIAGRAM highlights the low-freq cutoff

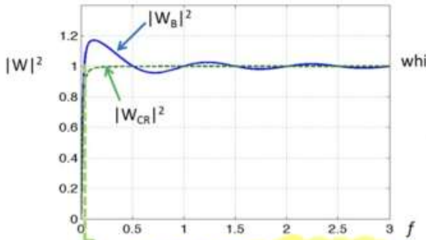
Example:
BLR with T_P = 1 and T_F = 10
CR filter with RC = T_P + T_F

Plottiamo $|W_B|^2$ e $|W_{CR}|^2$ e notiamo che sia a basse e alte freq sono pressoché identici.
Ci va da dio così anche con il BLR non amplifichiamo il rumore ad alte f

$f \ll 1/T_F$ (i.e. $f \ll 0,1$ in the example)	$1/T_F < f \ll 1/T_P$ (i.e. $f \ll 1$ in the example)
$\|W_B(\omega)\|^2 \approx \omega^2 (T_P+T_F)^2$	$\|W_B(\omega)\|^2 \approx \frac{\omega^2 (T_P+T_F)^2}{1+\omega^2 T_F^2}$
$\|W_{CR}(\omega)\|^2 \approx \omega^2 R^2 C^2$	$\|W_{CR}(\omega)\|^2 = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{1+\omega^2 R^2 C^2}$

Al contrario nelle frequenze centrali la cosa cambia un po'

Plottiamo anche il grafico linear/linear



LIN –LIN DIAGRAM highlights white noise power ∝ area of $|W|^2$

Example:
BLR with T_P = 1 and T_F = 10
CR filter with RC = T_P + T_F

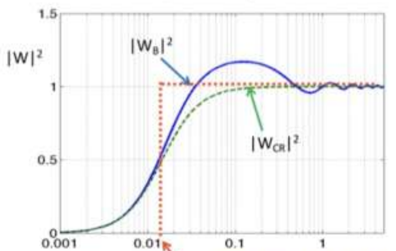
Sono simili, entrambi hanno un cut a bassissime frequenze.
Notiamo che il BLR ha un po' di oscillazioni, forse l'integrale è un po' + grande di quello di CR quindi forse amplifichiamo un tic il rumore.

$$f_{ni} \approx \frac{\pi}{2} f_p = \frac{1}{4RC} = \frac{1}{4(T_F+T_P)} \approx \frac{1}{4T_F}$$ ← STESSO HIGH BAND LIMIT

f_{ni} = BLR high-pass band-limit for white noise. Note that:

- f_{ni} is equal to that of the equivalent CR High-pass filter
- f_{ni} is equal to bandlimit of the low-pass section in the BLR circuit

E studiamo anche il linear-log scale



LIN –LOG DIAGRAM highlights 1/f noise power ∝ area of $|W|^2$

Example:
BLR with T_P = 1 and T_F = 10
CR filter with RC = T_P + T_F

Ma cosa succede alle medie frequenze?

$$f_{fi} \approx f_p = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi(T_F+T_P)} \approx \frac{1}{2\pi T_F}$$ ← STESSO BAND LIMIT

f_{fi} = BLR high-pass band-limit for 1/f noise. Note that:

- f_{fi} is equal to that of the equivalent CR High-pass filter
- f_{fi} is equal to bandlimit of the low-pass section in the BLR circuit

The BLR filtering is ruled by:

1. **T_P time delay** from switch opening to pulse-amplitude measurement.
   There is **no choice:** T_P is equal to the rise time from pulse onset to peak.
   In fact, T_P can't be shorter than the rise of the pulse signal and should be as short as possible for filtering effectively of the 1/f noise.
2. **T_F = RC differentiation time constant: to be selected** for optimizing the overall filtering of noise. The question is: how should T_F be selected for
   a) providing a good reduction of the 1/f noise power and
   b) avoiding to enhance significantly the white noise power

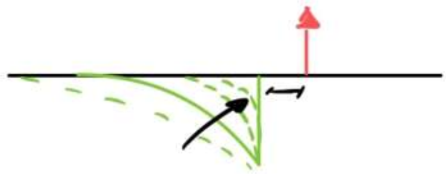
Since the BLR cutoff is set by $1/(T_P + T_F)$, a very short T_F might look advisable, but it is not: a BLR with $T_F << T_P$ operates like a CDS, hence it doubles the white noise and remarkably enhances also the 1/f noise above the cutoff frequency.

In the following discussion about the T_F selection, for focusing the ideas we will refer to a specific case: signals from a high impedance sensor processed by an approximately optimum filter, namely a CR-RC filter. The output corresponding to the input wide-band noise is a white spectrum band-limited by a simple pole. Such a situation is met in practice also in many other cases.
A better insight in the issue is gained with a **time-domain analysis of BLR filtering**

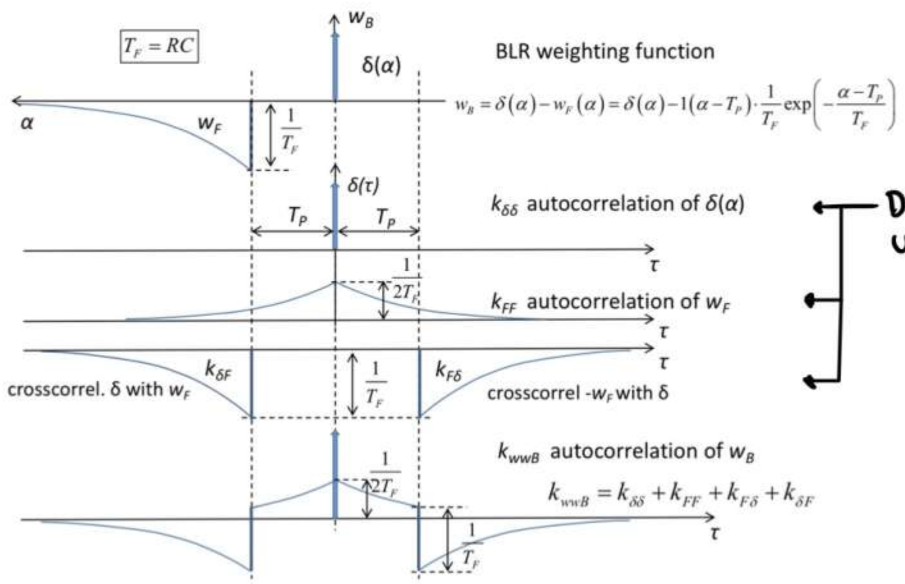
Non possiamo scegliere Tp come vogliamo, dobbiamo prenderlo sul punto max del segnale.

Dobbiamo scegliere TF in modo che riduca il max 1/f ma vogliamo anche che non amplifichi troppo il rumore.

Se mettiamo TF molto piccolo allora



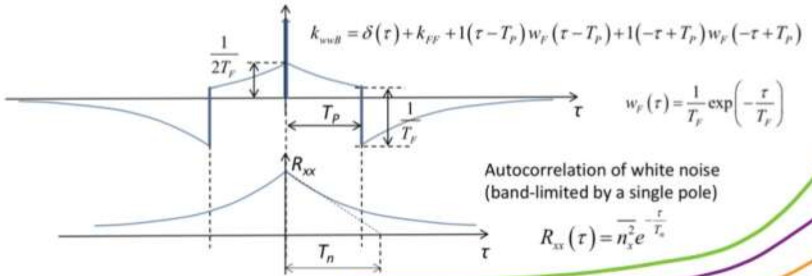
Se riduciamo troppo TF l'esponenziale va a ridursi ad un delta e abbiamo il CDS quindi noi amplifichiamo troppo il rumore
Dobbiamo trovare un tradeoff tra questi 2 fattori, il modo più facile è studiarla nel tempo



Devo calcolare l'autocorrelazione di questo

Divide l'autocorrelazione in 3 e poi le unisce

Studiamo adesso l'integrale dell'autocorrelazione del rumore (una a caso) con quella del filtro



Questo deriva da Rxx δ(t)

Questa è la parte relativa a metà esponenziale positivo

Questo è il resto

$$\overline{n_B^2} = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)k_{wwB}(\tau)d\tau = R_{xx}(0) + 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\tau)\frac{1}{2}w_F(\tau)d\tau - 2\int_T^{\infty} R_{xx}(\tau)w_F(\tau - T_P)d\tau =$$

$$= R_{xx}(0) + \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau)\frac{1}{2}w_F(\tau)d\tau - 2\int_0^{\infty} R_{xx}(\beta + T_P)w_F(\beta)d\beta$$ ← magia matematica, passiamo da dτ a dβ

Denoting $r_{xx}(\tau) = \frac{R_{xx}(\tau)}{R_{xx}(0)} = \frac{R_{xx}(\tau)}{\overline{n_x^2}}$

We have

$$\boxed{\overline{n_B^2} = \overline{n_x^2}\left\{1 + \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau)\frac{1}{T_F}e^{-\frac{\tau}{T_F}}d\tau - 2\int_0^{\infty} r_{xx}(\beta + T_P)\frac{1}{T_F}e^{-\frac{\beta}{T_F}}d\beta\right\}}$$ ← Rumore d'uscita

$$\overline{n_B^2} = \overline{n_x^2}\left\{1+\int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau)\cdot\frac{1}{T_F}e^{-\frac{\tau}{T_F}}d\tau - 2\int_0^{\infty} r_{xx}(\beta+T_P)\cdot\frac{1}{T_F}e^{-\frac{\beta}{T_F}}d\beta\right\} =$$

$$= \overline{n_x^2}\left\{1+\frac{1}{T_F}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau\left(\frac{1}{T_F}+\frac{1}{T_n}\right)}d\tau - 2e^{-\frac{T_P}{T_n}}\frac{1}{T_F}\int_0^{\infty} e^{-\beta\left(\frac{1}{T_F}+\frac{1}{T_n}\right)}d\beta\right\} =$$

$$= \overline{n_x^2}\left[1+\frac{T_n}{T_n+T_F} - 2e^{-\frac{T_P}{T_n}}\frac{T_n}{T_n+T_F}\right]$$

Non ci chiederà mai i conti all'esame

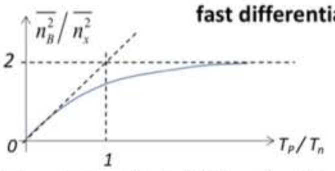
and finally
$$\boxed{\overline{n_B^2} = \overline{n_x^2}\left[1+\frac{T_n}{T_n+T_F}\left(1-2e^{-\frac{T_P}{T_n}}\right)\right]}$$

Controlliamo la formula imponendo $T_F \ll T_n$, infatti noi sappiamo che deve avere lo stesso effetto del CDS e notiamo che per $T_P/T_n \to \infty$ il risultato tende a $\overline{n_B^2} = 2\overline{n_x^2}$ che è lo stesso risultato del CDS

With **fast differentiation**, i.e. with $T_F \ll T_n$, it is quantitatively confirmed that the BLR acts like a CDS with $T=T_P$

$$\overline{n_B^2} \approx 2\overline{n_x^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{T_P}{T_n}}\right)$$

fast differentiation with $T_F \ll T_n$



$$\boxed{\overline{n_B^2} \approx 2\overline{n_x^2}\cdot\left(1-e^{-\frac{T_P}{T_n}}\right)}$$

Studiamo la funzione in diversi casi

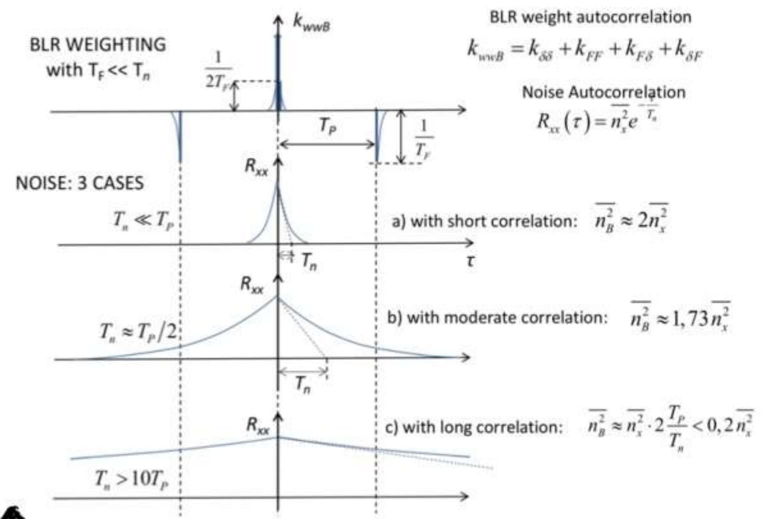
With $T_F \ll T_n$ the effect of BLR on **band-limited white noise** depends on how long is the correlation time T_n with respect to the delay T_P

- with **short correlation time** (wide band) the noise is **doubled**:
  with $T_n < T_P/5$ it is $\overline{n_B^2} \approx 2\overline{n_x^2}$
- with **moderate correlation time** (moderately wide band) the noise is enhanced:
  with $T_n \approx T_P/2$ it is $\overline{n_B^2} \approx 1,73\overline{n_x^2}$
- only with **long correlation time** (low-frequency band) the noise is **attenuated***:
  with $T_n > 10T_P$ it is $\overline{n_B^2} \approx \overline{n_x^2}\cdot 2\frac{T_P}{T_n} < 0,2\overline{n_x^2}$

: Numero da ricordare, è importante

** note that anyway the level is **double** of that given by a simple CR filter with equal cutoff, that is with $T_F = RC = T_P$*

Cerchiamo di capirlo dal punto di vista visivo



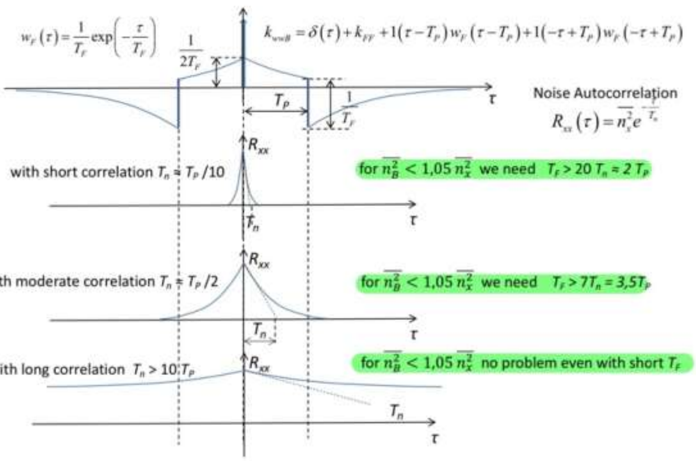
T_n: è la durata dell'autocorrelazione del rumore

- Se T_n è piccolo integro solo con la parte centrale attorno allo zero, quindi doppio il rumore
- Con T_n medio riesco un po' a diminuire il fattore 2
- Se T_n è molto grande riesco a ridurre di molto l'integrale e quindi il rumore.

Alla fine questo è in pratica circa il grafico del CDS

E se ora usassimo grandi T_F al posto di T_F piccoli?

Facciamo lo stesso studio sui 3 casi. Supponiamo che noi vogliamo il rumore d'uscita < 1,05 rumore d'ingresso e ricaviamo i valori di T_F/T_n T_P?



Ma xè abbiamo introdotto il Tn medio?
Questo è il caso più comune xè noi tipicamente usiamo il filtro ottimo e quindi dopo il filtro ottimo noi abbiamo che la correlazione del rumore in uscita dal filtro che ha circa la stessa dimensione del segnale (perché abbiamo il rumore filtrato)
(Ricordiamo che lui abbia usato il passa alto dopo il filtro ottimo e quindi capiamo xè il Tn medio è il più usato)

With T_F **NOT negligible with respect to T_n**, the effect on white noise depends also **on the size of T_F compared to T_n and T_P**. A long T_F can limit the white noise enhancement

$$\boxed{\overline{n_B^2}=\overline{n_x^2}\left[1+\frac{T_n}{T_n+T_F}\left(1-2e^{-\frac{T_P}{T_n}}\right)\right]}$$

Let's evaluate how long must be T_F in the various cases of noise correlation

- with **short correlation time** $T_n \approx T_P/10$ it is
$$\overline{n_B^2}\approx\overline{n_x^2}\left(1+\frac{T_n}{T_n+T_F}\right)$$
for keeping $\overline{n_B^2}<1{,}05\,\overline{n_x^2}$ we need $T_F > 20\,T_n \approx 2\,T_P$
- with **moderate correlation time** $T_n \approx T_P/2$ it is
$$\overline{n_B^2}\approx\overline{n_x^2}\left[1+\frac{T_n}{T_n+T_F}\left(1-\frac{2}{e^2}\right)\right]=\overline{n_x^2}\left[1+0{,}73\frac{T_n}{T_n+T_F}\right]$$
for keeping $\overline{n_B^2}<1{,}05\,\overline{n_x^2}$ in this case we need $\mathbf{T_F > 7T_n = 3{,}5T_P}$
- with **long correlation time** $T_n > 10\,T_P$ it is
$$\overline{n_B^2}\approx\overline{n_x^2}\left[1-\frac{T_n}{T_n+T_F}\right]=\overline{n_x^2}\,\frac{T_F}{T_n+T_F}$$
No problem with such a low-frequency noise: it is attenuted by the BLR just as by a CR constant-parameter filter (with equal time constant $T_F = RC$)

The most interesting case for us is noise with moderate T_n. In fact, when the BLR works on the output of an optimum (or approximate-optimum) filter for wideband noise, the correlation time T_n and delay T_p are comparable, since they are both closely related to the band-limit of the signal pulse.

- We conclude that for avoiding enhancement of the white noise it is necessary to select a fairly slow BLR differentiation, i.e. a fairly long T_F
$$\boxed{T_F \geq 5T_P}$$
- This approach is satisfactory also for filtering the 1/f noise, notwithstanding that making T_F longer than T_P shifts down the BLR cutoff frequency, hence reduces the attenuation of 1/f noise. This is counterbalanced by the fact that the enhancement of 1/f noise at frequencies above the cutoff is limited by the low-pass filtering in the baseline subtraction, whereas with short T_F it is remarkable.

SOMMARIO

- The BLR is a high-pass filter that acts on noise and disturbances without affecting the pulse signal
- The BLR is a switched-parameter filter: the low-pass section within the high-pass filter structure is a boxcar integrator that acquires the baseline only in the intervals free from pulses
- The BLR can thus establish a high-pass band-limit at a high value (suitable for reducing efficiently the 1/f noise output power) without causing the signal loss suffered with a constant-parameter high-pass filter having the same band-limit
- The high-pass band-limit enforced by the BLR is given (with good approximation) by the low-pass bandlimit of the low-pass section in the BLR circuit structure
- The combination of: (1) optimum filter designed for the case of pulse signal in presence of wideband noise only (i.e. without 1/f noise) and (2) BLR specifically designed (for reducing the actual 1/f noise without worsening the wide-band noise) provides in most cases a quasi-optimum filtering solution.

Sul baseline restorer lui ci chiederà una discussione tra i casi.
In generale ricordare solo i numeri del caso con Tn medio

BAND PASS FILTER 1

Se il nostro segnale è dentro il rumore 1/f abbiamo un po' un casino, possiamo però spostare il segnale a diverse frequenze.

Power signals with a narrow power spectrum, that is, a peak with
- center-frequency f_s
- bandwidth Δf_s which is small in absolute value, typically $\Delta f_s < 10$ Hz, and/or with respect to the center frequency $\Delta f_s \ll f_s$

They approximate well a sinusoid over a wide time interval $T_s \approx 1/\Delta f_s$

QUESTION: how can we measure such narrow-band signals in presence of intense white noise? And what if also 1/f noise is present?

Facciamo un esempio numerico

Let's see some typical examples of signals with

- narrow linewidth $\Delta f_s = 1\ Hz$
- small amplitude $V_s \leq 100\ nV$

for bringing them to higher level (suitable for processing circuits: filters, meters, etc.) they are amplified by a DC-coupled wide-band preamplifier with

- upper band-limit $f_h = 1MHz$
- noise spectral density (referred to input) with «white» component $\sqrt{S_b} = 5nV/\sqrt{Hz}$
  and $1/f$ component with corner frequency $f_c = 2kHz$

Let us consider three cases with different center-frequency f_s :

- Case 1: **high** frequency $f_s = 100$ kHz
- Case 2: **moderately low** frequency $f_s = 1$ kHz
- Case 3: **low** frequency $f_s = 10$ Hz

Caso 1 $V_s < 100nV$ e $f_s = 100KHz$

a) observing the voltage waveform in the TIME DOMAIN, i.e. on oscilloscope display

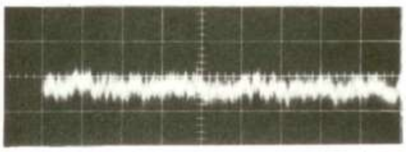
The signal to be recovered is at frequency $f_s = 100$ kHz much higher than the noise corner frequency $f_c = 2kHz$, so that we can use a simple high-pass filter with band-limit $f_i = 10kHz$ to cut off the 1/f noise and obtain a rms noise (referred to the preamp input)

$$\sqrt{\overline{v_n^2}} = \sqrt{S_b} \cdot \sqrt{(f_h - f_i)} \approx \sqrt{S_b} \cdot \sqrt{f_h} = 5\mu V$$

fi è un passa alto per tagliare l'1/f ci va bene visto che il nostro segnale è a 100K mentre mettiamo fi a 10K

and therefore $$\frac{S}{N} = \frac{V_S}{\sqrt{\overline{v_n^2}}} \leq 0,02 << 1$$

Even the highest signal $V_s = 100\ nV$ is **practically invisible on the oscilloscope display**! The noise covers a band ≈ *5 x rms value* ≈ *20 μV* and the sinusoidal signal is buried in it!

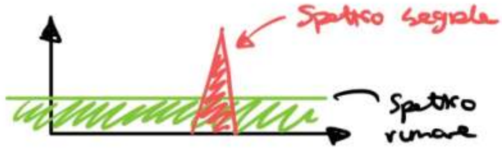


Vertical scale 50μV/div

Horizontal scale 5μs/div

Tuttavia se io analizzo questo nel dominio della frequenza e analizzo lo spettro ottengo che il segnale è molto visibile

b) observing the power spectrum in FREQUENCY DOMAIN, i.e. on spectrum analyzer display



SIGNAL: the power $P_S = \frac{V_S^2}{2} = 50 \cdot 10^{-16}\ V^2$ is within a bandwidth $\Delta f_S = 1\ Hz$
so that the effective power density of the signal is $\sqrt{S_S} \approx \sqrt{\frac{P_S}{\Delta f_S}} = 70nV/\sqrt{Hz}$

NOISE: the effective power density at $f_s = 100$ kHz is $\sqrt{S_b} = 5nV/\sqrt{Hz}$

On the spectrum analyzer display the signal peak is **very well visible above the noise!**

$$\frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_b}} = 14 \gg 1$$

← è il rapporto dei 2 spettri, notiamo che qui il segnale è visibile. Idea è quella di usare un passabanda attorno al segnale

Conclusion: good S/N can be obtained with a bandpass filter having bandwidth Δf_b matched to the signal band $\Delta f_b \approx \Delta f_S$

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{P_S}{S_b \Delta f_b}} = \sqrt{\frac{S_S \Delta f_S}{S_b \Delta f_b}} \approx \frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_b}} = 14 \gg 1$$

Facciamo gli stessi conti anche per $f_s = 1KHz$, questo vuol dire che il segnale cade dentro il rumore 1/f

CASE 2: signal $V_s \le 100\ nV$ at moderately low frequency $f_s = 1$ kHz

a) observing the voltage waveform in the TIME DOMAIN, i.e. on oscilloscope display

The signal is now at $f_s = 1$ kHz just below the corner frequency $f_c = 2kHz$.
For reducing the 1/f noise we can still use a high-pass filter, but in order to pass the signal the band-limit f_i must be reduced: $f_i << f_s = 1$ kHz, typically $f_i = 100$Hz.
The rms noise referred to the input is

DOBBIAMO CONSIDERARE SIA RUMORE BIANCO CHE 1/f

$$\sqrt{\overline{v_n^2}} \approx \sqrt{S_b(f_h - f_i) + S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right)} \approx \sqrt{S_b f_h + S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right)} \approx \sqrt{S_b f_h} \approx 5\mu V$$

1/f noise is negligible $S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right) \ll S_b f_h$

and therefore

$$\frac{S}{N} = \frac{V_S}{\sqrt{\overline{v_n^2}}} \le 0{,}02 << 1$$

The situation is practically equal to that of Case 1: the signal is **practically invisible on the oscilloscope display, it's buried in the noise**!

CASE 2: signal $V_s \le 100\ nV$ at moderately low frequency $f_s = 1$ kHz

b) observing the power spectrum in FREQUENCY DOMAIN, i.e. on spectrum analyzer display

SIGNAL: the power $P_S = \frac{V_S^2}{2} = 50 \cdot 10^{-16}\ V^2$ is within a bandwidth $\Delta f_S = 1\ Hz$
so that the effective power density of the signal is $\sqrt{S_S} \approx \sqrt{\frac{P_S}{\Delta f_S}} = 70 nV/\sqrt{Hz}$

NOISE: due to the **1/f noise**, the effective power density at $f_s = 1$ kHz is somewhat higher

$$\sqrt{S_n(f_s)} = \sqrt{S_b + S_b \frac{f_c}{f_s}} = \sqrt{S_b}\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_s}} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{S_b} \approx 8{,}7\, nV/\sqrt{Hz}$$

Anyway, on the spectrum analyzer display the signal peak is still **well visible above the noise**

$$\frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_n(f_S)}} = 8 > 1$$

Otteniamo 8, ancora buono
possiamo usare un passabanda

Conclusion: a bandpass filter with bandwidth Δf_b matched to the signal $\Delta f_b \approx \Delta f_S$ still gives a **fairly good S/N**

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{P_S}{S_n(f_S)\Delta f_b}} = \sqrt{\frac{S_S \Delta f_S}{S_n(f_S)\Delta f_b}} \approx \frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_n(f_S)}} = 8 > 1$$

Stessa cosa per fs = 10 Hz (qui siamo dominati dal rumore 1/f)

CASE 3: signal $V_s \le 100\ nV$ at low frequency $f_s = 10$ Hz

a) observing the voltage waveform in the TIME DOMAIN, i.e. on oscilloscope display

The signal is now at $f_s = 10$ Hz much below the corner frequency $f_c = 2kHz$.
For reducing the the 1/f noise we can still use a high-pass filter, but with strongly reduced band-limit $f_i << f_s = 10$ Hz, typically $f_i = 1$ Hz. The rms noise referred to input is

$$\sqrt{\overline{v_n^2}} \approx \sqrt{S_b(f_h - f_i) + S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right)} \approx \sqrt{S_b f_h + S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right)} \approx \sqrt{S_b f_h} \approx 5\mu V$$

1/f noise is negligible $S_b f_c \ln\left(\frac{f_h}{f_i}\right) \ll S_b f_h$

and therefore

$$\frac{S}{N} = \frac{V_S}{\sqrt{\overline{v_n^2}}} \le 0{,}02 << 1$$

The situation is practically equal to that of Case 1 : the signal is **practically invisible on the oscilloscope display, it's buried in the noise**!

CASE 3: signal $V_s \le 100\ nV$ at low frequency $f_s = 10$ Hz

b) observing the power spectrum in FREQUENCY DOMAIN, i.e. on spectrum analyzer display

SIGNAL: the power $P_S = \frac{V_S^2}{2} = 50 \cdot 10^{-16}\ V^2$ is within a bandwidth $\Delta f_S = 1\ Hz$
so that the effective power density of the signal is $\sqrt{S_S} \approx \sqrt{\frac{P_S}{\Delta f_S}} = 70 nV/\sqrt{Hz}$

NOISE: due to the **1/f noise**, the effective power density at $f_s = 10$ Hz is now **much higher**

$$\sqrt{S_n(f_s)} = \sqrt{S_b + S_b \frac{f_c}{f_s}} = \sqrt{S_b}\sqrt{1 + \frac{f_c}{f_s}} = \sqrt{14{,}2} \cdot \sqrt{S_b} \approx 71\, nV/\sqrt{Hz}$$

On the spectrum analyzer display the signal peak is **barely visible, it's equal to the noise**

$$\frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_n(f_S)}} \approx 1$$

SIAMO AL LIMITE

Conclusion: the S/N is insufficient even with a bandpass filter with narrow bandwidth Δf_b matched to the signal $\Delta f_b \approx \Delta f_S$

$$\frac{S}{N} = \sqrt{\frac{P_S}{S_b \Delta f_b}} = \sqrt{\frac{S_S \Delta f_S}{S_n(f_S)\Delta f_b}} \approx \frac{\sqrt{S_S}}{\sqrt{S_n(f_S)}} \le 1$$

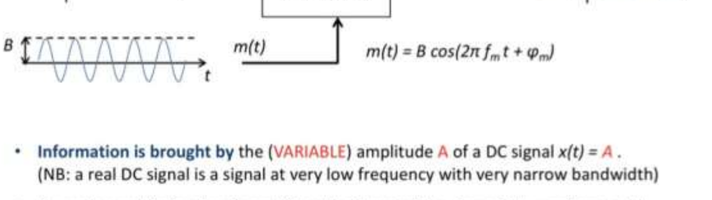
Dobbiamo avere un passabanda con banda stretta matchato con la frequenza del segnale.

OPEN QUESTIONS

- We need **efficient band-pass filters** with very narrow band-width.
  We need to understand how to design and implement such narrow-band filters ,
  but we shall deal with this issue after dealing with the following question.
- If the information is carried by the amplitude of a low-frequency signal, it has to face also 1/f noise. ***It would be advantageous to escape this noise by preliminarly transferring the information to a signal at higher frequency***. However:
  a) how can we transfer the signal to higher frequency?
  b) if we transfer to the higher frequency also the 1/f noise that faces the signal, this makes the transfer useless: how can we avoid it?

Se sposto il segnale ad alte frequenze sposto anche il rumore? Da capire.

COME SPOSTIAMO I SEGNALI IN FREQUENZA?



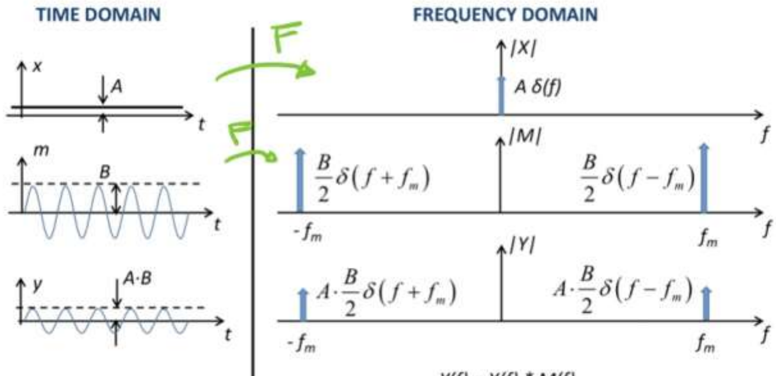
Vogliamo fare una cosa del genere dove A è la nostra informazione

Questa è la base del lock-in amplifier, che studieremo solo in frequenza

- **Information is brought by** the (VARIABLE) amplitude A of a DC signal $x(t) = A$.
  (NB: a real DC signal is a signal at very low frequency with very narrow bandwidth)
- An analog multiplier circuit combines the signal with a sinusoidal waveform $m(t)$ *(called reference or carrier)* with frequency f_m and CONSTANT amplitude B
- The information is transferred to the amplitude of a sinusoidal signal $y(t)$ at frequency f_m

$$y(t) = A \cdot B \cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$$

Studiamo come viene modulato il segnale in frequenza



$y(t) = x(t)\cdot m(t) =$

$= A\cdot B\cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$

$Y(f) = X(f) * M(f)$

The signal is shifted in frequency by $+f_m$ and $-f_m$ and in phase by $+\varphi_m$ and $-\varphi_m$ respectively

Visto che nel tempo facciamo la moltiplicazione allora in frequenza abbiamo la convoluzione

la convoluzione con i delta è facile

Attenzione visto che siamo in frequenza e facciamo la convoluzione, in generale abbiamo segnali complessi e quindi non possiamo dire che il modulo della convoluzione è la convoluzione dei moduli

In generale $|Y(f)| \neq |X(f)|\cdot|M(f)|$

Ma noi siamo molto fortunati

In the cases here considered, however, the issue is remarkably simplified because

a) $X(f)$ is confined in a **narrow** bandwidth Δf_s

b) $M(f)$ has a line spectrum with (fundamental) frequency f_m that is much greater than the signal bandwidth $f_m >> \Delta f_s$

In the convolution $X(f) * M(f)$ each line of M(f) acts on $X(f)$ as follows

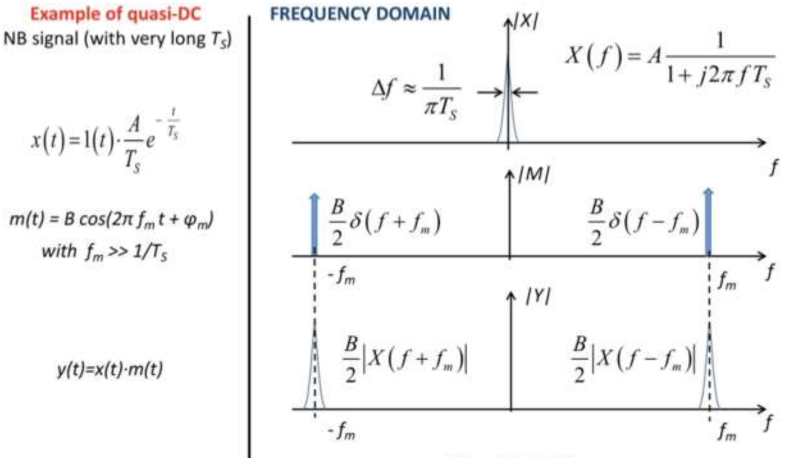
- Shifts in frequency every component of $X(f)$ by $+f_m$ and $-f_m$ (i.e. adds to each frequency $+f_m$ and $-f_m$)
- Shifts in phase every component of $X(f)$ by $+\varphi_m$ and $-\varphi_m$ (i.e. adds to every phase $+\varphi_m$ and $-\varphi_m$)

*In cases with $\Delta f_s << f_m$, there is **no sum of complex numbers** to be computed because at any frequency f there is at most one term to be considered, all other terms are negligible.*

The result of the convolution is easily visualized: every line of $M(f)$ shifts $X(f)$ in frequency and adds to $X(f)$ its phase. Therefore, $|Y(f)|$ is well approximated by the convolution of $|X(f)|$ and $|M(f)|$ and $|Y(f)|^2$ by the convolution of $|X(f)|^2$ and $|M(f)|^2$

$$\boxed{|Y(f)| \cong |X(f)| * |M(f)|} \qquad \boxed{|Y(f)|^2 \cong |X(f)|^2 * |M(f)|^2}$$

Proviamo ad applicare questa fortuna, facciamo il caso di una quasi DC compact.



$Y(f) = X(f) * M(f)$

Notiamo che segue tutti i limiti e quindi possiamo semplificarci molto la vita

AMPLITUDE MODULATION CON SEGNALE SINUSOIDALE

Nel tempo

By exploiting the a well known trigonometric equation

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

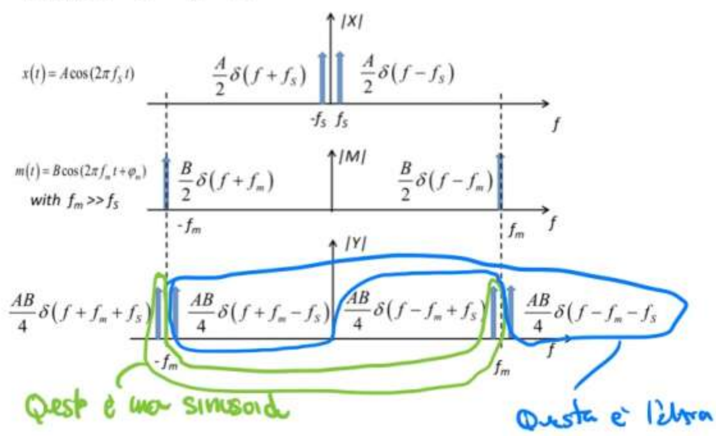
in cases with sinusoidal signal and sinusoidal reference

$$x(t) = A\cos(2\pi f_S t)$$
$$m(t) = B\cos(2\pi f_m t + \varphi_m)$$

the result is directly obtained

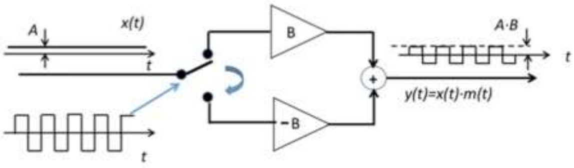
$$\boxed{y(t) = x(t)\cdot m(t) = \frac{AB}{2}\cos\left[2\pi(f_S - f_m)t - \varphi_m\right] + \frac{AB}{2}\cos\left[2\pi(f_S + f_m)t + \varphi_m\right]}$$

Nella Frequenza



Il moltiplicatore analogico è uno schifo, fa molto rumore e schifezza
Posso creare un moltiplicatore ad onda quadra

Modulation with a squarewave reference $m(t)$ can be implemented with circuits based simply on switches and amplifiers, without analog multipliers

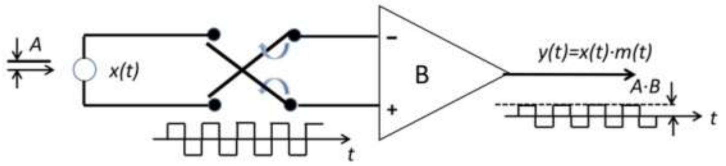


- In such cases, the circuit noise referred to the input is due mostly to the switch-devices and is much lower than that of analog multiplier circuits.
- **Metal-contact switches** have the lowest noise, but they can operate at limited switching frequency, typically up to a few 100Hz
- **Electronic switches** (MOSFET, diodes, etc.) operate up to very high frequencies but have fairly higher noise (anyway MOSFETs operating as switch-device have lower noise than MOSFETs operating as amplifier devices).

Fare la moltiplicazione con onda quadra è molto più facile che quella analogica.

Dobbiamo studiare bene i casi xè prima il teorema che ci aiutava nella convoluzione funzionava solo con uno "spettro lineare".

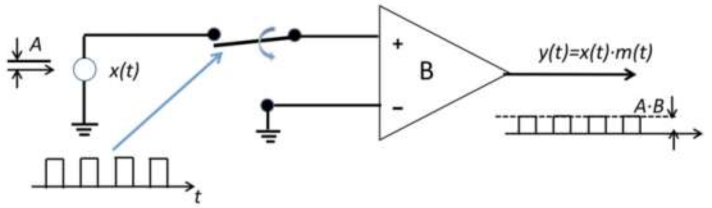
Switching example: differential amplifier with alternated input polarity



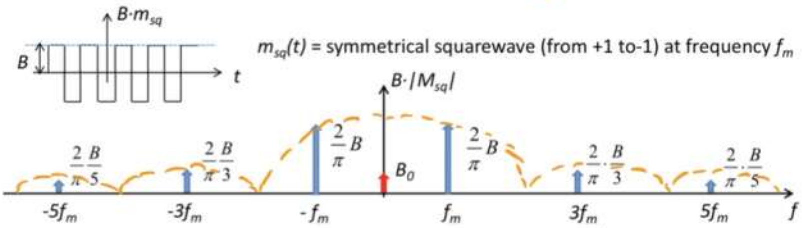
2 modi per creare la modulazione ad onda quadra
1) inverto il segnale ogni tot e amplifico sempre per B

2) Modulazione ON-OFF (è peggiore rispetto a quella del caso 1)

Switching example: chopper (ON-OFF modulation)



Qual'è la trasformata di fourier dell'onda quadra positiva e negativa?



$m_{sq}(t)$ = symmetrical squarewave (from +1 to-1) at frequency f_m

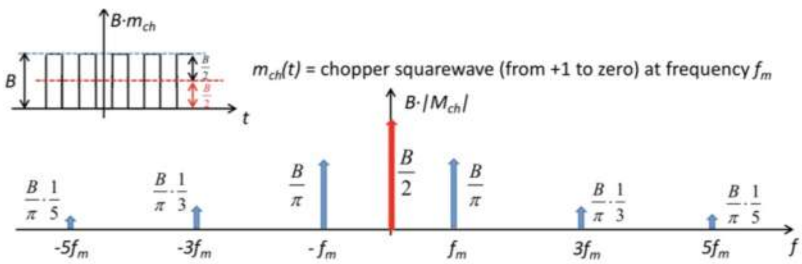
Per ricordarmi la trasformata di fourier la devo vedere come un sinc campionato (xè dalla teoria so che la serie infinita di un segnale è la trasformata del segnale campionato, in valore assoluto)

$$B\cdot M_{sq}(f) = B\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2}\left[\delta(f-f_{2k+1})+\delta(f+f_{2k+1})\right] \quad \text{with} \quad \begin{cases} f_{2k+1}=(2k+1)f_m \\ b_{2k+1}=\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)}\cdot\dfrac{4}{\pi} \end{cases}$$

In the amplitude modulation:

- each line of the reference M acts like a simple sinusoidal reference, i.e. shifts by its frequency and its phase the signal X and multiplies it by the amplitude $B\cdot b_{2k+1}$
- if the squarewave is not perfectly symmetrical (e.g. it has asymmetrical amplitude and/or duration of positive and negative parts) there is also a finite DC component with amplitude B_0 (possibly very small)
- the DC component does NOT transfer the signal X in frequency, just «amplifies» it by B_0

Notiamo che in zero non ho il delta perché è la componente DC e visto che il segnale è +B,-B allora la media è nulla



$m_{ch}(t)$ = chopper squarewave (from +1 to zero) at frequency f_m

Infatti qui nel caso di onda quadra solo positiva ho una componente continua

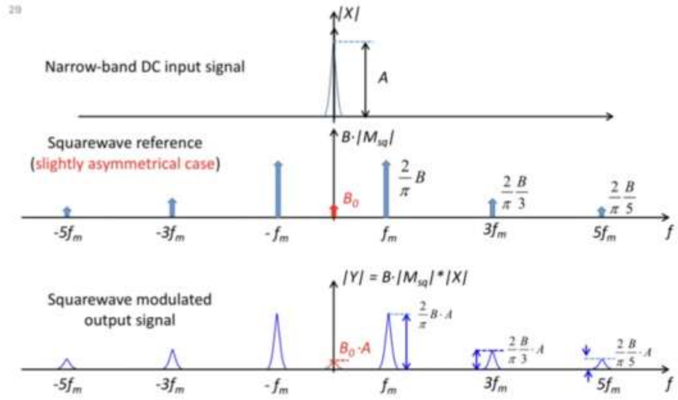
Chopper squarewave with amplitude B =
= Symmetrical squarewave with amplitude B/2 + DC component with amplitude B/2

$$B\cdot M_{ch}(f)=\frac{B}{2}\cdot M_{sq}(f)+\frac{B}{2}\cdot\delta(f)$$

In the amplitude modulation by a chopper:

- a replica of the signal X «amplified» by B/2 is transferred in frequency by the squarewave
- another replica of X «amplified» by B/2 is NOT transferred, it stays where it is

COSA SUCCEDE SE FACCIAMO LA MODULAZIONE CON QUESTA?

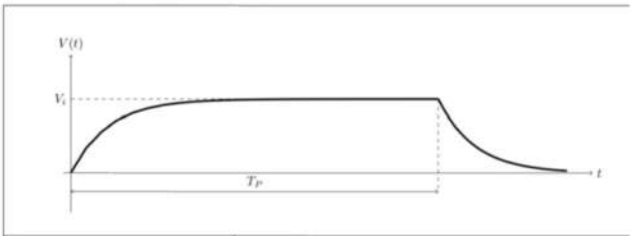


Notiamo che anche qui seguo i dettami del teorema, infatti lo spettro del modulante è 2 linee e le linee sono abbastanza distanti tra loro, ancora il modulo della convoluzione è la convoluzione dei moduli.

13.04.2021 Tutorial 2h

CONTINUIAMO CON L'ESAME DELLA VOLTA SCORSA

Exam Text of 26/09/2008 (Problem 1)



Signal:	Preamplifier:
T_P=10ms	White noise unilateral spectral density $\sqrt{S_{N,U}}$ = 50nV/√Hz
rise time $T_S \approx 0.2T_P$	1/f noise component with f_c=10kHz
amplitude V_i	Bandwidth: f_{PA}=100MHz

A pulse signal featuring an almost rectangular shape comes from a low impedance source and is fed to a preamplifier with the characteristics reported above.

Considering only white noise (by now):

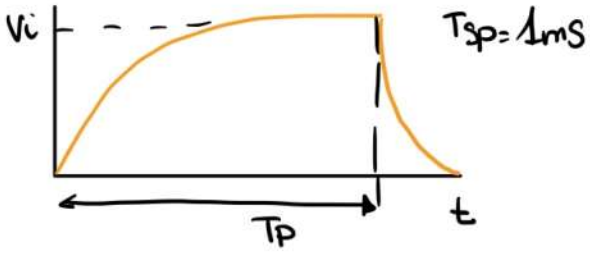
a) Evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured at the output of the preamplifier without using any additional filtering stage.
b) Select a filter that allows you to observe the signal waveform with improved resolution. Evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured in these conditions.
c) Now consider the exact shape of the signal, which has a rising edge described by the following exponential function $V(t) = V_i * \left(1 - e^{-t/T_{SP}}\right)$, with T_{SP}=1ms, and falling edge with the same shape. Select a filter to improve the precision in the measurement of the signal amplitude and evaluate the minimum amplitude of the signal that can be measured with the selected filter. Before selecting the filter, discuss the characteristics of the optimum filter, then select a filter that can be easily implemented and that is a good approximation of the optimum filter.

Now consider also the 1/f noise component:

d) In the conditions of point b), select an additional filter that allows you to observe the signal waveform limiting the impact of 1/f noise. Evaluate the noise contribution due to the 1/f noise component and therefore the minimum measurable signal amplitude in these conditions.
e) Considering now a known signal waveform as reported in point c), select an additional filter to limit the 1/f noise contribution. Evaluate the noise contribution due to the 1/f noise component and therefore the minimum measurable signal amplitude in these conditions.

PUNTO c)

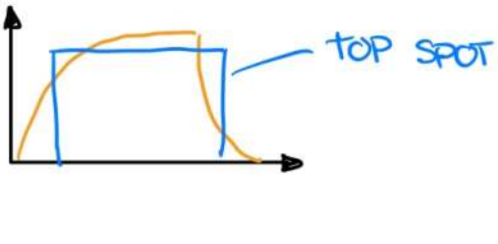
Abbiamo questo segnale



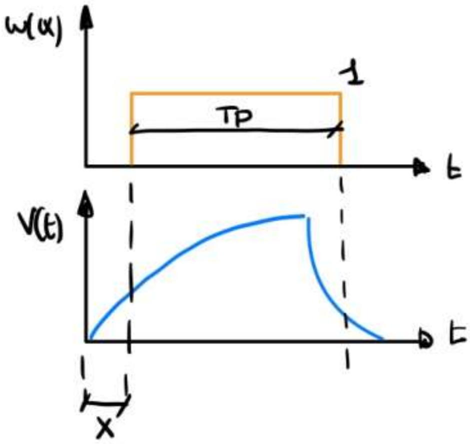
Abbiamo detto che filtriamo il segnale con un GI con Ta e Tp.
Facciamo così in modo che sia ovvio dove partire a filtrare. Noi non iniziamo o finiamo la nostra finestra d'integrazione prima o dopo il segnale sennò perdo solo rumore

nella finestra d'integrazione il rumore è sempre uguale allora sappiamo che l'SNRmax si ha quando il segnale è massimo

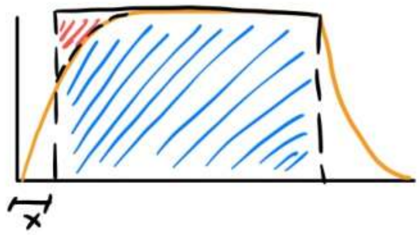
La scorsa volta ci ha detto che l'integrale ottimo è quando prendo il segnale quando ho Vi/2, cioè a 0,69 Tsp, non ho capito come ci è arrivata, ora lo spiega



Come calcoliamo sto valore?
Devo moltiplicare il segnale per la funzione peso della quale non so la posizione e so solo la durata.
Chiamiamo x la distanza tra il segnale e l'inizio della funzione peso $x \geq 0$



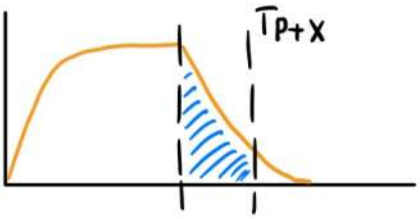
Devo calcolare l'integrale, per farlo divido in 2 il segnale per la prima parte prendo un rettangolo e poi sottraggo la parte in eccesso



Quindi questa prima parte sarà

$$S_1 = \underbrace{V_1 \cdot 1(T_p - x)}_{\text{integrale del rect per la funz peso}} - \underbrace{\left(V_1 e^{-\frac{x}{T_{sp}}} \cdot T_{sp}\right)}_{\text{integrale della parte esponenziale}}$$

Faccio poi l'integrale della seconda parte



Devo fare l'integrale di questa parte blu moltiplicata per la funzione peso.

Posso vedere questa parte come sottrazione di 2 esponenziali

e quindi $S_2 = V_1 T_{sp}\left(1 - e^{-\frac{x}{T_{sp}}}\right)$

Perciò il segnale viene

$$S = V_1 \cdot 1(T_p - x) - \left(V_1 e^{-\frac{x}{T_{sp}}} \cdot T_{sp}\right) + V_1 T_{sp}\left(1 - e^{-\frac{x}{T_{sp}}}\right)$$

quindi dobbiamo massimizzare questo segnale in x

$$S = V_1\left(T_p - x + T_{sp} - 2T_{sp} e^{-\frac{x}{T_{sp}}}\right)$$

e quindi

$$\frac{\partial S}{\partial x} = V_1\left(-1 + \frac{2T_{sp}}{T_{sp}} \cdot e^{-\frac{x}{T_{sp}}}\right) = 0 \quad \text{quando} \quad e^{-\frac{x}{T_{sp}}} = \frac{1}{2} \rightarrow x = 0{,}69\,T_{sp}$$

Perciò con $X = 0{,}69 T_{SP}$ abbiamo SNR_{MAX} il che ci fa venire $V_{i\,MIN} = 380nV$ che è un risultato molto vicino al filtro ottimo.

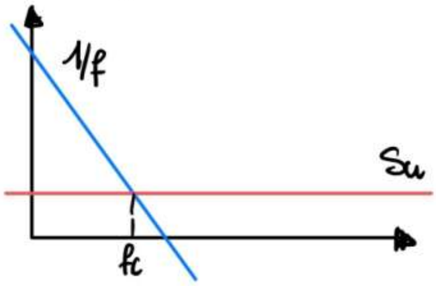
PUNTO d)

Ci dice nelle condizioni del punto b, noi nel punto b non sapevamo la forma del segnale.

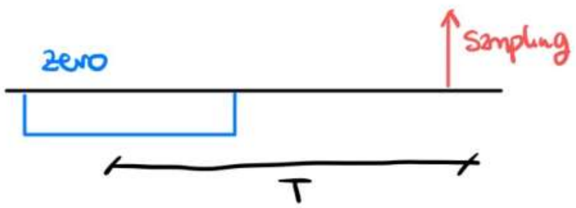
Adesso abbiamo anche il rumore 1/f. Devo capire se questo è o meno un problema.

Nel punto b) avevamo stimato la banda del segnale e avevamo usato un filtro RC-LPF con un polo a 2KHz.

Qui ci serve un altro filtro dato che abbiamo il rumore 1/f?
Con il filtro RC abbiamo messo solo un limite alle alte frequenze ora abbiamo uno spettro del rumore del tipo.



Usiamo il CDS approach, cioè prendiamo uno zero quando non abbiamo il segnale, questo funziona quando il rumore è correlato. Inoltre questa tecnica preserva molto bene il segnale
Se prendiamo un sampling per lo zero molto lungo (+ lungo è meglio è) in modo da ridurre il fatto che il rumore si doppi. (questa è la base del Correlated Double Filtering)



Tuttavia il CDF ha un fattore negativo e che la funzione di filtro passa alto dipende da T che è la distanza tra il centro dello zero e il campione.

Perciò il polo dato del passa alto dato dal CDF è

$$f_{HPP} \cong \frac{1}{2\pi T}$$ con T quello detto prima

il problema è che se non so quando abbiamo il segnale non so quanto bene filtrerà il mio filtro perché questo dipende dalla distanza T.
Questo porta molta complessità. anche avere un sinc non aiuta perché non so quando arriva
Per fare tutto molto più facile faccio un CR-HPF con una frequenza di taglio moolto molto bassa in modo che il segnale sia mantenuto pressocché uguale
supponiamo

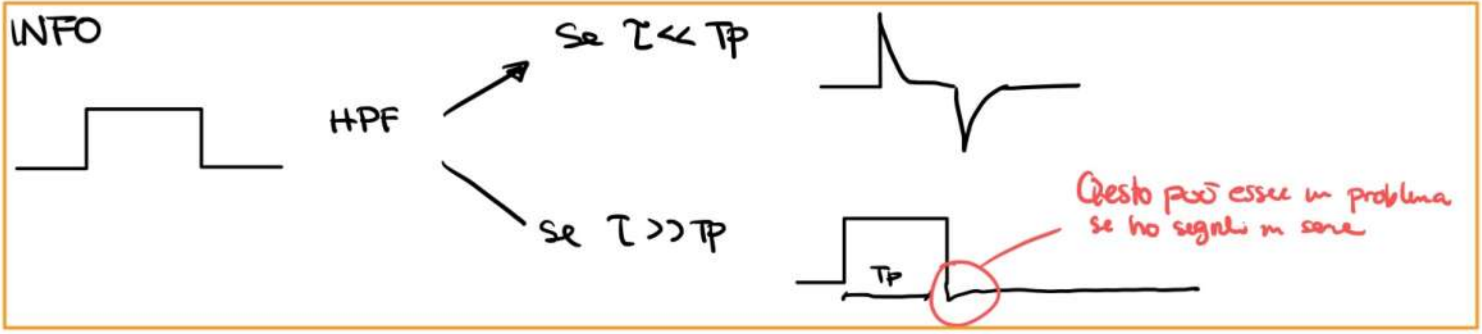
$$f_{PHPF} = 1Hz \longrightarrow \tau = 159ms \gg T_p$$

sappiamo che il filtro passa basso ha un polo a $f_{PLPF} = 2KHz$
possiamo ancora calcolare il valore della componente del rumore 1/f

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{S_{n,u} f_c \cdot \ln\left(\frac{f_{PLPF}}{f_{PHPF}}\right)} = 13{,}8\mu V$$

ci va lo spettro unilatero!!

INFO



Al contrario il rumore bianco dopo il passabasso è

Anche qui ci va lo spettro unilatero !!!

$$\sigma_w = \sqrt{S_{n,u} \cdot \frac{\pi}{2} f_{P,LPF}} \simeq 2{,}8\,\mu V$$

i 2 rumori si sommano quadraticamente perciò $\sigma_{TOT} = \sqrt{\sigma_w^2 + \sigma_{1/f}^2} = 14\,\mu V$

E quindi visto che il segnale è mantenuto uguale posso dire che

$$V_{iMIN} = \sigma_{TOT} = 14\,\mu V$$

PUNTO e)

Ora conosco il segnale, mi chiede di aggiungere un altro filtro per ridurre ancora di più il rumore $1/f$.
Visto che abbiamo $1/f$ non possiamo fare il whitening filter e filtro ottimo.

Possiamo usare qualsiasi passalto anche che modifichi il segnale perché tanto noi la forma del segnale la sappiamo già.

Ma attenzione!! il testo dell'es mi chiede un filtro aggiuntivo da aggiungere a quello dopo.

Quindi so già che abbiamo un CR-HPF con $\tau_{HPF} = 159ms$ ($f_{PHPF} = 1Hz$) a noi ci va bene che non modifichi il segnale xe ci siamo rotti le palle a calcolare il GI prima, perciò questa è la linea dei filtri

CR - HPF ($\tau_{HPF} = 159ms$)

↓ poi

GI con $T_G > T_P$ (LPF con rumore $f_{PLPF} = \frac{1}{2T_G} = 50\,Hz$)

perciò L'SNR in questo caso con il GI è

$$\frac{S}{N} = \frac{V_i\left(1 - 0{,}69\,\frac{\tau_{SP}}{T_P}\right)}{\sqrt{S_{n,u} \cdot f_c \cdot \ln\left(\frac{1/2T_G}{\frac{1}{2\pi\tau_{HPF}}}\right) + S_{n,u} \cdot \frac{1}{2T_G}}}$$

Abbiamo approssimato il rumore bianco solo con il limite ad alta frequenza

(il Link della scorsa lezione non va se cliccato ma bisogna copiare e incollare)

ESAME DEL 26/07/2007

è il nostro input

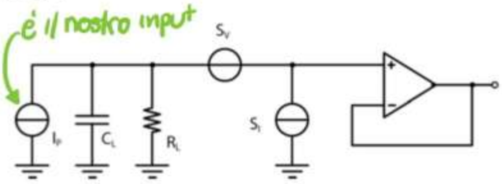


Fig.1

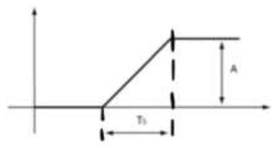


Fig.2

The signal of a photodetector is read out (Fig. 1) by means of a preamplifier featuring an extremely high input impedance. The bandwidth of the preamplifier is limited by a single pole at frequency f_P=10MHz and the noise referred to the preamp input is the sum of two wideband contributions having **unilateral** spectral densities $\sqrt{S_{V,U}}$ = 1nV/√Hz and $\sqrt{S_{I,U}}$ = 0.05pA/√Hz. C_L=10pF is the total capacitance between the preamp input and ground and R_L=200MΩ is the total load resistance. The voltage signal on the load has an almost-step shape with amplitude A, with linear rising edge of duration T_S=20µs (Fig. 2). We want to measure the signal amplitude A with good sensitivity, i.e. with a SNR higher than 10 even for a small A.

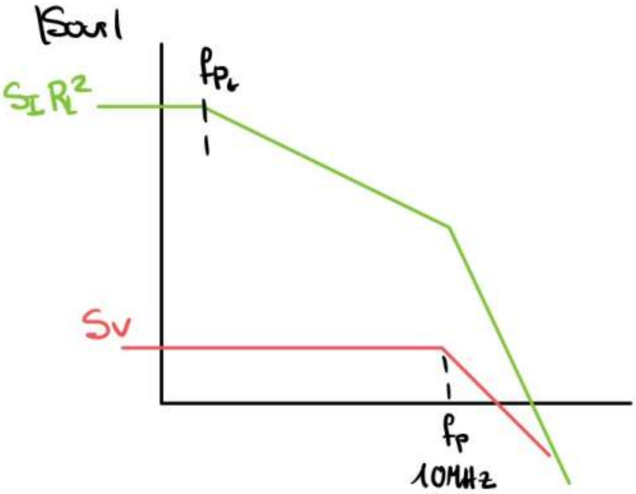
a) Evaluate the noise at the preamp output and therefore the minimum amplitude A that can be measured without using any additional filter.

Dobbiamo calcolare i contributi di tutti e 3 i rumori (S_v, S_i e quello della resistenza)

$$\sqrt{S_{R,u}} = \sqrt{\frac{4KT}{R_L}} = 9{,}1\ fA/\sqrt{Hz}$$ ← è il rumore di corrente relativo al resistore

Questo rumore di corrente è in parallelo con l'altro, li sommiamo quadraticamente e notiamo che il rumore della resistenza è trascurabile.

I rumori avranno andamento del tipo



Notiamo che il rumore di corrente è uguale ad un rumore di tensione

$$S_I \cdot R_L^2$$

Xè il rumore si moltiplica per il quadrato della fdt.

Inoltre notiamo che il circuito sopra C_L e R_L sono un passabasso per la corrente e quindi il rumore di corrente ha un altro polo f_P dipendente da C·R

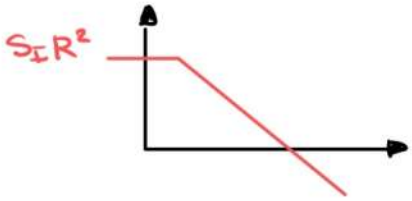
$$f_{PL} = R \cdot C = 80Hz$$

Calcoliamo il contributo del rumore Sv dopo il preamplificatore (Solo il contributo di Sv)

$$\sigma_V = \sqrt{S_V \cdot \frac{\pi}{2} f_P} = 3{,}96\,\mu V$$

Calcoliamo il contributo di S_I e poi sommiamo i 2 quadraticamente

Approssimiamo la curva $S_I R^2$ come se non avesse il polo f_p ad alta frequenza (questo va bene perché è un approx conservativa, noi calcoliamo + rumore di quello che ci sarà) Allora



$$\sigma_I = \sqrt{S_I \cdot R_L^2 \cdot \frac{\pi}{2} f_{PL}} = 112\mu V$$

Poi sommiamo quadraticamente σ_V e σ_I per ottenere il rumore d'uscita

$$\sigma_T = \sqrt{\sigma_V^2 + \sigma_I^2} \simeq \sigma_I = 112\mu V$$

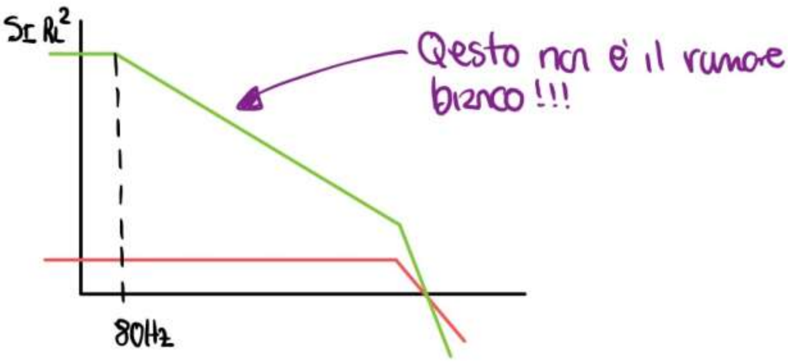
perciò la minima ampiezza che abbiamo è

$$A_{MIN} = 10 \cdot 112\mu V = 1{,}12\, mV$$

(10 xè noi vogliamo $SNR_{MIN} = 10$)

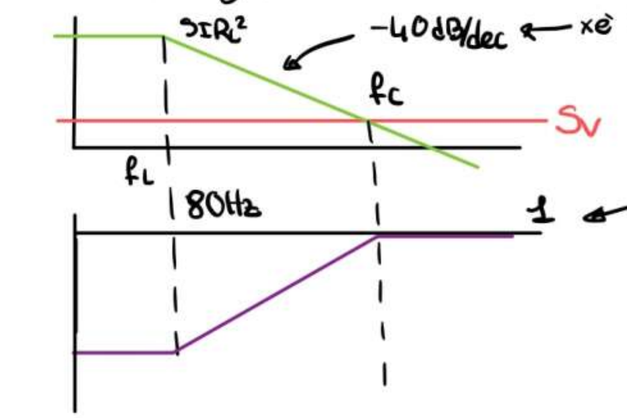
b) Discuss the weighting function of the filter that would allow you to obtain the best sensitivity in this system. Evaluate the noise of the measurement that you would have exploiting this filter and the minimum amplitude A that could be measured in these conditions.

> Se abbiamo solo rumore bianco → matched filter
> Se abbiamo $1/f^2$ dobbiamo usare un whitening filter che modifica segnale e rumore e fare il matched filter sul nuovo segnale.



Dobbiamo fare il whitening filter per trasformare il rumore di corrente in bianco

1) Whitening filter (consideriamo solo il primo polo di $S_I R_L^2$)

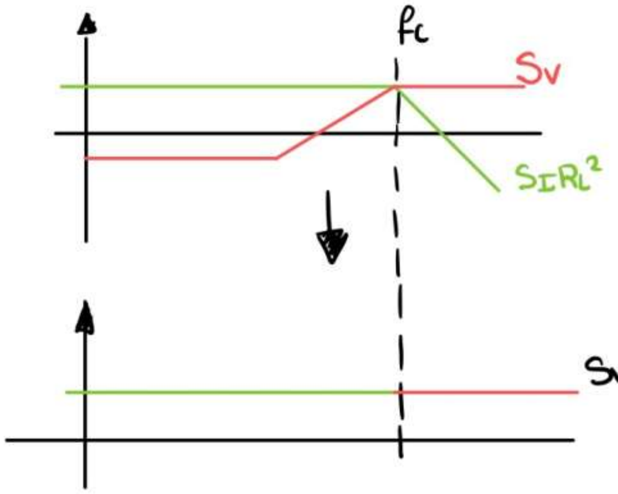


In pratica noi portiamo $S_I R_L^2$ a S_V e per farlo dobbiamo usare un filtro così. Se applichiamo quel filtro abbiamo che $S_I R_L^2$ diventa S_V e quindi bianco ma cosa succede a S_V?

SAPPIAMO CHE (fa magia con bode)

$$S_I \cdot R_L^2 \cdot f_L^2 = S_V \cdot f_C^2 \rightarrow f_C = \sqrt{\frac{S_I \cdot R_L^2}{S_V}} \cdot f_L = 800\,KHz$$

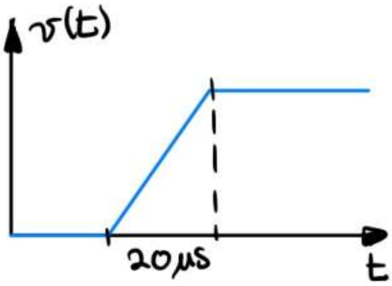
Cosa succede a S_V?

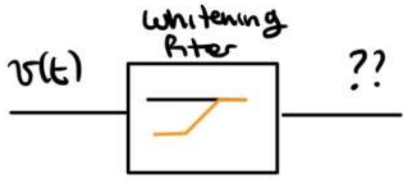


In pratica $S_I R_L^2$ è uguale al valore che aveva prima S_V fino a f_C.
Dopo f_C $S_I R_L^2$ cala a -40dB/dec e S_V torna al suo valore originale.
Nel complesso il possiamo non considerare tutti i valori che abbiamo sotto il valore di S_V così che possiamo dire che il rumore è bianco fino al polo del preamp che è molto + avanti
ConsiderIamo solo la curva dominante

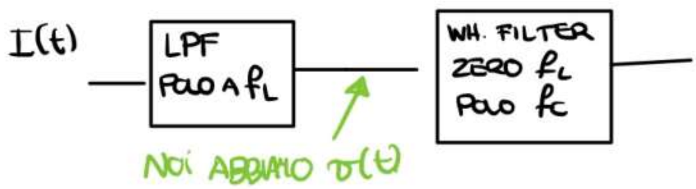
Sv....... polo del preamp

Questa era la parte facile ora devo capire cosa succede al segnale



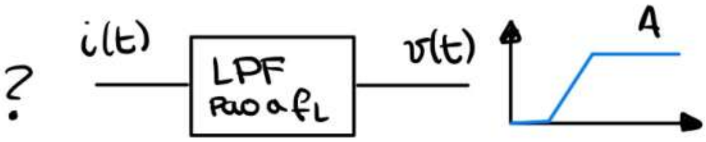


ATTENZIONE!! A noi ci è stato dato il circuito non solo lo spettro del rumore. Se noi vediamo il circuito fa un passa basso in corrente quindi sarebbe



e quindi sarebbe facile xè avremo un solo LPF con un singolo polo a f_C, tuttavia noi abbiamo il segnale $v(t)$ che si trova in mezzo tra i 2 blocchi.

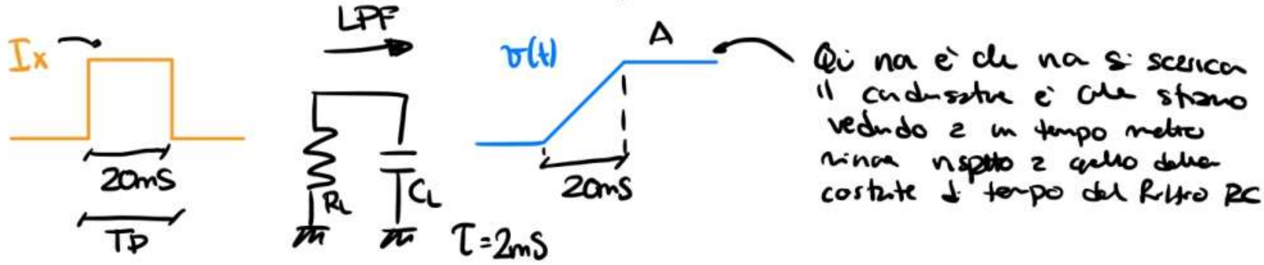
Dobbiamo trovare un modo per ricavare $I(t)$, cioè il segnale che buttato dentro all'LPF con polo a f_L ci da $v(t)$.



Noi dobbiamo ricordare che l'LPF può funzionare come un integratore (quando la costante di tempo del filtro è molto più piccola della durata del segnale) e quindi se in input all'LPF abbiamo un rect in uscita possiamo avere una rampa.

Dobbiamo verificare che la costante di tempo del filtro sia >> della durata del segnale d'ingresso. Sappiamo che la rampa dura 20µs quindi il segnale rettangolare durerà uguale.

Sappiamo che la tau del filtro è 2mS >> 20µS quindi il filtro fa da integratore



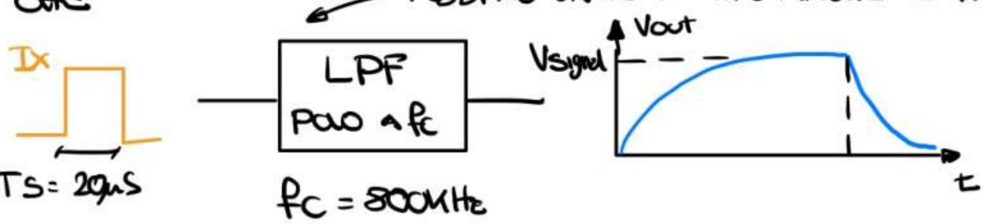
Adesso dobbiamo trovare l'ampiezza del rect. Sappiamo che A è l'ampiezza di tensione e sappiamo che il valore il passabasso fa l'integrale del segnale d'ingresso, quindi A è = l'integrale del rect d'ingresso

$$\frac{I_x \cdot T_P}{C_L} = A \longrightarrow I_x = \frac{A \cdot C_L}{T_P}$$

in pratica
ho l'area del rect $I_x \cdot T_P$ integrata su C_L (non ho capito molto bene)

OTTENIAMO CHE

ABBIAMO UNITO DENTRO ANCHE IL WHITENING FILTER



il filtro ha un polo molto più in alto che quello di prima quindi adesso noi vediamo tutta la carica e la scarica.

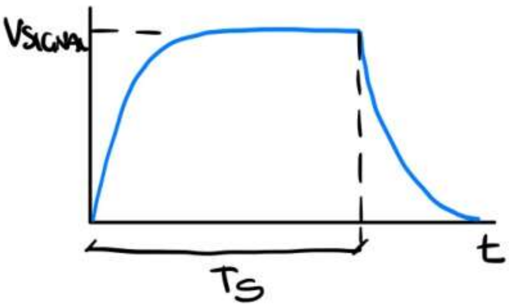
QUANTO È IL VALORE DI VSIGNAL? Dobbiamo "aprire di nuovo il filtro passa basso e vedere le componenti in cascata dei 2 blocchi

e quindi abbiamo che VFINAL È

$$V_{FINAL} = I_x \cdot R_L \cdot \frac{f_L}{f_c} = \frac{A}{T_S} \cdot T_C$$

è la durata del rect

Allora il segnale d'uscita è



$$\rightarrow \begin{cases} \dfrac{AT_C}{TS}\left(1-e^{-t/T_C}\right) & \text{per } 0 \leq t \leq T_P \\ \dfrac{AT_C}{TS}\, e^{-\frac{t-T_P}{T_C}} & \text{per } t \geq T_P \end{cases}$$

T_C è la costante di tempo di questo segnale.

- Notiamo che è lo stesso segnale che abbiamo studiato l'altro giorno all'esame.

Non facciamo i conti ma il risultato con un matched filter di questo segnale con $SNR_{MW} = 10$ è

$$A_{MW} = 159 \mu V$$

c) Select a filter that can be practically implemented and that is a good approximation of the weighting function discussed in the solution of point b). Select the filter parameters, evaluate the noise of the measurement carried out with this filter and evaluate the minimum measurable amplitude in these conditions.

Dobbiamo trovare un filtro che è applicabile praticamente

Posso usare un GI al posto del matched filter (se abbiamo un sinc signal) e dobbiamo mettere il GI nel punto ottimo come visto l'altro giorno $[0{,}69 T_C]$

Oppure posso implementare il matched filter discreto alzando molto la frequenza di campionamento

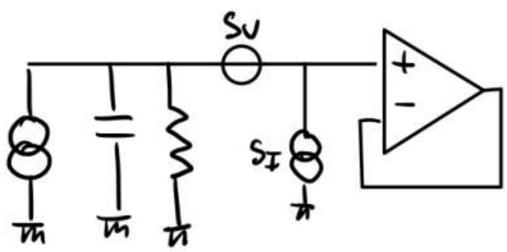
- il risultato migliore che avremmo potuto calcolare con un GI con $T_G = T_P$ e facendo partire l'integrazione dopo $0{,}69 T_S$ dell'inizio del segnale.

in questo caso (sempre $SNR_{MW} = 10$) allora $A_{MW} = 159{,}23 \mu V$

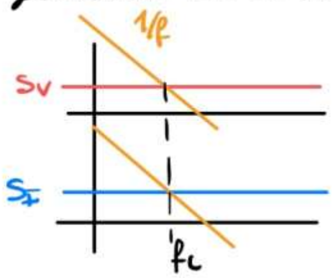
che è un valore molto simile a quello del filtro ottimo

d) Now consider an additional 1/f noise component with a corner frequency f_C=1kHz. Discuss if and how this contribution can affect the sensitivity of the measurement and discuss which additional filters would you use to limit 1/f noise, if needed. A qualitative evaluation is sufficient.

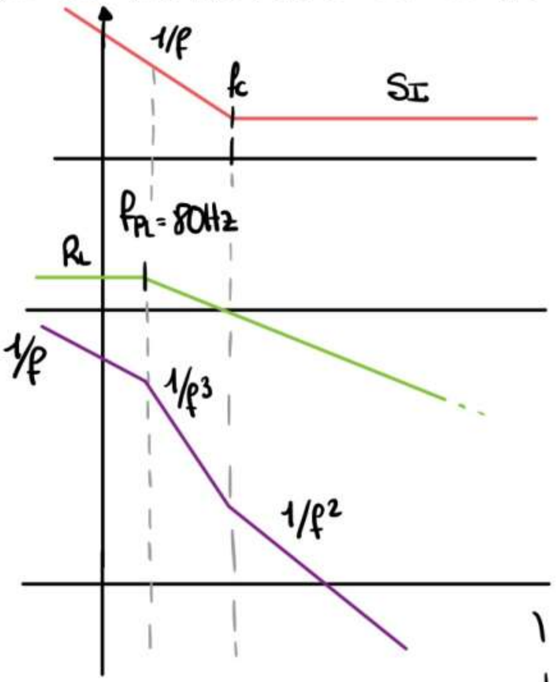
Dove nel circuito dobbiamo aggiungere la 1/f component?



Devo aggiungere una componente 1/f a entrambi i 2 generatori (con la stessa corner frequency)



Prima abbiamo detto che la componente dominante tra S_V e S_I è S_I (xè era più grande il valore). Perciò studiamo solo S_I e vediamo cosa succede al rumore filtrato normalmente e in caso poi aggiungo un filtro apposito per $1/f$

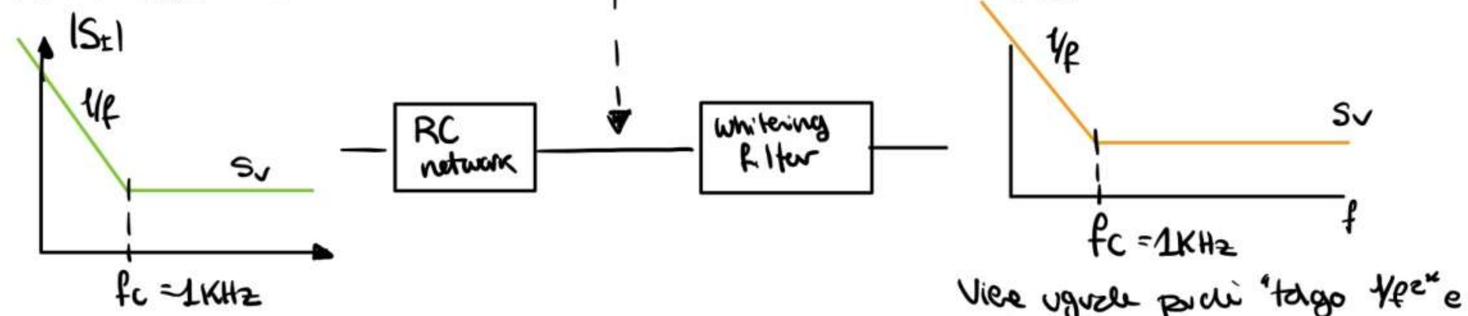


SPETTRO DI INPUT $\quad f_C = 1KHz$

LPF con un singolo polo dato da R_L e C

Dobbiamo moltiplicare lo spettro quadro per quello sempre al quadrato

Perciò abbiamo che



Viene uguale perché "taglio $1/f^2$" e vedo che mi torna la stessa cosa

- Dopo questi calcoli obbligatori per capire se in output ho $1/f$ allora adesso devo discutere modi per ridurre questo rumore

> Possiamo pensare di usare un filtro passa alto con $f_{TAGLIO} = 10 f_c$ ma così facendo potremmo distruggere il segnale e quindi il GI implementato prima non funzionerebbe più.
> Oppure usiamo sempre un passa alto CR con una costante di tempo alta così il segnale rimane molto simile.
>
> Oppure possiamo usare il CDS o CDF però implementare i valori di questi filtri è molto difficile

16.04.2021 3h

ATTENZIONE!! PRIMA DI QUESTA LEZIONE DEVO VEDERE IL BAND PASS FILTER 2

BAND PASS FILTER 3

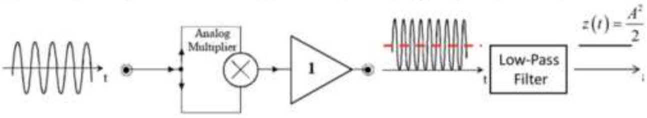
Com'è possibile misurare un segnale sinusoidale? che è quello che abbiamo in uscita dal filtro passabanda.
Nella realtà noi non abbiamo un segnale di sincronizzazione per misurare la sinusoide perciò è possibile misurarla? sì ci sono 3 metodi ma non sono un granchè
1) mean square detector
2) half-wave rectifier
3) full-wave rectifier

ATTENZIONE! NOI VOGLIAMO MISURARE SOLO L'AMPIEZZA DELLA SINUSOIDE (PERCHÈ SAPPIAMO GIÀ FASE E FREQ)

• METODO 1

Asynchronous measurement of sinusoidal signals with Mean-Square Detector

$x(t) = A\cos(\omega t + \vartheta)$ $\quad y(t) = A^2\cos^2(\omega t + \vartheta) = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + 2\vartheta)$ $\quad z(t) = \frac{A^2}{2}$



- It is a power-meter: the output is a measure of the **total** input mean power, sum of signal power (proportional to the square of amplitude A^2) plus noise power.
- The low-pass filter has NO EFFECT OF NOISE REDUCTION. In fact, it does not average the input, it averages **the square** of the input.
- For improving the S/N it is necessary to insert a filter **before** the Mean-Square Detector

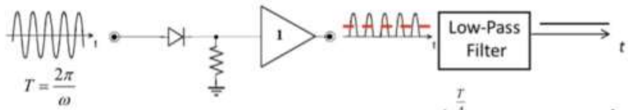
Prendiamo la sinusoide e la moltiplichiamo per se stessa, così ottengo in uscita con 2 componenti, una ad alta f e una costante che è uguale a $A^2/2$

Problemi
1) Fare la moltiplicazione, Analog multiplier costa ed è molto complesso
2) Alla fine usiamo un LPF solo per rimuovere la componente ad alta freq e non per togliere il rumore. Quando moltiplichiamo il segnale moltiplichiamo anche il rumore ma l'LPF alla fine non migliora per nulla l'SNR.

• METODO 2 e 3

Half-Wave Rectifier (HWR)

$x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

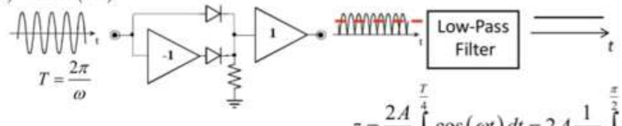


$\boxed{z(t) = \frac{A}{\pi}}$

$$z = \frac{A}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\omega t)\,dt = A\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{A}{\pi}$$

Full-Wave Rectifier (FWR)

$x(t) = A\cos(\omega t)$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$

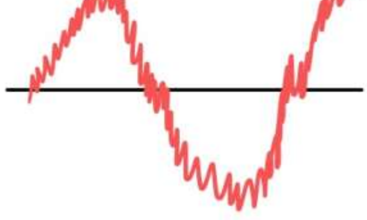


$\boxed{z(t) = \frac{2A}{\pi}}$

$$z = \frac{2A}{T}\int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}}\cos(\omega t)\,dt = 2A\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\, d\varphi = \frac{2A}{\pi}$$

qui non ho nessun analog multiplier ci piace

Qual'è il problema??
il problema è che il segnale è così



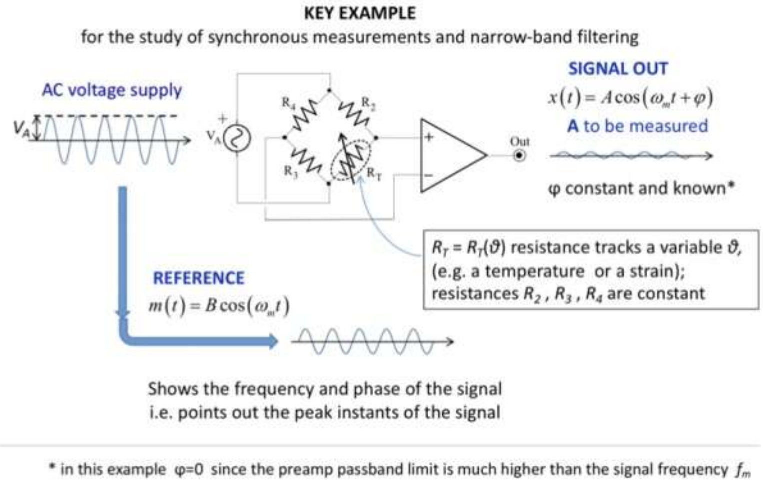
è quindi abbiamo un jitter sull'attraversamento dell'asse e quindi il diodo si attacca e si spegne, Questo significa che abbiamo un jitter anche all'uscita. Ciò significa che non riesco più a capire dove passa per zero il segnale.

Visto che i nostri segnali sono macroscopici questo filtro non serve a nulla.

Dobbiamo cambiare approccio, Synchronous or Phase information

Ci serve un segnale di sincronizzazione, ma questo dato troviamo noi (non ho ben capito come)

Abbiamo una sinusoide e abbiamo un segnale di sincronizzazione, noi vogliamo misurare A, che è l'ampiezza.

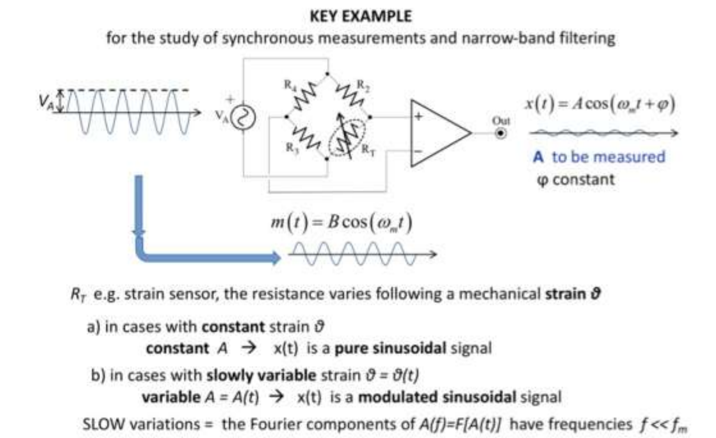


Noi applichiamo la sinusoide.

Ponte di Weetston, dove R_T è un sensore di temperatura che varia la sua resistenza

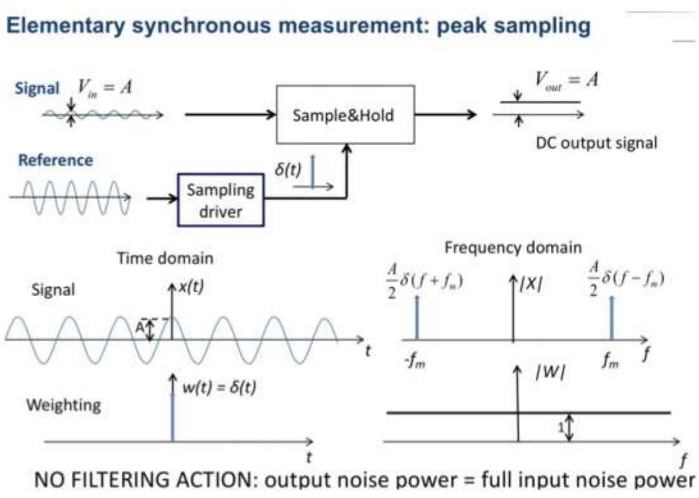
Noi applichiamo il segnale sinusoidale quindi sappiamo quando lo applichiamo

Noi vogliamo misurare l'ampiezza del segnale dopo il Ponte di Weetston.

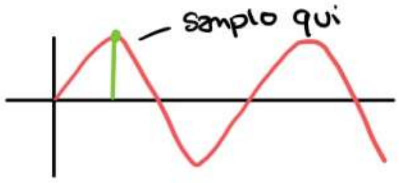


Dobbiamo avere che il segnale che vogliamo misurare (quello relativo alla temperatura) abbia banda molto minore rispetto a quella del segnale che noi applichiamo

In pratica ci troviamo in questa situazione:



Io voglio prendere il massimo del segnale, posso usare un SH e come faccio a sapere dove è il massimo? Io ho il segnale di sincronizzazione e quindi top



Nel dominio del tempo questo non sembra avere problemi, tuttavia appena vado in frequenza vedo che visto che uso un delta prendo tutto il rumore a tutte le frequenze

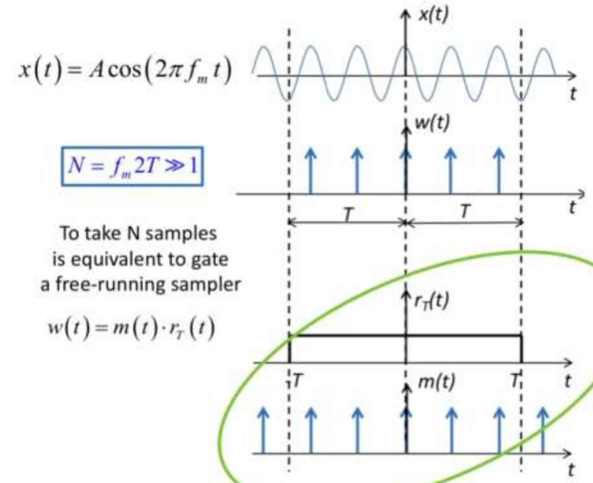
Funziona ma prendo troppo rumore, devo provare a ridurre il rumore.

Dobbiamo provare a migliorare il nostro SNR.

Notiamo che con il metodo di prima prendiamo solo il primo picco del segnale e non teniamo conto del fatto che il segnale è periodico.
Tenendo conto che il segnale è periodico posso migliorare il SNR di $\sqrt{N}$ con N numero di campioni (massimi) presi. Perché così possiamo fare la media dei campioni

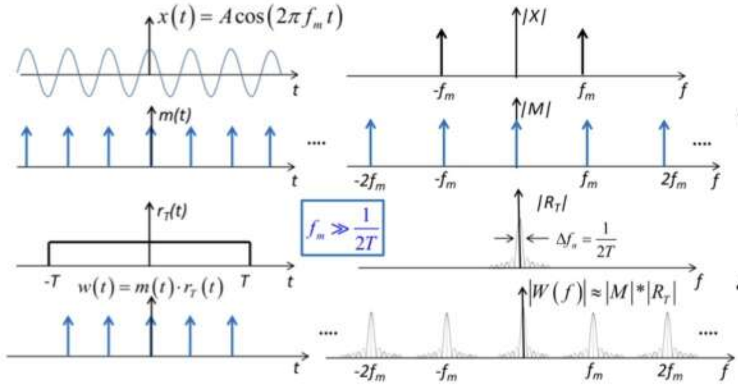
Synchronous measurement with averaging over many samples N >>1 of the peak

Non possiamo prendere N infiniti, non ha senso altrimenti magari "medio" su cose diverse tipo tra la temperatura di oggi e domani



Vedo questo segnale come la moltiplicazione di un rect con un free running delta, cioè un campionatore in continuo.

Studiamo ora il segnale in frequenza



FILTERING: narrow bands at frequencies $0, f_m, 2f_m, 3f_m$ ....

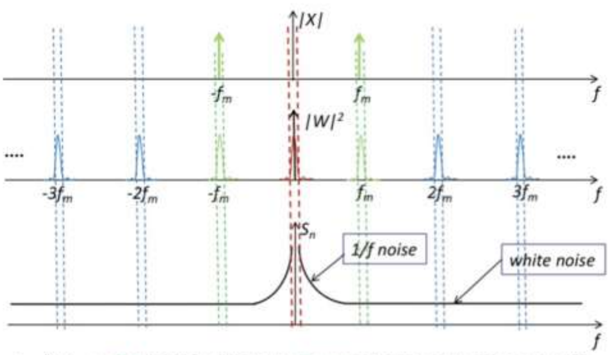
La trasf. di Fourier di un treno di delta è sempre un treno di delta xé devo vederlo come la trasformata di un delta singolo campionata ogni fm (campionata perché la ripetizione nel tempo è la campionatura in frequenza)

convoluzione perché nel dominio del tempo ho la moltiplicazione

è la trasf di Fourier del rect ripetuta perché 1 segnale ha spettro a linee e il filtro ha banda stretta. Visto che abbiamo preso poi campioni N questo è abbastanza vero.

LAVORIAMO IN FREQUENZA E STUDIAMO IL RUMORE (RICORDIAMO CHE STIAMO FACENDO TUTTO QUESTO PER 1/f)

(ha plottato la funzione peso al quadrato perché ci interessa il rumore, ma comunque riusciamo a capire che prendiamo il segnale)

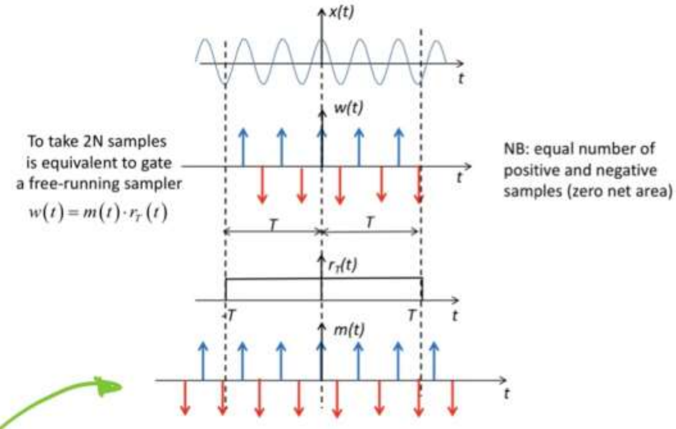


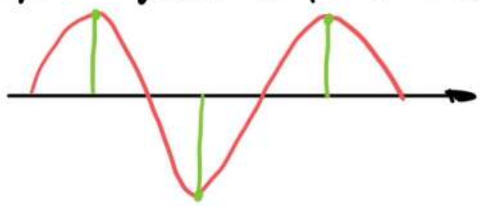
- At f_m useful band: it collects the signal and some white noise around it
- at f = 0 VERY HARMFUL band: it collects 1/f noise and no signal
- at $2f_m$, $3f_m$, ... harmful bands: they collect just white noise without any signal

Per il rumore dobbiamo moltiplicare la funzione peso al quadrato per Sn e fare l'integrale.
è meglio di prima perché almeno non prendiamo tutto lo spettro come prima con un singolo delta

Tuttavia abbiamo un problema, perché noi prendiamo il rumore anche a f=0 ed è un problema perché il rumore 1/f a zero è divergente.
Non ha senso per noi collezionare campioni a f=0 (DC component) perché il segnale è modulato e lì non ha nulla.

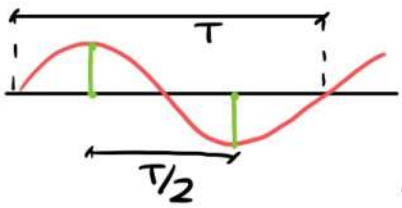
Come posso cambiare la funzione peso per togliere questa componente DC?

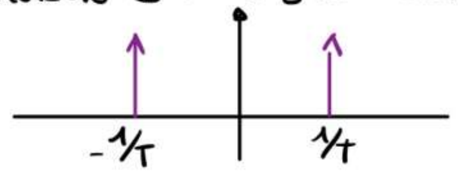




Campioniamo sia valori positivi che negativi in questo modo la media dei campioni sarà zero e in questo modo riesco a eliminare la componente in DC.

La trasformata di Fourier di questa è un po' un bordello.
Posso vedere questo segnale come il campionamento di un segnale cosinusoidale

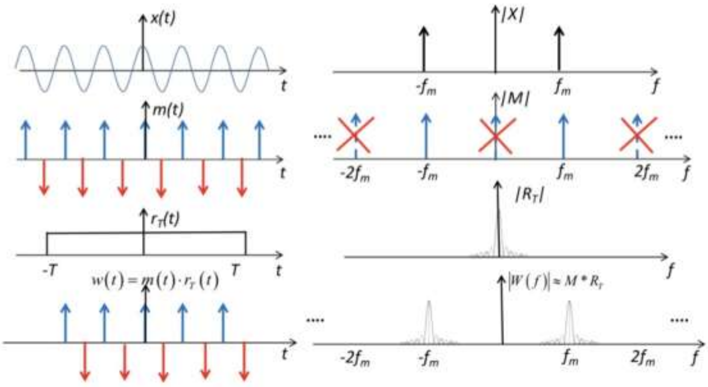




Trasformata di Fourier del coseno

Dato che abbiamo un campionamento nel tempo dobbiamo replicare questo segnale ogni 1/T nella frequenza

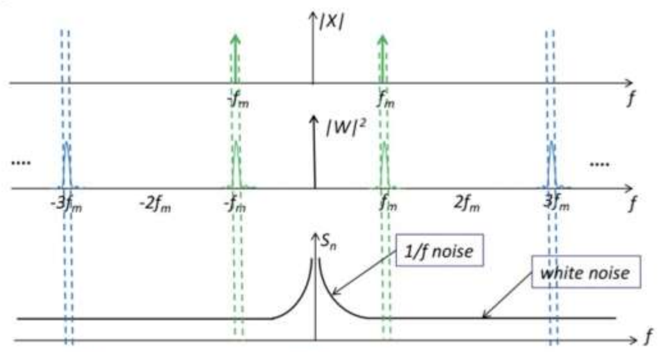
è il valore doppio perché si sovrappongono



FILTERING : narrow bands at f_m and at **odd** multiples $3f_m$, $5f_m$ ....

Notiamo che rispetto a prima abbiamo eliminato delle frequenze (es 0 $2f_m$...) questo ci va da dio perché così prendiamo meno rumore e soprattutto non prendiamo il valore in zero.

Improved Filtering by Sample-Averaging with DC Suppression

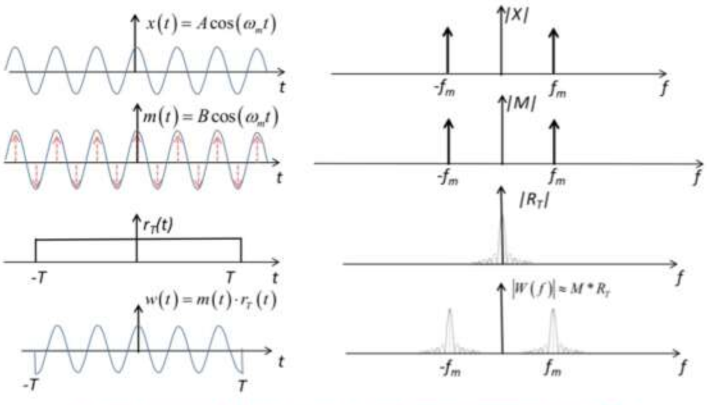


- at f_m **useful** band that collects the **signal** and some white noise around it
- **No more band at f = 0** , no more collection of 1/f noise
- at $3f_m$, $5f_m$ .... residual **harmful** bands that collect just white noise without any signal: how can we get rid also of them?

Rimuoviamo un po' di rumore che male non fa

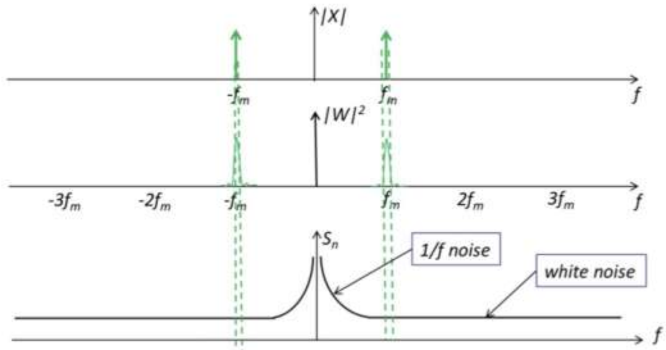
Ma si può sempre fare meglio

Ci accorgiamo che stiamo approssimando sempre di più la nostra funzione peso con il segnale.
Proviamo a farlo



TRULY EFFICIENT FILTERING : just one narrow band at f_m

Ovviamente prendiamo solo una piccola parte del segnale sinusoidale con il rect perciò in frequenza abbiamo 2 sinc.
Notiamo che è veramente un ottimo filtro



- at f_m useful band that collects the signal and some white noise around it
- No band at f = 0 , no collection of 1/f noise
- No residual bands at $3f_m$, $5f_m$ ... no more collection of white noise without any signal

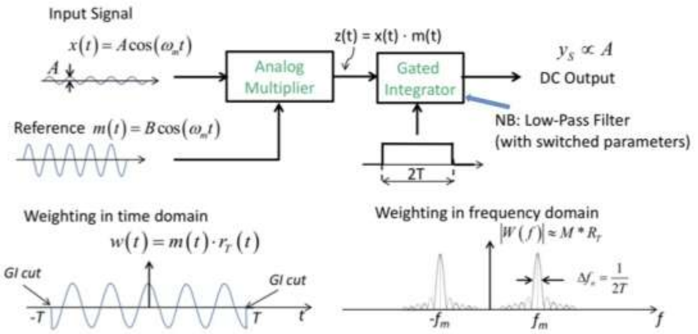
How to implement this optimized synchronous measurement?

È lo stesso concetto del matched filter

Ma come strazzo implementiamo sta roba nella realtà?

Basic set-up for Synchronous Measurement with optimized noise filtering

21



- NB the reference input to the multiplier is a **STANDARD** waveform, which absolutely does **NOT** depend on the signal: it is the same for any signal !!
- Therefore the set-up is a **LINEAR** filter (with time-variant parameters)

Devo usare un analog Amplifier!!

Per il momento ci dobbiamo convincere che questo fa quella funzione peso, poi lo dimostrerà.

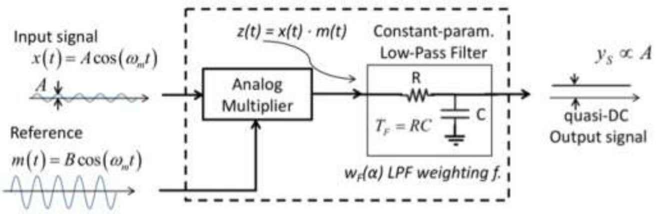
Grazie a questo tipo di filtri passabanda risolviamo un bel po' di problemi perché (al contrario dei Band Pass filter a) qui non ho problemi di frequenza ecc perché uso il reference signal come modulante
è molto meglio dei filtri passabanda fatti con gli RLC.

Occhio che in uscita ho un GI e quindi in uscita ho un numero e non una funzione. C'è un modo di avere una funzione in uscita al posto del numero?

IL NOME DI QUESTO FILTRO È IL LOCK-IN AMPLIFIER

From Discrete to Continuous Synchronous Measurements: principle of the Lock-in Amplifier (LIA)

With averaging performed by a **gated integrator**, the amplitude A can be measured only at **discrete times** (spaced by at least the averaging time 2T). However, by employing a **constant-parameter low-pass** filter instead of the GI, **continuous monitoring** of the slowly varying amplitude A(t) is obtained.



The **constant** parameter LPF performs a **running** average of the output $z(t)$ of the demodulator. The output is continously updated and tracks the slowly varying amplitude $A(t)$. This basic set-up is denoted Phase-Sensitive Detector (PSD) and is the core of the instrument currently called **Lock-in Amplifier**.

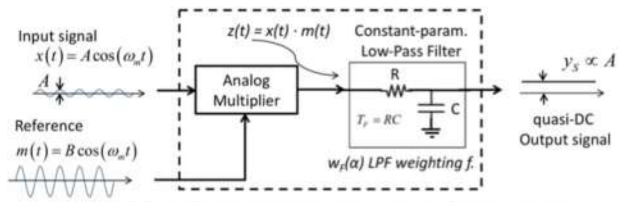
Dopotutto il GI è sempre un passabasso, perciò proviamo a usare un RC.

è più o meno la stessa idea del half bridge rectifier ma usiamo l'analog multiplier per sapere quando c'è il passaggio per zero.

Visto che non abbiamo un GI in uscita abbiamo un valore continuo che varia al variare dell'ingresso.

Ma la funzione peso com'è?

Principle of the Lock-in Amplifier (LIA)



The **constant** parameter LPF performs a **running** average of $z(t)$ over a few T_F that continously updates the output

$$y(t) = \int_0^\infty z(\alpha) w_F(\alpha) d\alpha = \int_0^\infty x(\alpha) m(\alpha) w_F(\alpha) d\alpha$$

By comparison with the definition of the LIA weighting function $w_L(\alpha)$

$$y(t) = \int_0^\infty x(\alpha) w_L(\alpha) d\alpha$$

we see how the **demodulation** and LPF are combined in the LIA

$\boxed{w_L(\alpha) = m(\alpha) \cdot w_F(\alpha)}$ $\rightleftarrows$ $\boxed{|W_L(f)| \cong |M| * |W_F|}$

$y(t) = \int_0^\infty = Z(\alpha) W_F(\alpha)$ è la formula standard per calcolare il segnale d'uscita di un Passabasso

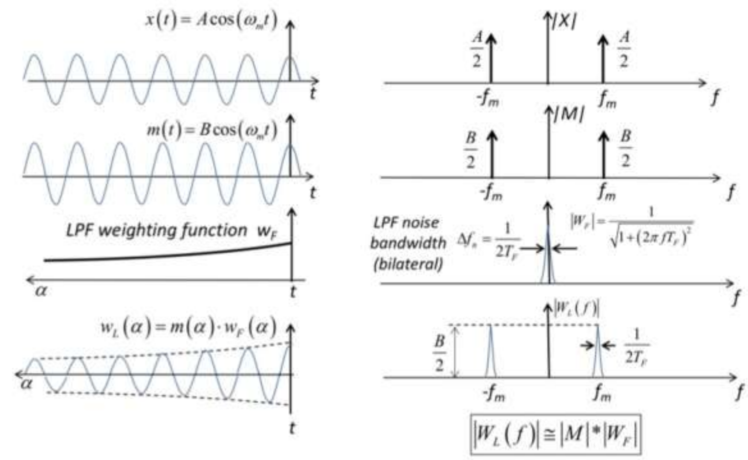
Visto che $Z(t) = x(t) \cdot m(t)$ possiamo vedere il tutto come $x(t)$ segnale d'ingresso di un filtro con funzione peso

$$W_L(\alpha) = m(\alpha) \cdot W_F(\alpha)$$

Il fourier della funzione peso è circa la convoluzione dei 2 perché uno due zeri spettro a linee e l'altro due zone banda molto più piccola ecc..

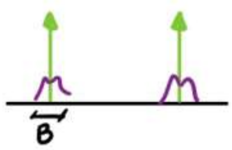
Figata!! L'unica cosa che non ci ispira molto è l'analog multiplier ma potremo trovare un modo per eliminarlo.

La funzione peso reale è

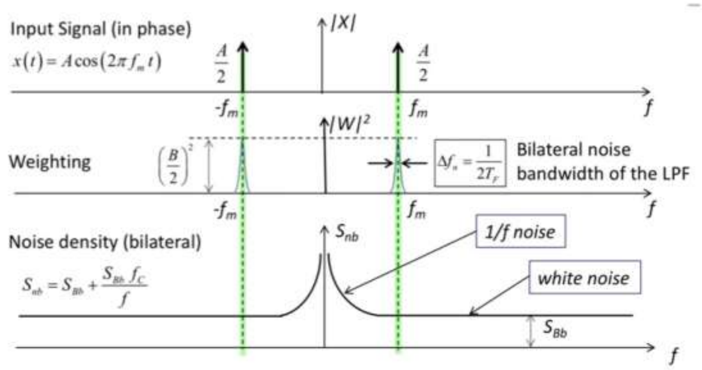


Notiamo che la funzione peso non è esattamente a quella di prima, e grazie al cazzo prima avevamo il rect del GI adesso abbiamo l'esponenziale decrescente del RC.

ATTENZIONE. Se io ho un segnale d'ingresso che cambia nel tempo allora il suo fourier sarà del tipo



Devo stare attento che la banda del passabanda sia maggiore di quella di B

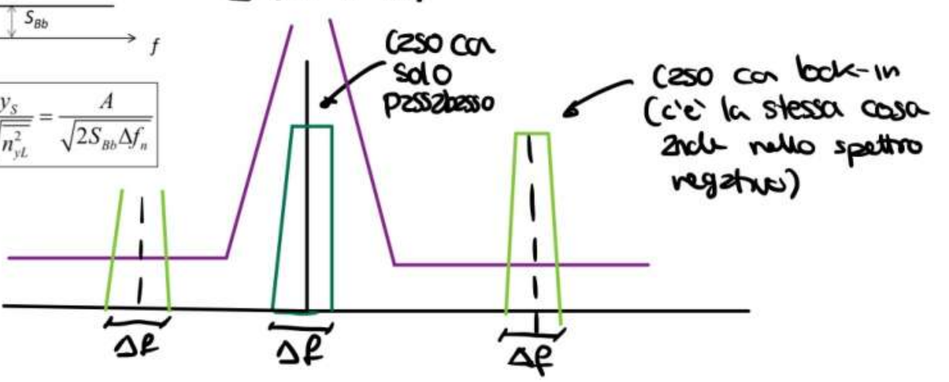


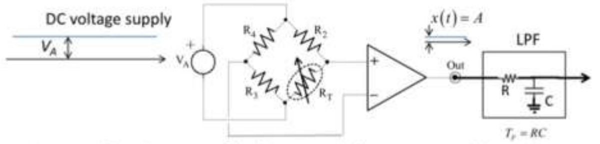
Output signal $y_S = 2\frac{A}{2}\cdot\frac{B}{2} = \frac{B}{2}A$

Output Noise $\overline{n_{yL}^2} = 2\left(\frac{B}{2}\right)^2 \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f_n = \frac{B^2}{2} \cdot S_{Bb} \cdot \Delta f_n$

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_L = \frac{y_S}{\sqrt{\overline{n_{yL}^2}}} = \frac{A}{\sqrt{2 S_{Bb} \Delta f_n}}}$$

S/N sembra peggiore di quello avuto usando soltanto un filtro passabasso senza modulazione perché noi prendiamo il rumore 2 volte sia nel positivo che nel negativo. Tuttavia con il passabasso prendo non solo il rumore bianco ma anche l'1/f





Qesto è l'esempio facendo soltanto il LPF. notiamo che nella formula del lato in abbiamo un 2 in più ma qui è lo spettro quello che cambia perchè qui abbiamo anche 1/f

Let us consider the set-up of the key example (measurement with resistive sensor) now with DC supply voltage V_A equal to the amplitude of the previous AC supply. The signal now is a DC voltage equal to the amplitude A of the previous AC signal.

With a LPF equal to that employed in the previous LIA we obtain:

Output signal $y_C = A$

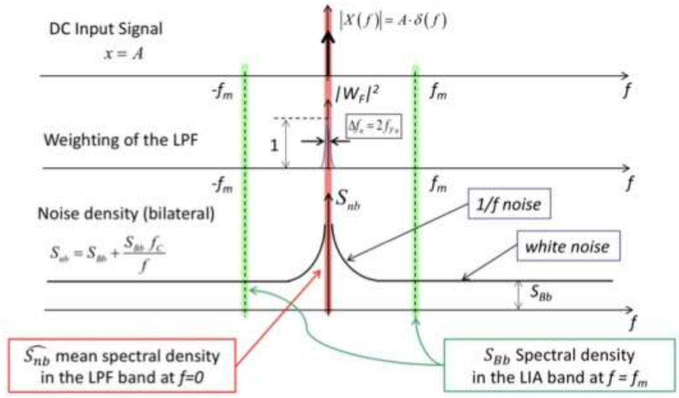
Output Noise $\overline{n^2_{yC}} = \widehat{S_{nu}} \cdot f_{Fn}$

($\widehat{S_{nu}}$ mean density in the LPF band)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_C = \frac{y_C}{\sqrt{\overline{n^2_{yC}}}} = \frac{A}{\sqrt{\widehat{S_{nu}}\, f_{Fn}}}$$

This S/N may look **better by the factor $\sqrt{2}$** than the S/N obtained with the LIA, but is this conclusion true?

NO, such a conclusion is **grossly wrong because $\widehat{S_{nu}} \gg S_{Bu}$!!**



A passband at $f = 0$ is a risk: 1/f noise gives $\widehat{S_{nb}} \gg S_{Bb}$!!

CAPIAMO QUINDI CHE IL PASSABANDA È MOLTO MEGLIO.

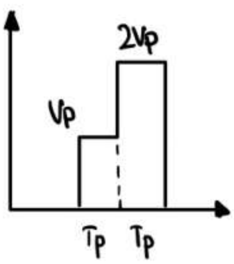
Tuttavia anche il passabanda ha un problema:

L'ANALOG MULTIPLIER → se aggiunge distorsione è un bordello perchè la distorsione del segnale sinusoidale porta dei delta in più nello spettro del segnale queste è un problema xè questi delta aprono delle finestre in più dove noi integriamo il rumore e quindi peggioriamo l'SNR.
Dobbiamo stare attentissimi al fatto che l'analog amplifier introduca una componente in DC perchè sennò prendiamo rumore infinito.

20.04.2021 Tutorial 2h

Ho balzato il tutorial per studiare, rivederlo

23.04.2021 Tutorial 3h



$T_p = 600nS$

$\sqrt{S_{v,u}} = 10nV/\sqrt{Hz}$

B/f^2 , $f_C = 3MHz$

Preamp $f_{PA} = 150MHz$

1) la costante di tempo del preamplificatore $\tau_{PA} = 1/2\pi f_{PA} = 1nS$, questo vuol dire che il segnale in uscita dal preamp è praticamente uguale a quello in ingresso.

sappiamo che nel caso del rumore $1/f^2$ ci serve un polo a bassa frequenza per limitare il rumore, in questo caso non abbiamo il limite nella low end.

In teoria perciò il rumore sarebbe infinito, nella realtà potremmo dire che in ogni caso esiste uno zero che limita nella realtà il rumore.

2) Dobbiamo realizzare il miglior matched filter.

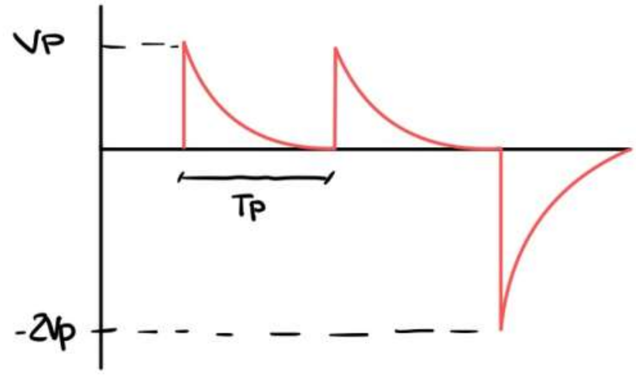
> withening filter

CR-HPF con $f_{pCR} = f_c$

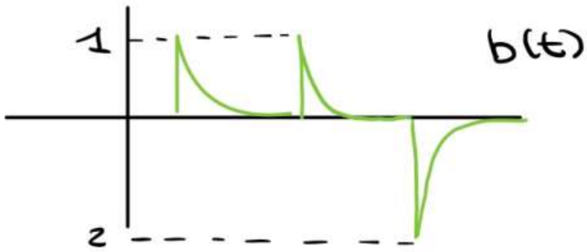
Dobbiamo comparare la costante di tempo del polo del CR con quella del segnale e vedere se il segnale cambia

$$\tau_{CR} = \frac{1}{2\pi f_c} = 53ns$$

Dato che $\tau_{CR} << T_p$ allora il segnale cambia, sarà un esponenziale decrescente con costante di tempo uguale a quella del polo τ_{CR}



Dato che tra i segnali ho T_p e $\tau_{CR} << T_p$ allora in pratica sono a zero quando inizia l'altro segnale



> ideal matched filter

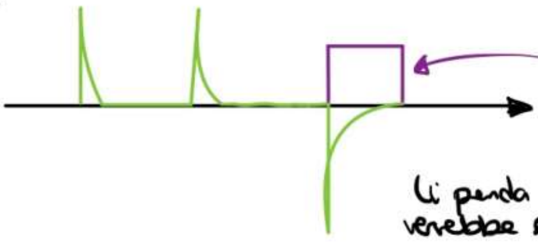
Non ci serve una b function con area unitaria

$$\left(\frac{S}{N}\right) = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_{v,u}}{2}}} \cdot \sqrt{K_{bb}(0)}$$

con questo otteniamo che $V_{PMIN} = 7.7\mu V$

> Utilizzare un Gated integrator, trovare lo spot ottimo usando una sola finestra d'integrazione di durata arbitraria

Usiamo sempre il withening filter visto che ci serve una limitazione a bassa frequenza



Visto che i segnali sono molto distanti nel mezzo noi integreremo solo rumore e quindi non avrebbe senso fare un GI unico che li prenda tutti, inoltre se li integriamo tutti i segnali ci verrebbe 0.

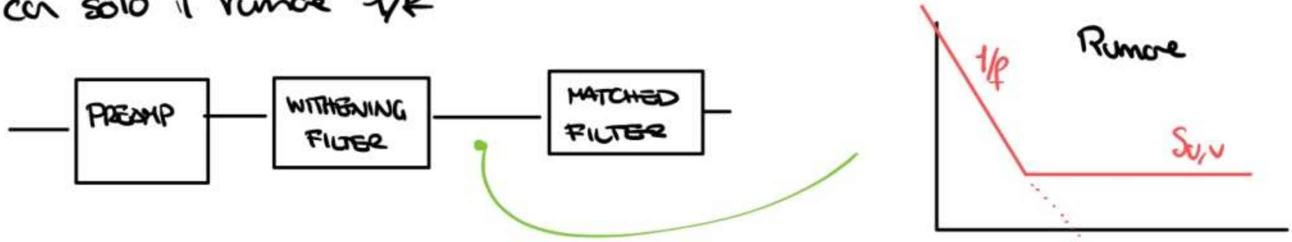
Dove piazziamo il GI? lo mettiamo sul $-2V_p$ perchè è dove abbiamo l'ampiezza maggiore.
Ora dobbiamo scegliere la larghezza, dato che usiamo un singolo esponenziale allora possiamo dire che

$$T_G = 1{,}25\,\tau$$

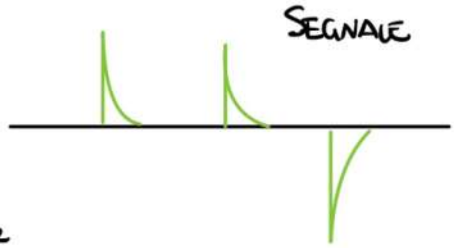
così si ottiene che $V_{DMIN} = 24{,}18\,\mu V$

> Consideriamo ora uno spettro del rumore B/f^3 con la stessa f_c. Dobbiamo calcolare un filtro.

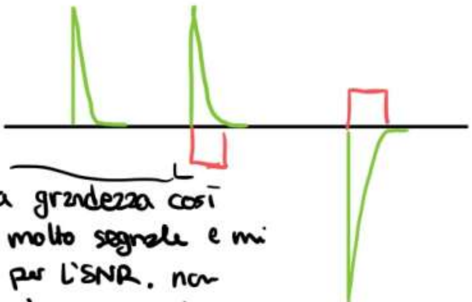
Dobbiamo cercare di capire se quello che abbiamo fatto può essere riutilizzato.
Se continuiamo ad usare il withening filter ci va bene perchè così rimaniamo con solo il rumore $1/f$



Ci serve qualcosa per filtrare via la componente $1/f$, un filtro passa alto



Potremmo usare il correlated double filtering
ci va benissimo perchè abbiamo un segnale positivo e 2 negativi (se facciamo la sottrazione ci viene peluse che il segnale è maggiore)



GI
di questa grandezza così riprendo molto segnale e mi va bene per l'SNR. non faccio il GI più largo sennò miglioro il high pass filter ma peggioro molto il segnale

* correlated double filtering
per far sì che questo sia un passa alto devo fare la sottrazione tra le 2 finestre e quindi questo funziona solo se ho che i segnali sono uno positivo e uno negativo

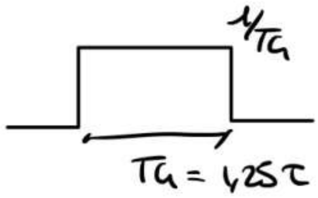
IMPORTANTE

Qui ho 2 segnali positivi quale dei 2 prendo? Dal punto di vista del segnale è uguale ma dal punto di vista del rumore no. il filtro passa alto migliore è quello con il segnale più vicino. (Quando ho i 2 GI vicini è meglio)

Per semplicità scelgo $T_G = 1{,}25\,\tau$ e faccio un CDF con tutte e 2 le finestre sul segnale come detto sopra

Se usiamo gated integrator siffatto

la distanza tra i 2 GI è T_p.



Il segnale sarà dunque

$$S = -\left[\underbrace{2V_p \frac{1}{T_a} \cdot \tau_w \left(1 - e^{-\frac{T_a}{\tau}}\right)}_{\text{integrale del segnale esponenziale } 2V_p} + \underbrace{V_p \frac{1}{T_a} \cdot \tau_w \cdot \left(1 - e^{-\frac{T_a}{\tau}}\right)}_{\text{integrale del primo esponenziale } V_p}\right]$$

Perciò

$$S = -\left(2V_p \cdot \frac{1}{T_a} \cdot \tau_w \cdot 0{,}71\right) \cdot 1{,}5$$

Il rumore è

è unilatera anche questa???

$$N = \sqrt{\underbrace{2\, S_{v,u} \cdot \frac{1}{2T_a}}_{\text{è la componente rumore del rumore bianco}} + 2\, S_{v,u}\, f_c \ln\left(\frac{\frac{1}{2T_a}}{\frac{1}{2\pi T_p}}\right)}$$

è unilatera!!!

perché usiamo 2 finestre d'integrazione uguale

Frequenza dell'equivalent high pass filter $f_i \simeq \frac{1}{2\pi T_p}$

con questa selezione di parametri otterremo $V_{PMIN} = 34{,}88\,\mu V$

> Consideriamo ora il caso di avere solo rumore bianco con lo stesso segnale d'ingresso di prima.

Il preamplificatore ha sempre polo $f_p = 150\,MHz$

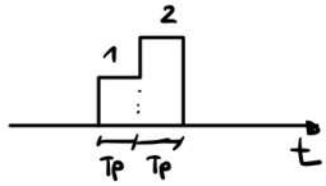
A) V_{PMIN} senza nessun filtro.

Non abbiamo più il rumore $1/f$ quindi qui possiamo tirare fuori un valore di V_{PMIN}

$$S = \frac{2V_p}{\sqrt{S_{v,u} \cdot \frac{\pi}{2} f_p}} \Rightarrow V_{PMIN} = \frac{\sqrt{S_{v,u} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_p}}{2}$$

b) filtro ideale → optimum filter

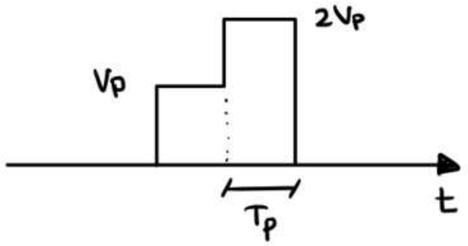
b(t)



$$SNR_{OPT} = \frac{V_P}{\sqrt{\frac{S_n}{2}}} \cdot \sqrt{5T_p}$$

$$V_{PHW} = 4,08\,\mu V$$

c) single integration window con un GI

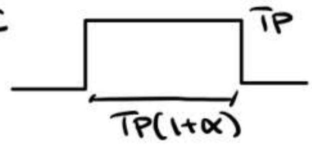


Dove mettiamo la nostra integration window?
Dobbiamo fare i conti..

Sicuramente con il GI devo prendere tutta la parte con 2Vp, devo capire quanta altra parte devo prendere

$T_G = T_p(1+\alpha)$ con $0 \le \alpha \le 1$

GI



allora il segnale sarà

$$S = 2V_pT_p + V_p\alpha T_p = V_pT_p(2+\alpha)$$

il rumore invece

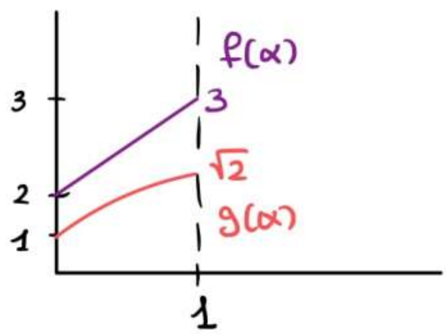
$$N = \sqrt{\frac{S_{v,u}}{2} \cdot T_p(1+\alpha)}$$

Perciò

$$SNR = \frac{V_pT_p(2+\alpha)}{\sqrt{\frac{S_{v,u}}{2} \cdot T_p} \cdot \sqrt{1+\alpha}}$$

Dobbiamo massimizzare codesta funzione

$$\frac{2+\alpha}{\sqrt{1+\alpha}} = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$$ ricordiamo che $0 \le \alpha \le 1$



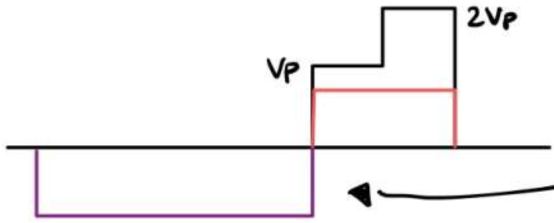
Dopo aver plottato le funzioni notiamo che il massimo si ottiene per $\alpha = 1$

Si ottiene dunque che il max si ottiene con $T_G = 2T_p$

$$SNR = \frac{V_p}{\sqrt{\frac{S_{v,u}}{2}}} \cdot \sqrt{T_p} \cdot 2,12 \rightarrow V_{PHW} = 4,31\,\mu V$$

d) additional 1/f noise component

Dobbiamo mettere un High-pass filter. Un opzione è quella di usare il correlated double filtering che ha già il vantaggio di lasciare il segnale uguale così che poi possiamo applicare il GI che si avvicina molto al filtro ottimo.



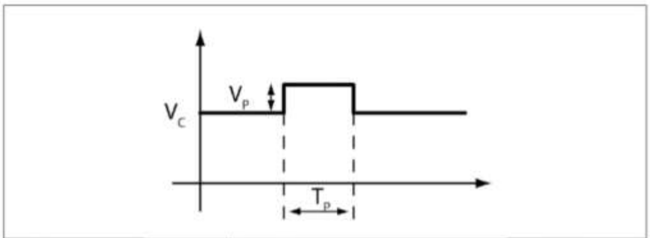
CDF con 2 finestre adiacenti

posso fare la finestra d'integrazione del rumore molto grande

Possiamo anche usare un baseline restorer o un HPF CR con $\tau \gg T_P$

Recupero 20.04.2021 — Tutorial

Exam text of 22/06/2009 (Problem 1)



Signal:	Preamplifier:
T_P=50µs variable amplitude V_P repetition rate f_P baseline $V_C \approx$ 10mV	White noise unilateral spectral density $\sqrt{S_{N,U}}$ = 20nV/√Hz Bandwidth: f_{PA}=1MHz

NON SAPPIAMO IL VALORE ESATTO DI Vc, PERCIÒ NON POSSO MISURARE Vc+VP E POI SOTTRARRE Vc.

Rectangular signals coming from a low impedance source are fed to a preamplifier featuring the characteristics reported above. The signals are periodical with repetition rate f_P and the amplitude varies from pulse to pulse. The amplitude V_P of each pulse is to be measured individually.

Considering a repetition rate f_P = 1Hz:

a) if only constant-parameter filters and a peak detector are available, select a filter that allows you to measure the pulse amplitude excluding the baseline and that substantially improves the SNR with respect to that obtainable without any filtering action. Evaluate the minimum amplitude V_P that can be measured in these conditions.

b) Discuss the criteria you would use to select a new filter to further improve the SNR. Propose a filter that can be practically implemented considering that now also switched-parameter filters (e.g. a Gated Integrator) are available. Evaluate the minimum amplitude V_P that can be measured in these conditions.

c) Now consider also a 1/f noise component with f_c=50kHz. Evaluate the impact on the minimum amplitude that can be measured with the two solutions of point a and point b. Discuss the guidelines to design a filter that could allow you to reduce the impact of 1/f noise. Discuss how you could modify the two solutions to improve the sensitivity of your system in these conditions.

Now consider a higher repetition rate f_P = 6kHz:

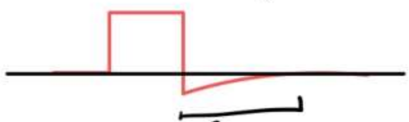
d) Discuss what you would obtain with the filters used to solve point a and b. Discuss if the proposed filters can be used in these conditions or if they have drawbacks. If none of the two previous solutions can be used in this case, discuss how can you modify at least one of them to make it suitable to be used in these conditions.

a) Dobbiamo rimuovere la baseline e usare solo constant parameter filters e un peak detector.

> Ci serve un High pass filter per rimuovere la baseline e anche questo passaggio deve essere constant parameter.
Possiamo usare un CR-HPF (possiamo anche usare un correlated double sampling)

Se $\tau_{CR} \ll T_P$ (ma vuol dire polo ad alta frequenza e quindi non è il nostro caso)

$\tau_{CR} \gg T_P$ (il segnale rimane pressocché uguale)



Dobbiamo fare in modo che questo esponenziale vada a zero prima del prossimo impulso
Abbiamo abbastanza tempo 1s - 50µs.

Se supponiamo $\tau_{CR} = 100 T_P = 5mS$ → L'exponential tail va a zero in $5\tau_{CR}$ quindi in 25ms, capiamo quindi che non rompe le balle al segnale successivo.

Oltre al CR-HPF ci serve un passabasso, a parametri costanti. Quale usiamo? Usiamo un RC.
Abbiamo già dimostrato che nel caso di un RC e un segnale rettangolare la tau ottima è:

$$\tau_{RC} = 0{,}8\, T_P = 40\mu s$$

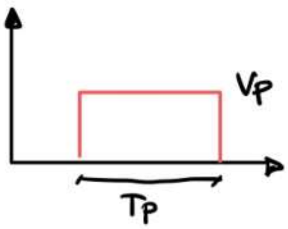
Con questi valori dei parametri abbiamo che

$$V_{PMIN} = 2{,}22\mu V$$

(abbiamo approssimato come se avessimo solo il low pass visto che $\tau_{RC} << \tau_{CR}$)

b) Possiamo introdurre i non constant parameter filters!

con lo stesso high pass filter del punto precedente possiamo implementare il filtro ottimo con un GI.



Allora $T_G = T_P$, così otteniamo che

$$V_{PMIN} = 2\mu V$$

c) Abbiamo anche una componente del rumore 1/f con $f_C = 50KHz$.
Dobbiamo valutare l'impatto di questo rumore su quello che abbiamo già fatto.
(si capisce da qui che usare uno CDS non era giusto perché qui avremmo avuto problemi)

> Con soluzioni del punto a)

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{S_{n,u}\, f_C \cdot \ln\left(\frac{f_{PLPF}}{f_{HPF}}\right)} = 9{,}8\mu V$$

$\sigma_W = 1{,}58\mu V$ è lo stesso di prima

perciò l'SNR sarà

$$SNR = \frac{V_P(1 - e^{-T_P/\tau_{LPF}})}{\sqrt{\sigma_W^2 + \sigma_{1/f}^2}} = 1 \rightarrow V_{PMIN} = 13{,}98\mu V$$

> Nel caso del punto b otteniamo

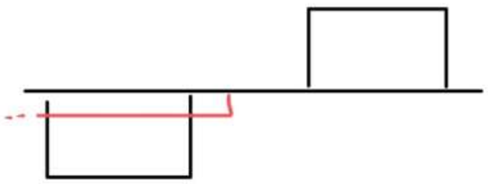
$$V_{PMIN} = 10{,}88\mu V$$

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{S_{n,u} f_C \cdot \ln\left(\frac{\frac{1}{2T_G}}{f_{HPF}}\right)}$$

COME MIGLIORIAMO LA SENSIBILITÀ DEL NOSTRO SISTEMA?

Correlated double filter, ha un vantaggio rispetto all'HPF cioè possiamo avere un cut off molto più alto rispetto all CRHPF perchè il CDF non ha effetto sul segnale.

Possiamo fare 2 scelte



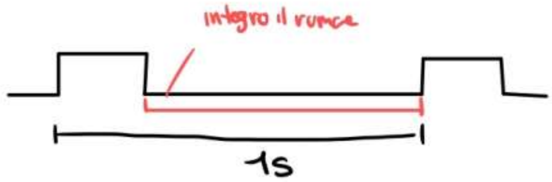
usare almeno 2 fineste della stessa durata, possiamo anche fare meglio di così usando una finestra molto più lunga della durata del segnale

Dobbiamo capire dove posizionare la finestra d'integrazione e quanto larga farla. è importante capire la posizione dove metterla perchè:

$$f_{HPF} \simeq \frac{1}{2\pi T_F}$$

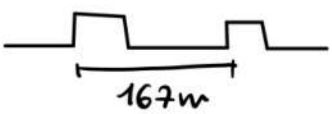
dove T_F è la distanza tra i 2 centri delle 2 finestre d'integrazione

Per sapere quanto larga farla noi sappiamo che



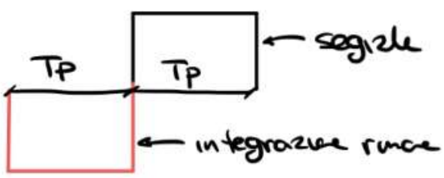
così nel caso b)

Da quello che ho capito in questo caso posso considerare come se la finestra d'integrazione del rumore sia >> rispetto a quella del segnale



nel caso c)

Nel caso io abbia



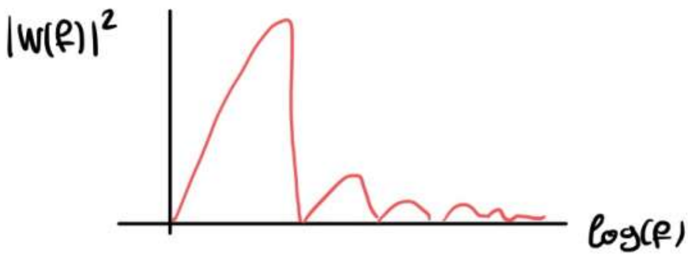
La formula del lowpass è $\simeq \dfrac{1}{2T_p}$ freq del GI

La formula dell'highpass è $\simeq \dfrac{1}{2\pi T_p}$

perchè la distanza tra i centri è T_p

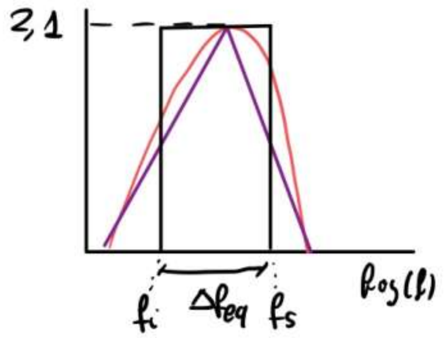
Visto che la differenza tra le 2 frequenze non è elevatissima la formula con il logaritmo non è più una buona approssimazione.

Dobbiamo allora guardare il modulo della funzione peso al quadrato in un linear-log plot



Dobbiamo trovare un modo per approssimare l'ambarada.

-Consideriamo soltanto il primo lobo e lo approssimiamo con un triangolo



Non sappiamo ancora come calcolare l'area in un linear log scale ma sappiamo che il rettangolo equivale perciò approssimiamo tutto con quello

$$A_{ret} = \frac{\text{peak value}}{2} \ln\left(\frac{f_S}{f_i}\right)$$

$= 2,1$

Nel nostro caso

$f_s/f_i = 3 \rightarrow A_{ret} = 2,3$

Solo nel caso di 2 GI di lunghezza uguale posti attaccati (solo in questo caso) allora abbiamo che

$$\sigma^2_{1/f} = \sqrt{S_v f_c \cdot 2,3}$$

27.04.2021 Esempio d'esame 2h

Esame del 9 Gennaio 2020

A rectangular signal with a duration of 150µs comes from a voltage source accompanied by a broadband noise with effective spectral density $(S_V)^{1/2} = 20\ nV / (Hz)^{1/2}$ (unilateral density) and $1/f^2$ component with $f_C = 10$ kHz. The signal is overlapped to a sinusoidal disturb with 20 kHz frequency and unknown amplitude. To amplify the signal there is a broadband amplifier with a bandwidth limited by a single pole with frequency $f_P = 1$MHz, wide-band noise generators referred to the input with effective spectral density $(S_V)^{1/2} = 5\ nV / (Hz)^{1/2}$ and $(S_I)^{1/2} = 0.5 pA / (Hz)^{1/2}$ (one-sided density).

a) Considering a practical acquisition case and a negligible amplitude of the disturb, calculate the signal to noise ratio without using any filter. Explain in detail every used formula.

b) Calculate the optimum filter considering negligible the amplitude of the disturb. Explain in detail every used formula.

c) It is now necessary to approximate the optimum filter with a practical filter, consider separately the case with negligible disturb amplitude and the case with dominant disturb amplitude. How does it change your filter design? Calculate the new signal to noise ratio in both cases.

d) Considering now that the preamplifier voltage noise generator features a 1/f component with 5 kHz of corner frequency, evaluate the effect of the previous chosen filter on the 1/f component.

1) Leggere tutte le domande all'inizio

150µS → troppi non posso usare un mobile mean.

Voltage source → parola importante il voltage source ha una bassa impedenza di output.

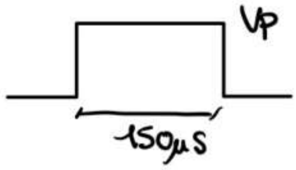
Current source → alta resistenza.

ho un rumore di corrente del preamplificatore, come la gestisco? Devo trasformarla in tensione tramite una resistenza, la resistenza è quella della voltage source → noi la supponiamo molto piccola (es 50 Ω) capiamo dunque che è approssimabile. (Per fare un buon esame fare i conti e dimostrare che è approssimabile)

COSA IMPORTANTE DA FARE: Verificare che l' 1MHz di banda sia abbastanza per il segnale. La banda del rect è 1/T. (Basta scrivere questo) (Non sono sicurissimo sull 1/T)

Punto A) Disturbo trascurabile

$$SNR = \frac{V_P}{\sqrt{S_V \frac{\pi}{2} \cdot f_P}} = \text{numero}$$



è importante

Commentare tutta questa formula, dire in dettaglio l'equivalent noise BW.
Se ho tempo dire che l'eq noise BW è l'approssimazione di un rect.
Se voglio andare ancora più nel dettaglio $n^2 = S_b \int_{-\infty}^{+\infty} |W(f)|^2 df$

In ogni caso qui abbiamo $1/f^2$

Sappiamo che $n^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) \cdot |W(f)|^2 df$ visto che abbiamo che $1/f^2$ abbiamo che $S(f) = \frac{S_V}{f^2}$

$n^2 = \int_0^{f_P} S(f)\, df$ il rumore è infinito perchè devo fare l'integrale da 0.

Nella realtà ho sempre un zero setting. Supporre un tempo di zero e fare i conti

$$n^2 = \int_{\frac{1}{2\pi T}}^{f_P} S(f)\, df$$

← non andrebbe la fp in teoria

quello che voglio

Se ho tempo spiegare lo zero.

• PUNTO B) filtro ottimo

Abbiamo rumore $1/f^2$. Spiegare filtro sbiancatore e matched filter, dire che l'optimum filter funziona con solo rumore bianco.
Spiegare che il filtro ottimo si applica dopo il witening filter, spiegare in caso il segnale cambi ecc...

SNR = 95μs

Posso poi aggiungere un po' di cose, tipo dire che l'autocorrelazione del segnale che è

Visto che i 2 segnali sono uguali posso dire che l'autocorrelazione in zero del segnale è uguale a quella del singolo esponenziale $\cdot \sqrt{2}$.

Questo fa capire che l'SNR migliora con $\sqrt{N}$ con N numero di campioni.

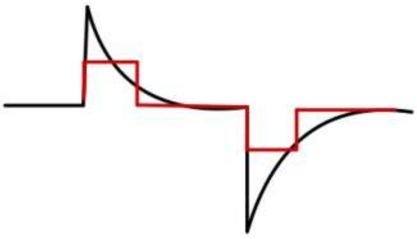
Posso poi dire che il segnale è

$$S = \int A(\alpha) \cdot w(\alpha)\, d\alpha = A \cdot K_{ww}(\alpha)$$

$$N = \int S_B \cdot |W(f)|^2\, df = S_B \cdot K_{ww}(0)$$

Spiegare l'equazione di Swartz che cita delle autocorrelazioni ecc..
QUESTO LO VUOLE SICURO.

Punto C) Approssimare il filtro ottimo sia con che senza disturbo.



Per lavorare con un disturbo devo ricordare che il gated integrator è

il disturbo è a 20KHz quindi non possiamo usare un RC-LPF.

Dobbiamo dire che usiamo 1 GI (2 per migliorare l'SNR), dobbiamo dire che il GI ha 2 parametri, lunghezza e punto di partenza (spiegare bene dove piazziamo il GI, ad esempio dire che messo prima del segnale prendiamo solo rumore)

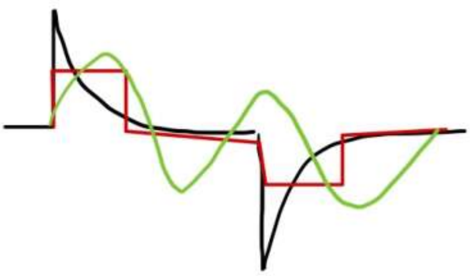
Spiegare poi la lunghezza del GI DIMOSTRANDOLA e dire che dobbiamo ottimizzare la lunghezza.

Poi partire il caso del disturbo.

Possiamo valutare il disturbo nel caso del TG ottimo, notiamo però che non è un ottima scelta. (Imparare come calcolare il valore del sinc a diverse frequenze)

Noi ricordiamo che a $1/T$ il disturbo va a $\emptyset$, perciò metto la larghezza del GI in modo da annullare il disturbo.
Così annulliamo il disturbo ma peggioriamo un po' L'SNR.

Oppure, caso estremo



Può accadere che l'area del disturbo dei 2 GI sia opposta e che quindi si annulla.

È un caso molto estremo.

> PUNTO d

Effetto del filtro scelto in precedenza sull' 1/f noise component.

Capiamo che il rumore $1/f$ è moltiplicato a $1/f^2$ così nel punto finale dopo il filtro sbiancatore ho il segnale di prima con in aggiunta l' 1/f noise

Dalla domanda nel punto d capiamo che filtro dovevamo mettere nell' punto c

Sappiamo che è un CDF.

Qui dobbiamo dire le formule, dire che $f_{i,f} = \frac{1}{2\pi T}$, se vogliamo aggiungere dettaglio dimostrare il perché $f_{i,f}$ è quella formula.

Dire che in questo caso abbiamo il doppiaggio del rumore ma per noi questo non è un problema perché abbiamo il segnale tutte e 2 le volte quindi doppio anche il segnale.

Possiamo spiegare che possiamo risolvere il doppiaggio del rumore ametendo la baseline.

30.04.2021 Lezione 3h

Quanto detto prima per il passabanda funziona solo se il rumore 1/f è dato dal sensore, se il rumore 1/f è dato dal moltiplicatore o altro è un casino.

In questa lezione vedremo anche i problemi pratici del creare questo tipo di filtro.

Lock-in amplifier dai principi al reale

In principle:

a LIA consisting simply in a **Phase-Sensitive Detector** provides a flexible and effective band-pass filtering that can achieve **very narrow bandwidth**. It is thus able to recover for measurement with good precision even very small modulated signals buried in much higher noise, down to an ideal limit value S/N<<1

But in practice:

the non-ideal features of the actual circuits of the PSD set to the recovery of small signals buried in high noise an actual limit much more stringent than the ideal one.

However:

by introducing in the LIA structure modifications and further stages, the hindering features can be counteracted and the actual detection limit can be improved towards the ideal limit. For instance, in real cases **nanoVolt signals** can be extracted from wideband noise with 1000 times (60dB) greater rms value.

Come abbiamo detto prima il guadagno non è importante, ma solo se abbiamo un unico stadio. Infatti se abbiamo più stadi ci conviene avere un guadagno molto alto subito così possiamo non considerare i rumori degli altri stadi.

High gain for the signal

The modulated input signal is converted by the LIA in a slow demodulated signal, with components from DC to a fairly low frequency limit. **This signal must be supplied to a meter circuit that measures its amplitude, i.e. nowadays ordinarily an ADC.** The LIA output signal must have scale adequate for the ADC (typically 10V full scale), whereas the LIA input signal is very small: therefore, the LIA **must provide high overall gain for the signal.**

Non possiamo amplificare troppo subito xè il moltiplicatore analogico distorge il segnale. Dobbiamo fare un trade-off.

Post-Amplifier (after the PSD)

A high-gain amplifier after the PSD (denoted here Post-Amplifier) is employed to raise the demodulated signal to a scale suitable for the ADC.
Notice that the post-amplifier:

1. must be a **DC-coupled** amplifier with upper bandlimit adequate to the demodulated signal
2. receives a signal accompanied by low noise, since it operates after the PSD filtering
3. It has drift of the baseline offset and low-frequency noise, which affect the measurement since they occur **after the PSD** and are **not filtered**

Posso usare un Post-Amplifier.

Questo può portare dei problemi, infatti può introdurre il rumore 1/f lui stesso oppure fare un drift della baseline.

Per risolvere questo problema posso introdurre un Preamplificatore prima del LIA.
Tuttavia qui il segnale è ad altissime frequenze. Posso fare un amplificatore a grandissime frequenze oppure a narrow band tuned amplifier.

Pre-Amplifier (before the PSD)

If the demodulated signal is very small, comparable or lower than the baseline drift and noise of the post-amplifier referred to its input, the measurement will be spoiled. A **preamplifier before the PSD** is necessary in order to avoid or reduce this drawback.

Notice that the pre-amplifier:

1. processes the modulated input signals, hence it is an **AC coupled** amplifier, either **wide-band** type including the modulation frequency f_m **or narrow-band tuned to** f_m
2. receives a signal accompanied by high noise, because it operates before the PSD
3. may have baseline drift and low-frequency noise, but their role is minor because they are filtered by the PSD (and by the AC-coupled amplifier itself).

Una cosa che ci va bene è che non introduciamo più il rumore 1/f perché viene filtrato dal LIA.

WARNING: Signal and Noise MUST stay within the Linear Dynamic Range

In order to obtain the foreseen improvement of S/N, the processing of signal and noise in the LIA must be accurately linear. **Deviations from linearity produce detrimental effects** (self-modulation of the noise, generation of spurious harmonics, etc.), which irrevocably alter the measure and degrade the LIA performance. **The signal and noise must remain well within the linear dynamic range in every stage involved, particularly in the multiplier (and in the preamplifier).**

ATTENZIONE! il segnale però non può essere amplificato a stecca perché andiamo oltre al range dinamico del circuito che segue. Sennò introduciamo della distorsione

Aggiungere distorsione significa aggiungere componenti in frequenza e questo non va bene.
Inoltre se noi mettiamo il segnale di tensione in modo che stia nel range dinamico dopo l'amplificazione in teoria noi ci aspettiamo di essere ok.
Tuttavia dobbiamo ricordare che amplifichiamo anche il rumore e quindi di sicuro il rumore supera il range dinamico del segnale e quindi il rumore va in distorsione e genera più armoniche.

HO PROBLEMI SIA CON IL PREAMPLIFICATORE CHE CON IL POST-AMPLIFIER, QUAL È LA SOLUZIONE?

Wide-Band Preamplifiers and Tuned Preamplifiers

When a **wide-band preamplifier** is employed to raise the level of a very small input signal, a problem arises with very small input S/N<<1. **The gain required for the signal works on a noise which is much higher than the signal, hence it brings this amplified noise out of the linear dynamic range of the multiplier.**

In such cases, for exploiting the required gain it is necessary to reduce the noise received by the preamplifier with a **pre-filter**. Adequate reduction of the LIA input noise is obtained in many cases with **prefilter passband much wider than that of the LIA.**

Such a prefiltering would be a useless nonsense in an ideal apparatus, but in real cases it is a necessary feature for avoiding nonlinearity in intermediate stages. On the other hand, we will see that a very narrow-band prefilter is not advisable.

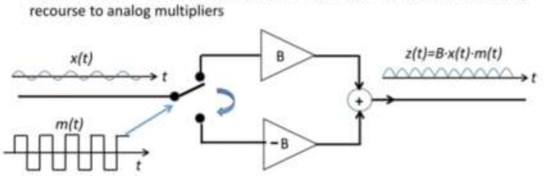
Preamplifiers that incorporate prefiltering are currently available from LIA manufacturers; they are called **tuned preamplifiers or selective preamplifiers.**

La soluzione è un prefiltro, infatti il nostro problema è l'amplificazione del rumore, dobbiamo trovare un modo di ridurre il rumore. Per fare questo usiamo un filtro, passabanda in modo da ridurre il rumore così che con l'amplificatore non amplifichi il rumore da 0 a alte frequenze ma bensì amplifichi solo un po' di rumore attorno al segnale modulato

Possiamo provare a cambiare la teoria, visto che la maggior parte dei problemi sono dovuti al moltiplicatore analogico noi lo togliamo e cambiamo la teoria.

Switched Amplifier Circuits instead of Analog Multipliers

We have seen that modulation with squarewave reference $m(t)$ can be implemented with circuits based simply on switches and amplifiers, avoiding recourse to analog multipliers



The noise referred to the input, the linearity and the dynamic range of these circuits are remarkably **better than those of analog multiplier circuits** (even high-performance types) because they are limited just by the performance of amplifiers and switch-devices.

Therefore, switched linear circuit configurations are often employed as demodulator stage in LIAs in order to avoid the limitations of analog multipliers.

Facciamo una struttura così, usiamo come reference voltage una tensione ad onda quadra al posto di quella sinusoidale, così ci serve solo uno switch a 2 vie

DOBBIAMO STUDIARE COSA SUCCEDE IN QUESTO CASO.

LIA with non-sinusoidal Reference

The weighting function $w_L(\alpha)$ of a LIA is the multiplication of reference waveform $m(\alpha)$ (periodic at frequency f_m) and weighting function $w_F(\alpha)$ of the LPF

$$\boxed{w_L(\alpha)=m(\alpha)\cdot w_F(\alpha)}$$

In frequency domain this corresponds to the convolution of the F-transforms

$$\boxed{W_L(f)=M(f)*W_F(f)}$$

Since:

a) the transform $M(f)$ of a periodic $m(\alpha)$ is composed by lines at f_m (fundamental) and integer multiple frequencies (harmonics)

b) $W_F(f)$ of the LPF has bandwidth much smaller than f_m

the result of the convolution of $W_F(f)$ by any line of $M(f)$ does not overlap the result by any other line (with very good approximation). We conclude that:

the $W_L(f)$ is a set of **replicas of $W_F(f)$** centered on each line of $M(f)$, **multiplied by the line-weight** and **phase-shifted by the line-phase**.

With very good approximation, the module diagram can thus be obtained simply as

$$\boxed{|W_L(f)|\cong|M|*|W_F|}$$

Notiamo che in questa slide usata in precedenza, non c'è scritto da nessuna parte che M(f) debba essere sinusoidale

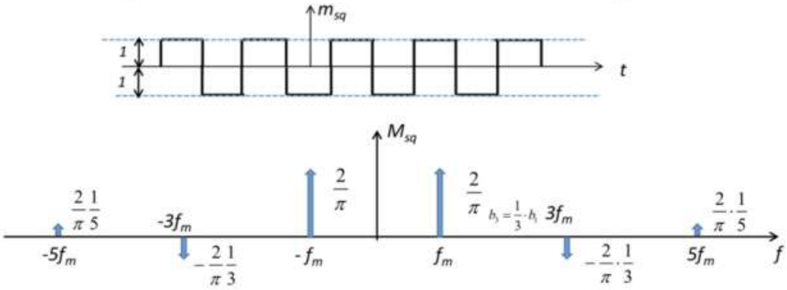
Capiamo quindi che noi seguiamo la teoria cambiamo solamente la reference

Come avevamo visto in precedenza ci conviene lavorare in frequenza

F-transform of a Squarewave

Facciamo la trasformazione dell'onda quadra in frequenza.

$m_{sq}(t)$ = symmetrical squarewave (from +1 to-1) at frequency f_m

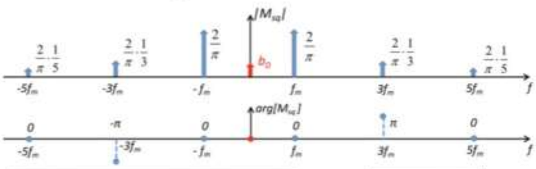


Notiamo che il valore a $f=\emptyset$ è $\emptyset$ che è l'area del segnale nel tempo che è zero.

Nel Band pass filter 2 abbiamo visto che dobbiamo avere assolutamente $f_0=\emptyset$ perchè se no integriamo il valore di $1/f$ in $\emptyset$ che è tantissimo.

- Only odd-harmonic sinusoidal components
- Components with alternately positive and negative sign, i.e. alternately 0 and π phase
- Component amplitude decreasing as the reciprocal order:
  $b_1=\frac{2}{\pi}$ at fundamental f_m ; $b_3=\frac{1}{3}\cdot b_1$ at $3f_m$; $b_3=\frac{1}{5}\cdot b_1$ at $5f_m$; ......

Dobbiamo avere perciò che l'area del segnale sia perfettamente zero e quindi dobbiamo avere un duty cycle perfetto. (ma questo è sicuramente meglio di lavorare con un moltiplicatore analogico)

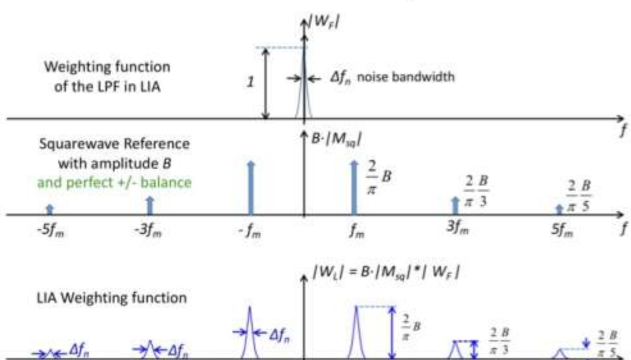


$$\boxed{M_{sq}(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{2}\left[\delta(f-f_{2k+1})+\delta(f+f_{2k+1})\right]}\quad \text{with}\quad \boxed{b_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\cdot\frac{2}{\pi}}$$

$k = 0, 1, 2, 3$ ..... and $f_{2k+1}=(2k+1)f_m$

BEWARE: In cases where the squarewave has non-zero mean value (e.g. slight asymmetry in amplitude and/or duration of positive and negative lobes) it has also a DC component with amplitude b_0 given by the ratio of the mean value to the peak amplitude (i.e. by the relative unbalance of positive and negative area)

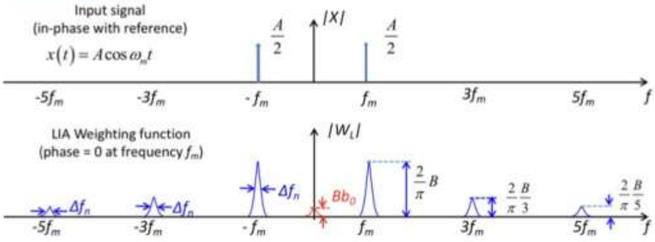
Dalla teoria dunque capiamo che il comportamento è del tipo



Capiamo perchè non vogliamo una anche piccola linea a frequenza zero, perchè se no apriamo una piccola finestra di integrazione, che benchè piccola sia diventa enorme perchè prende il valore di $1/f$ in zero.

Perciò avremo che il segnale sarà

Sinusoidal signal through LIA with Squarewave Reference



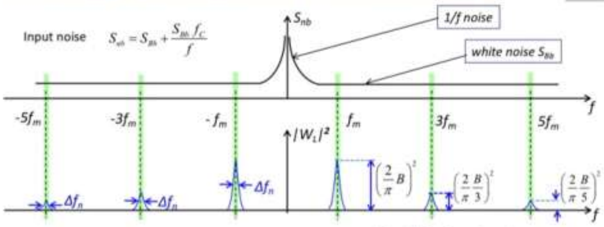
Output signal $s_y = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, W_L(-f)\, df = 2\cdot\frac{A}{2}\cdot\frac{2}{\pi}B = \frac{2}{\pi}B\cdot A$

NB This is easily verified in time, since: LIA output $y(t)$ = time average of $z(t)=x(t)\cdot B\, m(t)$ = = mean of the in-phase component of the sinusoidal input rectified and multiplied by B

Dove il segnale è zero non perdo niente perciò in uscita perdo solo le 2 componenti del segnale e alla fine le rettifico.

Il rumore al contrario sarà:

Noise through LIA with perfect Squarewave Reference



Output Noise $\overline{n_{yL}^2} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nb}(f)\,|W_L(f)|^2\, df = 2\cdot S_{Bb}\Delta f_n\left(\frac{2}{\pi}B\right)^2\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+....\right]$

The factor $\left[1+(1/3)^2+(1/5)^2+....\right] = \pi^2/8 \cong (1{,}11)^2$ represents the enhanced noise due also to the higher passbands at the harmonic frequencies

$$\overline{n_{yL}^2} = 2S_{Bb}\Delta f_n\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 B^2\frac{\pi^2}{8} = B^2 S_{Bb}\Delta f_n$$

No signal is collected in these passbands. Therefore, the S/N is reduced with respect to the case of sinusoidal reference, but the reduction is moderate.

Ogni volta che ho una linea nella funzione peso apro una finestra d'integrazione sul segnale

Proviamo ora a comparare questa tecnica con quella caratterizzata dall'usare una reference voltage sinusoidale

S/N with Sinusoidal Signal and perfect Squarewave Reference

Output Signal $s_y = \frac{2}{\pi}B\cdot A$ (for sinusoidal input signal in phase)

Output Noise $\overline{n_{yL}^2} = S_{Bb}\Delta f_n B^2$

so that $\left(\frac{S}{N}\right)_{L,sqw} = \frac{s_y}{\sqrt{\overline{n_{yL}^2}}} = \frac{A}{\frac{\pi}{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$

which in comparison to the result obtained with sinusoidal reference

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{L,sin} = \frac{A}{\sqrt{2S_{Bb}\Delta f_n}}$$

is just moderately lower

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{L,sqw} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{S}{N}\right)_{L,sin} \cong \frac{1}{1{,}11}\left(\frac{S}{N}\right)_{L,sin}$$

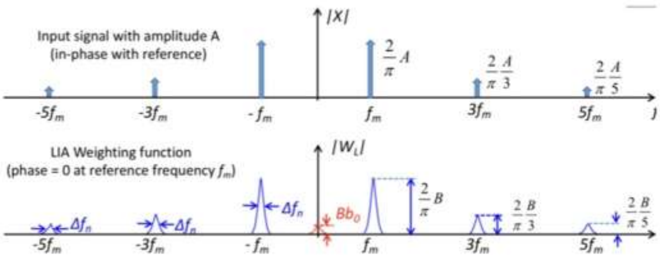
Notiamo che SNR nel caso di una reference voltage digitale è più piccola di quella del caso analogico.

Perdiamo circa il 10%. $\left(\frac{1}{1{,}11}\right)$

Non ci piace tanto perdere il 10% ma non è tanto se consideriamo che non dobbiamo usare un moltiplicatore analogico.

Perdiamo qualcosa dal punto di vista dell'SNR perchè collezioniamo rumore anche a 3fm, 5fm ecc... dove non ho il segnale mentre con il Lock in amplifier non lo facevo

Un modo per risolvere è mettere il segnale anche a 3fm, 5fm ecc...
e questo vuol dire utilizzare un onda quadra come funzione d'ingresso, cioè modulare il segnale al posto che con un onda sinusoidale con un onda quadra



Output signal

$$s_y = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) W_L(-f) df = 2\cdot\left[\frac{2}{\pi}A\cdot\frac{2}{\pi}B\right]\cdot\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+.....\right] = 2\cdot\left[\frac{2}{\pi}A\cdot\frac{2}{\pi}B\right]\frac{\pi^2}{8} = AB$$

NB1: This is easily verified in time, since: LIA output $y(t)$ = time average of $z(t)=x(t)\cdot B\,m(t)$

NB2: As concerns the **output noise**, it has already been discussed

Non serve nemmeno fare tanto casino con i conti, vediamo che nel dominio del tempo abbiamo un valore costante di valore AB.

ATTENZIONE!! La funzione peso è uguale a quella di prima, perciò abbiamo lo stesso rumore di prima.

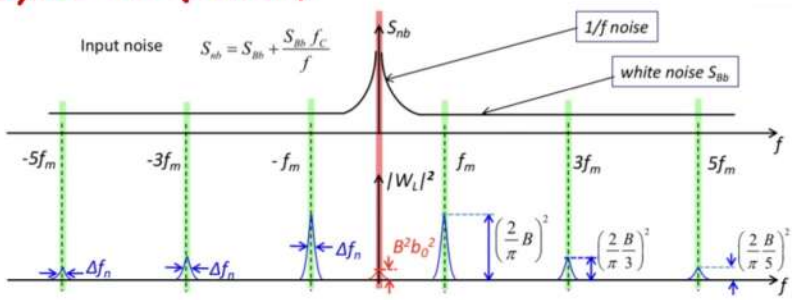
Output Signal $\quad s_y = B\cdot A \quad$ for squarewave input signal in phase

Output Noise $\quad \overline{n_{yL}^2} = S_{Bb}\Delta f_n B^2$

so that $\quad \left(\frac{S}{N}\right)_{L,sqw} = \frac{s_y}{\sqrt{\overline{n_{yL}^2}}} = \frac{A}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$

Otteniamo il miglior SNR possibile anche meglio di quello del LIA

Vediamo ora l'impatto (numerico) di avere una componente in continua nello spettro (Duty cycle non perfetto)



A squarewave with non-zero-mean generates a spurious band at f=0 with additional noise

$$\overline{n_{yL0}^2} = \widehat{S_{nu}}\Delta f_n B^2 b_0^2$$

Because of the 1/f noise, the mean density $\widehat{S_{nb}}$ in the band can be very high $\widehat{S_{nb}} \gg S_{Bb}$ so that even with small spurious band $b_0 \ll 1$ the added noise $\overline{n_{yL0}^2}$ can be comparable to the basic term $\overline{n_{yL}^2}$ or even larger

$$\boxed{\frac{\overline{n_{yL0}^2}}{\overline{n_{yL}^2}} = \frac{\widehat{S_{nu}}}{S_{Bb}} b_0^2}$$

Un riassunto totale dei Lock in amplifier:

	SINUSOIDAL Reference	SQUAREWAVE Reference
SINUSOIDAL Signal amplitude A power $P = \frac{A^2}{2}$ A_{min} minimum measurable amplitude (at S/N=1)	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\sqrt{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$ $A_{\min} = \sqrt{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n} = 1{,}41\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\frac{\pi}{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$ $A_{\min} = \frac{\pi}{2}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n} = 1{,}57\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$
SQUAREWAVE Signal amplitude A power $P = A^2$ A_{min} minimum measurable amplitude (at S/N=1)	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$ $A_{\min} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n} = 1{,}11\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$	$\frac{S}{N} = \frac{A}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}}$ $A_{\min} = \sqrt{S_{Bb}\Delta f_n}$

Ma come facciamo ad avere la reference di esatta frequenza e fase?

Tipicamente per prendere la reference noi rimoduliamo il segnale d'ingresso così abbiamo sicuro la stessa frequenza ma potremmo non avere la stessa fase

In order to be useful as **reference** for measuring with a LIA a given periodic signal, the **essential necessary features** of an auxiliary signal are:

1) fundamental **frequency identical** to the signal
2) **constant phase difference φ** with respect to the signal.
   (NB: not necessarily φ=0, but it is necessary that φ = constant !)

→ Non ci serve differenza di fase ø basta che sia costante

If the auxiliary signal has high and constant amplitude, negligible noise and clean waveform (free from harmonics), it can be directly adjusted to φ=0 with a phase-shifter filter and supplied to the multiplier as reference waveform.

- An adjustable phase-shifter is currently included in LIAs for re-phasing the reference. The phase adjustment can be controlled manually by observing the output signal amplitude, which is maximum when φ=0.
- Many LIA's besides the adjustable phase shifter include an additional filter, which gives phase shift φ_a switchable from $\varphi_a=\pi/2$ to $\varphi_a=0$. Setting $\varphi_a=\pi/2$, when φ=0 is reached the signal is in quadrature and the output is zero. Notice that observing the output signal while φ is varied it is easier to identify when it reaches zero rather than when it reaches the maximum. After the adjustment to φ=0, the additional filter is switched back to $\varphi_a=0$ and the LIA is ready to operate.

Che cosa succede se abbiamo una differenza di fase non costante?

By exploiting the a well known trigonometric equation

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)$$

in cases with sinusoidal signal and sinusoidal reference

$$x(t) = A\cos(2\pi f_S t)$$
$$m(t) = B\cos(2\pi f_m t+\varphi_m)$$

Allora visto che $f_S = f_m$ quindi

$$y(t) = x(t)\cdot m(t) = \frac{AB}{2}\cos(\varphi_m) + \frac{AB}{2}\cos(2\pi(2f_S)t+\varphi_m)$$

La componente cos(2π ...) viene eliminata dal passabasso, e noi rimane solo

$$\frac{AB}{2}\cdot\cos(\varphi_m)$$

Abbiamo questa componente data dalla phase noise

> Perdiamo segnale (non ci piace)

> Inoltre se proprio proprio non riesco ad eliminare la differenza di fase devo fare sì che almeno sia costante perchè sennò mi cambia il segnale con la differenza di fase.

04.05.2021 Lezione 2h

Photodetector

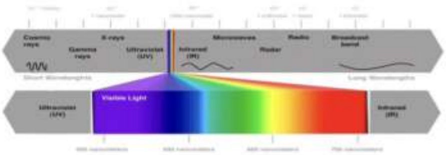
Light sensors → Dobbiamo studiare bene la luce.

- Light = electromagnetic waves with frequency ν and wavelength λ propagation speed (in vacuum) $c = 2{,}998 \cdot 10^8$ m/s

$$\boxed{c = \lambda \nu}$$

- **Spectral ranges:**

$\lambda < 400nm$	Ultraviolet (UV)
$400nm < \lambda < 750nm$	Visible (VIS)
$750nm < \lambda < 3\,\mu m$	Near-infrared (NIR)
$3\,\mu m < \lambda < 30\,\mu m$	Mid-infrared (MIR)
$30\,\mu m < \lambda$	Far-infrared (FIR)



λ è molto importante xè varia il tipo di sensore che dobbiamo utilizzare

c = 30cm al nanosecondo circa

lo spettro della luce visibile sta tra i 400 e i 750 nanometri.

Noi siamo interessati al singolo fotone, perciò dobbiamo studiare il fotone

Photon: quantum of electromagnetic energy

Ricaviamo l'energia del singolo fotone

$E_p = h\nu$ quantum energy (Planck's constant $h = 7{,}6 \cdot 10^{-34}$ J·s)

Rather than E_p in Joules, the electron-voltage V_p is employed:

$E_p = q\,V_p$ (electron charge $q = 1{,}602\ 10^{-19}$ C V_p in Volts or electron-Volts eV) → Da questa formula possiamo ricavare il valore della tensione Vp

from $E_p = qV_p$ we get $V_p = \dfrac{hc}{q}\dfrac{1}{\lambda}$

universal constant $hc/q = 1{,}2398 \cdot 10^{-6}$ m·V ≈ 1,24 µm·V

$$\boxed{V_p = \frac{1{,}24}{\lambda}}$$ with V_p in Volts and λ in µm

$400nm < \lambda < 750nm$	VIS range	$3{,}10\ eV > V_p > 1{,}65\ eV$
$750nm < \lambda < 3\mu m$	NIR range	$1{,}65\ eV > V_p > 0{,}41\ eV$

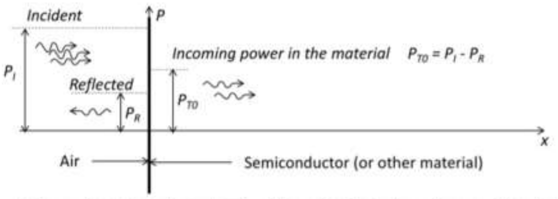
Per rilevare un fotone dobbiamo avere Vp almeno abbastanza grande da rompere il legame del silicio con cui il sensore per rilevare questo fotone è fatto.

L'energy Gap del silicio è 1,1 eV.

In questo caso non possiamo usare il silicio.

Riflessione e assorbimento dei fotoni

Una parte della luce non entra nel sensore perchè viene riflessa.



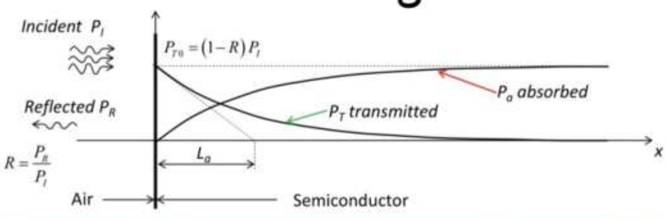
At the surface strong discontinuity of the refraction index n, from $n = 1$ for air to $n > 1$ for semiconductor: e.g. for silicon it is about n ≈ 3,4 and depends on the wavelength. This discontinuity gives a **high reflection coefficient** R

$R = \dfrac{P_R}{P_I}$ (e.g. for silicon $R > 0{,}4$ wavelength dependent)

Anti-reflection coating: deposition on the reflecting surface of a sequence of thin dielectric material layers with progressively decreasing n value. It provides a **gradual decrease** of the n value from semiconductor to air and such a smoother transition reduces the reflection

funziona unicamente con una singola lunghezza d'onda, se devo misurare + lunghezza d'onda è un casino e avrò sicuro riflessione

e una volta che il segnale entra nel sensore? Come viene assorbita la luce?



Otteniamo sempre un esponenziale decrescente

For moderate or low P_T the absorption in dx is proportional to P_T (linear optic effect)

$$-dP_T = \alpha P_T dx = P_T \frac{dx}{L_a}$$

α = optical absorption coefficient

$L_a = 1/\alpha$ = optical absorption depth

è esattamente la τ dell'esponenziale. Data questa sappiamo in quanto la luce viene assorbita.

The optical power transmitted to position x is

$P_T = P_{T0}\exp(-\alpha x) = P_{T0}\exp(-x/L_a)$

The optical power absorbed from 0 to x is

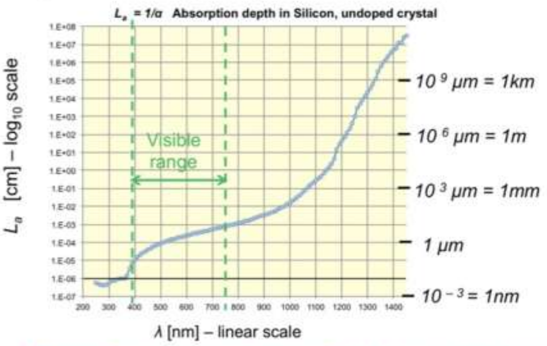
$P_a = P_{T0} - P_T = P_{T0}\left(1 - e^{-\alpha x}\right) = P_{T0}\left(1 - e^{-\frac{x}{L_a}}\right)$

Grazie a La so quanto grande deve essere il mio sensore.

Se il mio sensore è più corto di 5La circa allora c'è potenza che esce dal dietro del mio sensore e ciò che io non misuro

For a given material the optical absorption **STRONGLY** depends on the **WAVELENGTH**.

Typical example: Silicon absorption depth



NB: over the visible range L_a varies with λ by two orders of magnitude!!

Per sapere l'absorption lenght di un materiale (in questo caso silicio) vedo il grafico che mi lega la alta lunghezza d'onda.

Dobbiamo ricordarci solo 3 numeri

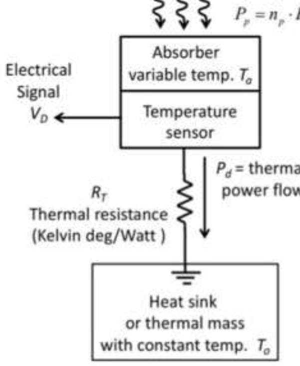
- 400nm → 100nm
- → 500nm → 1μm
- → 800nm → 10μm

Thermal photodetector principle (Bolometers / Bolometri)

Abbiamo la luce che viene assorbita da un materiale, questo assorbimento cambierà la temperatura del materiale e noi misurando la temperatura.
il vantaggio di questo è che tutte le lunghezze d'onda hanno energia quindi noi possiamo misurare tutte le lunghezze d'onda

- A principle for detection of light signals is to **employ their energy simply for heating a target and measure its temperature rise** ΔT. Detectors relying on this principle are called «**Thermal Photodetectors**» or «**Power Detectors**»
- Main advantage: very **wide spectral range**. Since photons just have to be absorbed for contributing to the detection, the range can be extended far into the infrared.
- Main drawback: sensitivity is inherently poor, because a high number of absorbed photons is required for producing even small variations of temperature ΔT in tiny target. For instance: ≈10^{15} blue photons are required for heating by **ΔT=0,1 K** a water droplet of ≈ **1mm** diameter (*blue photons at λ=475nm have V_p = 2,6 eV; water has specific heat capacity c_T = 4186 [J/Kg·K]= 2,6 ·10^{22} [eV/Kg·K] and the mass is 1mg*)
- The dynamic response is inherently slow, because thermal transients are slow. Thermal detectors are mainly suitable for measurement of steady radiation.

P_p = optical power; n_p = photon rate
$P_p = n_p \cdot E_p = n_p \cdot qV_p$



Absorber:
T_a = temperature, C_a = heat capacitance
$C_a = c_a \cdot m_a$
(m_a = mass; c_a = specific heat capacitance)

$\boxed{T_a - T_o = R_T \cdot P_d}$ analog to Ohm law $V = R \cdot I$

Denoting for simplicity $T = T_a - T_o$ the detector energy balance is

$$\boxed{P_p dt = C_a dT + \frac{T}{R_T} dt}$$

Dove RT è la resistenza termica del sensore, capisco che no della potenza termica che perdo sulla resistenza termica

Risolvendo l'equazione ottengo un filtro passabasso.

From the energy balance $P_p dt = C_a dT + \frac{T}{R_T} dt$

we get $\frac{dT}{dt} = \frac{P_p}{C_a} - \frac{T}{R_T C_a}$ and in Laplace transform $sT = \frac{P_p}{C_a} - \frac{T}{R_T C_a}$

The detector transfer function from optical power to measured temperature thus is

$$\boxed{T = P_p R_T \frac{1}{1 + s R_T C_a}}$$

- The steady state response (the steady $T = P_p R_T$ obtained with steady P_p) increases as the thermal resistance R_T is increased
- The dynamic response is a single-pole low-pass filter with characteristic time constant $\tau_a = R_T C_a$: as R_T is increased, the bandlimit $f_T = 1/2\pi R_T C_a$ is decreased
- For improving the high-frequency response without reducing the steady response it is necessary to **reduce the heat capacitance $C_a = c_a \cdot m_a$**. This implies that
  a) absorber materials with small specific heat capacitance c_a are required
  b) the absorber mass m_a should be minimized.
- Remarkable progress has been indeed achieved in thermal detectors with modern **technologies of miniaturization and integration (of absorber, temperature sensor, etc.)** that make possible to fabricate also multipixel arrays of thermal detectors

Se voglio T alto devo avere grande P e RT. solo che voglio anche che il sensore sia veloce quindi la τ del passabasso deve essere molto piccola → Ca deve essere molto piccolo.

Ad oggi questo sensore risulta comunque molto lento, troppo lento.

Radiant sensitivity o Spectral Responsitivity

- Thermal detectors transduce the optical power P_P in an electrical output signal V_D of the temperature sensor (voltage signal of thermoresistances in Bolometers and of thermocouples in Thermopiles).
- The basic quantitative characterization of the performance of the detector is given by the **Radiant Sensitivity** (also called Spectral Responsivity) S_D , defined as

$$S_D = \frac{\text{electrical output voltage [in V]}}{\text{optical power on the detector sensitive area [in W]}}$$

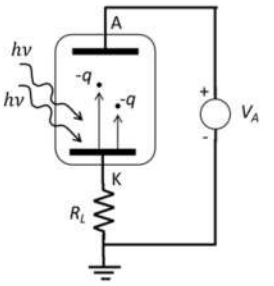
- For a given absorbed power the detector is heated at a given level, independent of the radiation wavelength λ. Therefore, uniform S_D would be obtained at all λ if the reflection and absorption were constant, independent of λ.
- Variations of reflection and absorption vs λ are kept at moderate level with modern absorber technologies. Fairly uniform S_D is achieved over fairly wide wavelength ranges, extended well into the infrared spectral region.

Notiamo che SD è indipendente dalla lunghezza d'onda

Quantum Photodetector: Creiamo una corrente data una luce

- A different principle for the detection of light signals is to exploit **photo-electric effects for producing directly an electrical current** in the detector. The energy of the absorbed photons is used for generating free charge carriers, which constitute the elements of the detector current.
- Detectors relying on this principle are called «**Quantum Photodetectors**» or «**Photon Detectors**»
- Photon Detectors can be vacuum-tube or semiconductor devices

Vacuum Tube



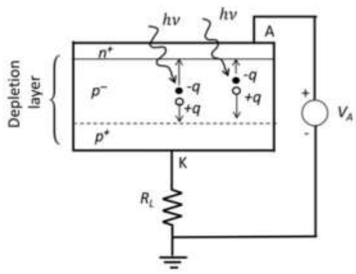
Vacuum-Tube detector devices: Photo-Tubes or Photo-Diodes

- An electrode (cathode K) in a vacuum enclosure receives the photons
- By photo-electric effect the cathode emits electrons in vacuum.
- The electrons are drawn by the electric field to another electrode biased at higher potential (anode A)
- Current flows through the terminals (photocathode and anode).

Tramite l'effetto fotoelettrico "area" da un fotone un elettrone e da questo una corrente

È un tubo molto fragile e grande.

Fotodiodi



Semiconductor detector devices: Photo-Diodes

- Photons impact on a reverse-biased p-n junction diode
- The absorbed photons raise electrons from valence band to conduction band of the semiconductor, thereby generating free electron-hole pairs.
- The free carriers generated in the zone of high electric field **(the depletion layer)** are drawn by the junction electric field (the electrons to the n-terminal and the holes to the p-terminal)
- Current flows through the terminals.

La risposta di questo tipo di sistemi è più complessa da calcolare rispetto ai tubi a vuoto

Quantum Detection Efficiency

- Quantum photodetectors transduce optical signals in electrical current signals by collecting the free electrons generated by the photons of the optical radiation.
- The basic quantitative characterization of the performance of the detector is given by the Quantum Detection Efficiency (or Photon Detection Efficiency) η_D defined as

$$\eta_D = \frac{\text{number of photogenerated electrons (or electron-hole pairs)}}{\text{number of photons reaching the detector}} = \frac{N_e}{N_p}$$

Nessuno riesce ad avere $\eta_D = 1$, solo in alcuni casi si riesce ad avere $\eta_D = 0.9$

- However, since in many engineering tasks the focus is on the transduction from optical power to electrical current, the Radiant Sensitivity S_D is often employed also for quantum photodetectors, defined as

$$S_D = \frac{\text{electrical output current [in A]}}{\text{optical power on the detector sensitive area [in W]}} = \frac{I_D}{P_L}\,[A/W]$$

Vediamo ora un nuovo modo in cui si può scrivere la Radiant sensitivity (SD).

Photons of wavelength λ arriving with steady rate n_p on a quantum detector convey an optical power P_L

$$P_L = n_p\, h\nu$$ ← numero di fotoni per energia di ogni fotone

the electrons (or e-h pairs) photogenerated in the detector with steady rate n_e produce a current

$$I_D = n_e\, q$$ ← numero di elettroni per carica degli elettroni

The Radiant Sensitivity is

$$S_D = \frac{I_D}{P_L} = \frac{n_e}{n_p}\cdot\frac{q}{h\nu} = \frac{n_e}{n_p}\cdot\frac{\lambda}{hc/q}$$

and since $\eta_D = n_e/n_p$

$$\boxed{S_D = \eta_D\cdot\frac{\lambda}{hc/q} = \eta_D\cdot\frac{\lambda[\mu m]}{1,24}}$$

REMEMBER

We see that the Radiant Sensitivity of the quantum detectors intrinsically depends on the wavelength λ, that is, even with constant quantum efficiency η_D. This occurs because a given optical power P_L corresponds to different photon rates n_p at different wavelengths λ

Photon statistics and Noise.

Prima abbiamo parlato di n_p, numero di fotoni ma il tempo di arrivo di un fotone non è deterministico, è un processo statistico.

- The optical radiation is composed of photons arriving randomly in time; the photon number N_p in a given time interval T is a statistical variable with mean $\overline{N_p}$ and variance $\sigma_p^2 = \overline{N_p^2} - (\overline{N_p})^2$
- **The random fluctuations of the photons are the noise already present at optical level.** This optical noise can be due to a background photon flux and to the actual desired optical signal.
- In most cases the photon statistics is well approximated by the Poisson statistics, so that it is

$$\boxed{\sigma_p^2 = \overline{N_p}}$$

- The optical power arriving to the detector is composed of quanta with energy $h\nu$ arriving randomly at rate n_p. It is the analog at optical level of a shot electrical current: the mean optical power is $P_p = n_p h\nu$ (analog to $I_e = n_e q$) ; the shot optical noise has unilateral spectral density S_p (analog to $S_i = 2qI_e$)

$$\boxed{S_p = 2h\nu P_p = 2\frac{hc}{\lambda}P_p}$$

- Note that for a given optical power P_p the shot noise density decreases as the wavelength λ is increased

Tipicamente i fotoni seguono una distribuzione poisson

→ Visto che la distribuzione è una poisson allora so che la varianza del numero di fotoni è uguale al valore medio degli stessi.

→ Usiamo lo stesso approccio della shot noise

06.04.2021 Teoria 2h

Current Signals of Quantum Photodetectors

Qual'è la banda di un Quantum sensor? Ci interessa la banda del segnale d'uscita di corrente perché anche il photodetector ha una funzione di filtro (se ho un delta di luce non ho un delta di corrente perché il detector effettua un filtraggio).

La cosa positiva o negativa è che questo filtraggio dipende da dei parametri.

Studiamo il sistema imponendo un impulso di luce (un fotone) e studiamo la uscita. È una cosa difficile ma c'è un teorema che ci aiuta (soprattutto nel caso del phototube)

The output current due to an electron traveling towards the collector electrode can be obtained by applying the Shockley-Ramo theorem in three steps

1. The motion of the electron must be computed; i.e. the trajectory and the velocity v_c at every point of it must be known
2. A reference electric field E_v must be computed, which is the field that would exist in the device (in particular along the electron trajectory) under the following circumstances:
   - electron removed
   - output electrode raised at unit potential (1V)
   - all other conductors at ground potential
3. The **Shockley-Ramo theorem** states that the current i_c that flows at the output electrode due to the electron motion can be simply computed as

$$\boxed{i_c = q\overrightarrow{E_v} \bullet \overrightarrow{v_c} = qE_{vc}v_c}$$

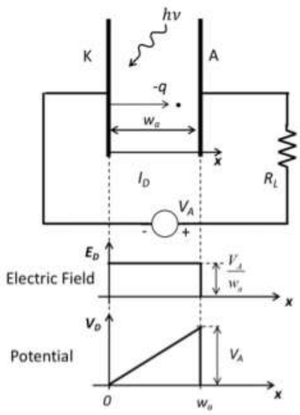
where • denotes scalar product and E_{vc} is the component of the field $\overrightarrow{E_v}$ in the direction of the velocity $\overrightarrow{v_c}$

1) Devo sapere la traiettoria e la velocità dell'elettrone all'interno del sensore

2) Dentro il photodetector ho un campo elettrico e devo calcolarlo in queste condizioni

3) La corrente è il prodotto scalare di E per v per q.

Facciamo il caso del phototubo



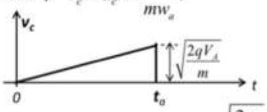
VACUUM PHOTOTUBE WITH PLANAR GEOMETRY

w_a = cathode to anode distance
V_A = bias voltage
$E_D = \frac{V_A}{w_a}$ true electric field (in the - x direction)
$V_D = V_A \frac{x}{w_a}$ potential distribution

ELECTRON MOTION IN VACUUM
(-q charge; m mass)

acceleration $a_c = \frac{qE_D}{m} = \frac{qV_A}{mw_a}$

Velocity $v_c = a_c t = \frac{qV_A}{mw_a} t$



Transit time $t_a = w_a \sqrt{\frac{2m}{qV_A}}$

1) Traiettoria e velocità dell'elettrone generato per la traiettoria siamo fortunati perché l'elettrone si sposta da catodo ad anodo in linea retta.
Calcoliamo poi la velocità all'interno delle 2 armature del fototubo facendo un po' di magheggi di fisica

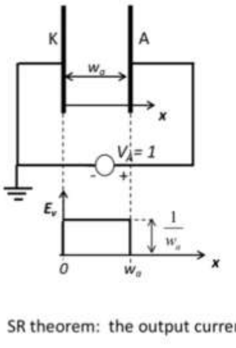
Ricordiamo che lo spazio è

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

∅   ∅, non ho velocità iniziale

Da questa formula ricavo t che è il tempo che ci mette l'elettrone tra l'anodo e il catodo. Ricavato il tempo ricavo la velocità con cui l'elettrone arriva all'anodo.

Punto 2)

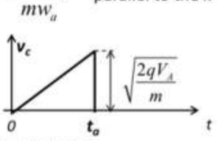


Reference electric E_v field computed with electron removed; $V_A = 1$; $V_K = 0$

$E_v = \frac{1}{w_a}$ parallel to the x-axis

True electron velocity

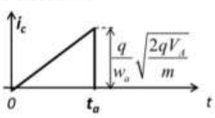
$v_c = \frac{qV_A}{mw_a} t$ parallel to the x-axis



E abbiamo calcolato il campo elettrico perciò abbiamo fatto il punto 2

SR theorem: the output current due to a single electron is

$$i_c = qE_v v_c = \frac{q^2 V_A}{mw_a^2} t$$

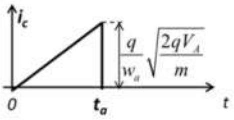


Calcoliamo adesso la corrente e otteniamo la sua forma (punto 3) notiamo che la forma non è un delta ma è un triangolo

Abbiamo trovato la single electrode response del phototube

In a phototube with planar geometry the **single electron response (SER)** is a pulse with triangular waveform

$$i_c = qE_v v_c = \frac{q^2 V_A}{m w_a^2} t \qquad (0 \le t \le t_a)$$



Una delle cose più importanti qui è la larghezza del segnale (t_a)

The frequency response is the Fourier transform of the SER pulse, which has a high frequency cutoff inversely proportional to the pulse width.
The pulse width is set by the transit time t_a of the electron from cathode to anode

$$t_a = \sqrt{2\frac{m}{q}} \cdot \frac{w_a}{\sqrt{V_A}} = 3{,}37 \cdot 10^{-6}\, \frac{w_a}{\sqrt{V_A}}$$

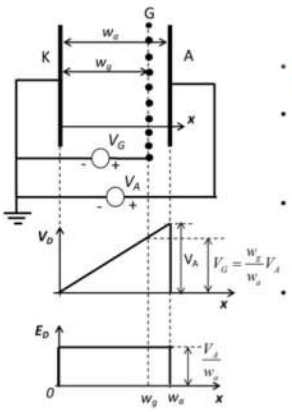
Typical values for phototubes are around w = *1cm = 0,01m* and V_A= 100V, which correspond to transit time around $t_a \approx 3{,}3$ *ns*

Supponendo una distanza tra anodo e catodo di 1cm otteniamo un ta di 3,3ns che non è malissimo.
Infatti se il segnale fosse un rect la banda di quest ultimo sarebbe 1/T = 330MHz che non è per niente male

Ed è questo uno dei motivi perché studiamo il photodetector

Se cambio la distanza tra anodo e catodo cambio anche la banda del segnale (dobbiamo però stare attenti alla electric discharge se mettiamo le facce vicine)
Oppure possiamo aumentare la tensione ma non è il top.

Posso pensare a cambiare la formula

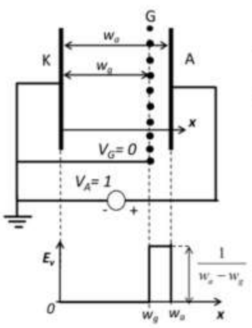


- **A shorter SER pulse can be obtained by inserting a metal wire grid in front of the anode**
- The basic idea is that the grid acts as electrostatic screen that does not allow an electron traveling from *x=0* (cathode) to *x=w_g* (grid) to induce charge on the anode.
- The grid bias voltage is selected to minimize the perturbation to the electron motion; i.e. it is set to the potential V_G corresponding to x=w_g in absence of the grid (or slightly below it).
- In these conditions, the electric field is practically the same as in the phototube structure without grid and the motion of an electron in vacuum is also the same.

Aggiungo la griglia tra anodo e catodo e polarizzo la griglia alla esatta tensione che avrei senza griglia in quel punto.

Mettere la griglia è molto intelligente, perché: quando applico il teorema, il punto 1 è lo stesso perché ho lo stesso campo elettrico visto che la griglia è polarizzata in modo da non polarizzarlo.

Nel punto 2 ho il trucco perché devo mettere a terra la griglia e quindi ho il campo elettrico solo in una piccola parte

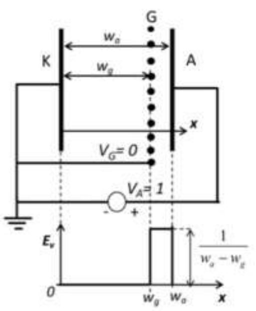


- Same electron motion as in the phototube without grid
- Different evolution in time of the induced charge on the anode.
- In fact, the reference field E_v is now very different and neatly shows that charge is induced on the anode only during the last part of the electron trajectory, i.e. from x=w_g (grid) to x=w_a (anode)

$$\begin{cases} E_v = 0 & for \quad 0 < x < w_g \\ E_v = \dfrac{1}{w_a - w_g} & for \quad w_g < x < w_a \end{cases}$$

- The SR theorem states that the SER current is

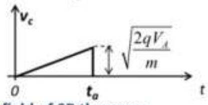
$$i_c = qE_v v_c$$



$$t_a - t_g = \sqrt{2\frac{m}{q}} \left(\frac{w_a}{\sqrt{V_A}} - \frac{w_g}{\sqrt{V_A \frac{w_g}{w_a}}} \right) = t_a \left(1 - \frac{\sqrt{w_g}}{\sqrt{w_a}} \right)$$

True electron velocity

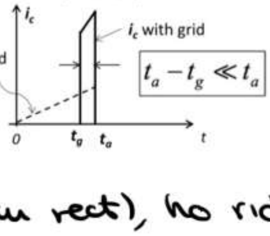
$$v_c = \frac{qV_A}{m w_a} t$$



Reference field of SR theorem

$$\begin{cases} E_v = 0 & for \quad 0 < x < w_g \\ E_v = \dfrac{1}{w_a - w_g} & for \quad w_g < x < w_a \end{cases}$$

SR theorem $\qquad i_c = qE_v v_c$

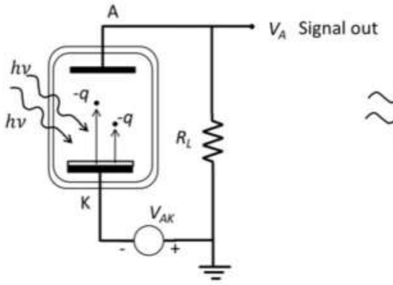


ho cambiato la forma del segnale (è molto simile ad un rect), ho ridotto di molto la durata del segnale e quindi 1/t la banda aumenta.

Il Photodetector è lo stesso abbiamo solo aggiunto una griglia.

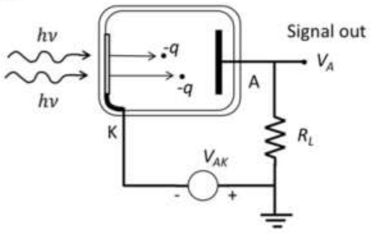
(non ho nemmeno troppo capito perché vuole che t sia molto piccolo, Ahhh forse perché assomiglia al delta?)

Strutture di Photodetector



SIDE-WINDOW TUBE

- Photocathode: thick opaque layer deposited on metal support electrode
- Side window of the glass tube: unfavourable geometry, collection of light on the photocathode is uneasy and not very efficient



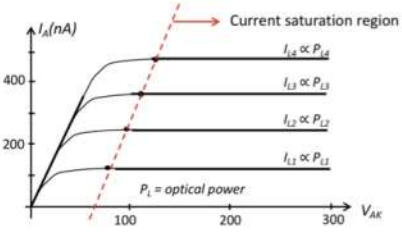
END-WINDOW TUBE

- Photocathode: thin semitransparent layer deposited on the interior of the glass tube end
- End window of the glass tube: favourable geometry, collection of light on the photocathode is easy and efficient

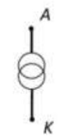
Nel caso Side window tube è difficile focalizzare la luce, quindi si è arrivati alla struttura end-window tube.

La caratteristica I-V del phototubo è così fatta:

- At low voltage V_{AK} the photocurrent collected at the anode is limited by the electron space charge effect
- As V_{AK} is increased the higher electric field reduces the space charge and the current increases
- As V_{AK} exceeds a saturation value V_{AKS} all photoelectrons are collected and the current is constant vs. V_{AK}
- The saturation value V_{AKS} increases with the optical power P_L on the detector
- Phototubes are operated biased into the current saturation region



PT stationary equivalent circuit: photo-controlled current generator



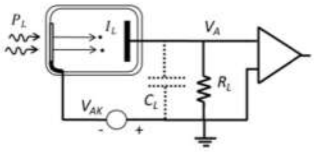
$$I_L = S_D \cdot P_L$$

Capiamo che dobbiamo usare alte tensioni (in questo caso >> 100V) così siamo in current saturation region.
Otteniamo così un generatore di corrente costante dipendente dalla potenza ottica PL e SD.

PhotoTube Dynamic Response

Main causes that limit the dynamic response:

1. Transduction from light flux to detector current: the **SER** waveform $h_D(t)$ has finite-width T_D
2. **Load circuit:** it has a low-pass filter action, δ-response $h_L(t)$ with finite-width T_L



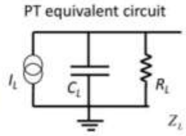
The δ-response from light power P_L to V_A has overall shape $h_P(t)$ resulting from the cascade

$$h_P(t) = h_D(t) * h_L(t)$$

the width T_P thus results from quadratic addition

$$T_P = \sqrt{T_D^2 + T_L^2} = \sqrt{T_D^2 + R_L^2 C_L^2}$$

PT equivalent circuit



$$Z_L = \frac{R_L}{1 + sR_L C_L}$$

and for well exploiting the fast intrinsic response $h_D(t)$ of a detector it is sufficient to have

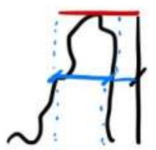
$$\boxed{T_L = R_L C_L \le T_D}$$

Load-circuit δ-response $R_L \cdot h_L(t)$ with

$$h_L(t) = 1(t)\frac{1}{R_L C_L}\exp\left(-\frac{t}{R_L C_L}\right)$$

Studiamo il photodetector nel circuito reale.
Noi vogliamo convertire la corrente con una tensione perciò usiamo una resistenza.
Noi non vorremmo la capacità CL perché riduce la banda ma sicuro ce la troviamo.

Se abbiamo un segnale strano in ingresso per calcolare la banda facciamo il full width at maximum



Prendiamo il massimo, dividiamo per 2 e prendiamo la larghezza del segnale lì e consideriamo come fosse un rett

Non voglio rovinare la banda con l'RC perciò l'RC deve essere più piccolo del transient time TD. (non ho ben capito perché TP è così)

The light-to-current transduction by a phototube can be fairly fast, with SER pulse duration T_D around 1ns. For exploiting it, the load filtering must be adequately limited

$$\boxed{R_L C_L \le T_D}$$

- for wide-band response low-value R_L is employed; typically, $R_L = 50\ \Omega$ to match a coaxial cable connection. With $T_D \approx$ 1ns and $R_L = 50\ \Omega$, the above requirement implies $\boxed{C_L \le 20\,pF}$
- The load capacitance C_L is sum of
  - C_A input capacitance of amplifier (or other circuit) connected; it can be <1pF
  - C_S stray capacitance of connections; it can be < 2pF
  - C_D electrode capacitance; it depends on the area A_D of the photocathode
- C_D is small even for wide sensitive area A_D, because the dielectric is vacuum and the electrode spacing is wide. In plane geometry with cathode-to-anode spacing w_a

$$C_D = \varepsilon_o \frac{A_D}{w_a} \qquad (\varepsilon_o = 8{,}86\ pF/m)$$

  e.g. with $w_a \approx 1cm$ it is $C_D[pF] \approx 0{,}09 A_D[cm^2]$. It's only $9pF$ for A_D=100 cm^2

- **In conclusion:** a definite advantage of Vacuum Phototubes is that they offer **very wide sensitive area together with fast response**. We will see that with semiconductor photodiodes this is not achievable

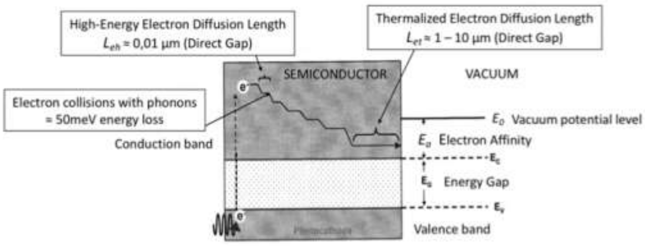
Vediamo se fare RC << TD è possibile.
Se supponiamo RLCL < TD e R = 50Ω otteniamo che CL deve essere ≤ 20pF.
Solo che la capacità CL è la somma di tutte le capacità parassite. Una capacità parassita è anche data dal photosensore stesso (è un condensatore).
Calcoliamo la capacità del photosensore dipendentemente dall'area, notiamo che la capacità è molto piccola e quindi riusciamo sempre a fare CL ≤ 20pF

Photo-emission of electrons

It is a three-step process:

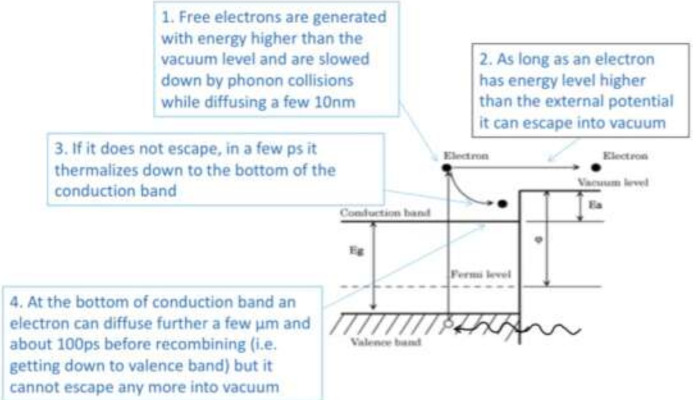
- free electron generation by photon absorption
- electron diffusion in the photocathode layer
- escape of electron into the vacuum

Suitable materials are semiconductors. Metals are unsuitable because of the high reflectivity, small diffusion length and low escape probability (high potential step from inside up to the vacuum level).



Se l'elettrone ha più energia dell' vacuum potential level può scappare dal materiale.
può perchè deve avere energia abbastanza non solo per scappare l'energy gap e l'affinità elettrica ma anche per arrivare fino alla superficie del materiale

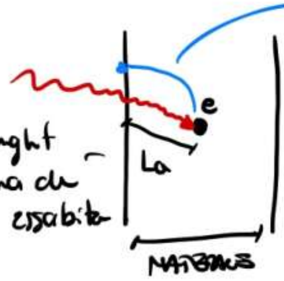
Ordinary photocathodes with positive E_a



esiste un modo per migliorare la sensibilità del fototubo alla luce (migliorare il fatto che gli elettroni partano)

Quando un elettrone si libera un elettrone dal materiale dopo la absorption lenght l'elettrone per uscire dal materiale dovrà percorrere un absorption lenght e non è detto che con l'energia ce la faccia

l'elettrone deve fare steps per uscire

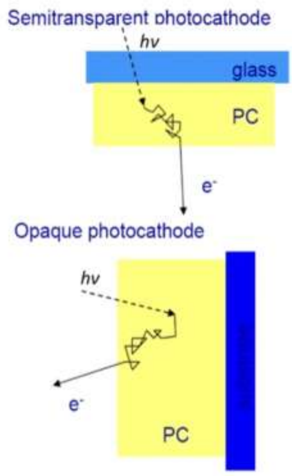


Absorption lenght lunghezza prima che la luce sia assorbita

C'è un modo per migliorare questa rilevazione utilizzare un materiale sottilissimo

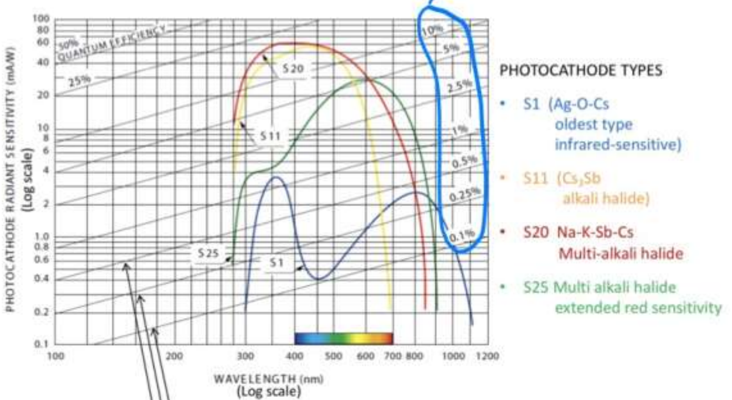
The active layer of the photocathode is always very thin, also for thick cathodes deposited on a metal electrode.

This remark led to develop thin photocathodes (with thickness about ≈ L_{eh}) deposited on the interior of the glass tube in the end-window of the detector. They are called **semitransparent cathodes.** They are illuminated on the outer side through the glass window end emit photoelectrons from the inner side. They make possible and easy a much better optical collection than the side-window geometry



In pratica ho che la luce arriva dal lato del materiale sottilissimo ed è tutto calcolato per far arrivare l'absorption lenght vicino all'uscita dall'altra parte così l'elettrone ha pochissima strada da fare

Detection efficiency



PHOTOCATHODE TYPES

- S1 (Ag-O-Cs oldest type infrared-sensitive)
- S11 (Cs_3Sb alkali halide)
- S20 Na-K-Sb-Cs Multi-alkali halide
- S25 Multi alkali halide extended red sensitivity

NB: the auxiliary lines marked with Quantum Detection Efficiency (QE) in % make possible to read directly from the diagram also the QE

Da questo grafico vediamo che la detection efficiency è in ogni caso < 25% nel migliore dei casi e tutti i fototubi crollano tra i 700 e 800nm

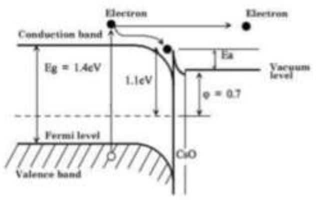
[INFO: il Photodetector è molto grande e bassa detection efficiency ma essendo grande prende molta luce, il fotodiodo ha un efficienza molto più alta ma prende molto meno luce, perciò devo focalizzare bene la luce, in qui caso comunque ho un tradeoff]

Photodetector con struttura alcalina

Viene fatto per "piegare" le energy bandwith vicino alla superficie del segnale

Progress in semiconductor physics and technology led in the '70s to devise a new class of photocathodes, called photocathodes with Negative Electron Affinity (NEA)

- On a GaAs crystal substrate, a few atomic layers of Cesium Oxide (*Cs-O*) are deposited and activated, thus forming a very thin positive charge layer of Cs^+ ions.
- The electric field generated at the surface curves downward the energy bands: the vacuum potential level is now lower than the bottom of conduction band, i.e. the electron affinity E_a is negative
- Electrons can now escape into vacuum also when thermalized at the bottom of conduction band; QE is thus enhanced
- Photoelectron emission is obtained also with photons with lower energy E_p , down to the GaAs energy gap E_g



In conclusion: NEA cathodes offer **higher QE** value and **broader spectral range**, extending up to the absorption edge of GaAs (i.e. $\lambda \approx 900nm$ corresponding to the gap $E_g \approx 1,4\ eV$)

Grazie a questa tecnica si possono ottenere Detector efficiency di circa 1% anche ad alte lunghezze d'onda.

Dark current Detector

è la corrente che abbiamo in uscita dal photodetector senza alcuna luce in ingresso. In pratica è il rumore del photodetector.

- A finite current is emitted by any photocathode even when kept in the dark, without any light falling on it.
- It is a spontaneous emission due to thermal effects (phonon-electron interactions in the cathode) and is called **Dark Current**.
- The dark current density j_B (per unit area of cathode) depends on the cathode type and on the cathode temperature. Typical values at room temperature are reported in the Table

PhotoCathode type	Dark Current density j_B in A/cm^2	Dark Electron Rate density n_B in electrons/s·cm^2
S1	$\approx 10^{-13}$	$\approx 10^{6}$
S11	10^{-16} - 10^{-15}	10^{3} - 10^{4}
S20 and S25	10^{-19} - 10^{-16}	1 - 10^{3}
GaAs NEA	10^{-18} - 10^{-16}	10 - 10^{3}

Sono numeri da ricordare (forse conviene ricordarsi soltanto la terza colonna)

Associamo alla corrente al buio la shot noise della stessa in modo da ricavare la spectral density del rumore

The total Dark Current is $I_B = j_B A_D$ where A_D is the area of the photocathode.

The shot noise of I_B is the photodetector unavoidable internal noise, with effective power density (unilateral)

$$\sqrt{S_B} = \sqrt{2qI_B} = \sqrt{2q\,j_B}\sqrt{A_D}$$

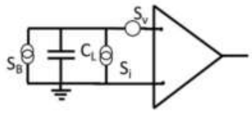
è dipendente dall'area, vedremo con i photodiodi cosa succede.

Typical values of $\sqrt{S_B}$ are reported in the Table

PhotoCathode type	Dark Current density j_B A/cm^2	Shot Noise Effective density $\sqrt{S_B}$ $pA/\sqrt{Hz}\sqrt{cm^2}$
S1	$\approx 10^{-13}$	$\approx 10^{-4}$
S11	10^{-16} - 10^{-15}	$\approx 10^{-5}$
S20 and S25	10^{-19} - 10^{-16}	$\approx 10^{-7} - 10^{-6}$
GaAs NEA	10^{-18} - 10^{-16}	$\approx 10^{-6}$

Proviamo a fare un'applicazione reale.

Notiamo che nella solita configurazione il rumore SB è sempre trascurabile se confrontato con il rumore del preamplificatore



- We know that for operating with low-noise a high impedance sensor must be connected to a preamplifier with high input impedance and low input noise. The best available preamplifiers have current noise at room temperature

$$\sqrt{S_i} \approx 0{,}01\, pA/Hz$$

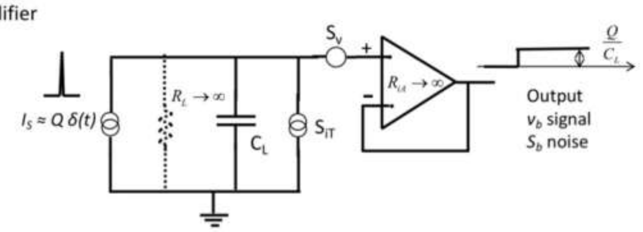
- The circuit noise $\sqrt{S_i}$ is always dominant and the detector internal noise $\sqrt{S_B}$ plays in practice no role with any phototube, even for detectors with S1 photocathodes (that have the highest noise) and even with very wide sensitive area (up to many square centimeters). In fact, for producing shot noise with power density higher than that of the circuit noise, the phototube dark current should be I_B>300pA, corresponding to an emission rate $n_B > 10^9$ electrons/s.
- Vacuum tube photodiodes can thus be employed for operating at low noise without stringent limits to the sensitive area. As we will see, this is a definite advantage over semiconductor photodiodes.

Visto che il contributo principale è dato dal preamplificatore vado di usare un preamplificatore LOW NOISE.

- Photodiodes are high-impedance sensors (both the vacuum phototubes and the semiconductor photodiodes), hence for low-noise operation they must be connected to preamplifiers with high input resistance* $R_{iA} \to \infty$ (see slides in OPF2)
- Simple configuration: voltage buffer based on a high-input-impedance and low-noise amplifier

Se voglio il miglior SNR possibile so che l'impedenza del photosensor è $\to \infty$ perciò se faccio un preamplificatore con resistenza d'ingresso $R_{iA} \to \infty$

(Lezione optimum filter 2)



L'ampiezza d'uscita dipende da C_L e a noi non è che vada tanto bene perché C_L è una capacità parassita e varia.

- C_L total load capacitance = C_D (detector cap.) + C_{iA} (amplifier cap.) + C_S (connection cap.)
- R_L total load resistance → ∞
- S_v amplifier voltage noise
- S_{iT} total current noise = S_{iD} detector noise + S_{iA} amplifier noise (+ S_{iR} load resistor noise)

Buffer voltage output:

Step signal $\boxed{v_b(t) = \frac{Q}{C_L} \cdot 1(t)}$

Noise Spectrum $\boxed{S_b = S_v + S_{iT} \frac{1}{\omega^2 C_L^2}}$

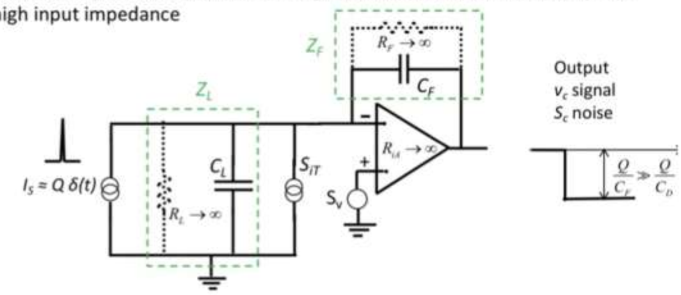
Un altro punto negativo è che la capacità C_L è ai capi del photodetector.
Su C_L noi integriamo la corrente quindi la tensione ai capi del condensatore cambia e quindi cambia anche la tensione ai capi del photodetector

The buffer configuration has some noteworthy drawbacks.

- The signal amplitude Q/C_L is ruled by the total capacitance $C_L = C_D + C_{iA} + C_S$, whose value is not very small and not well controllable, particularly in cases where long sensor-preamplifier connections contribute a remarkable C_S.
  C_L may be different from sample to sample of the amplifier, even of the same amplifier model.
- With signals in high-rate sequence, the superposition of voltage steps may build-up and produce a significant decrease of the photodiode bias voltage. This may change the operating conditions and consequently the parameters and performance of the detector, particularly if the photodiode is biased not much above the saturation voltage.

Un modo per risolvere questo è usare un preamplificatore attivo

Alternative configuration: operational integrator based on a low-noise amplifier with high input impedance



Qui abbiamo che il guadagno d'uscita dipende da C_F, che è un condensatore che scegliamo noi e che quindi possiamo controllare.

Abbiamo anche una tensione di alimentazione costante ai capi del photodetector (a causa della massa virtuale)

- C_F capacitor in feedback. The C_F value can be very small and is accurately set by the capacitor component, because the inherent stray capacitance between output and input pins of the amplifier is negligible. Therefore, one can work with $C_F << C_L$
- R_F feedback resistor → ∞
- C_L total load capacitance = C_D (detector cap.) + C_{iA} (amplifier cap.) + C_S (connection cap.)
- R_L total load resistance → ∞
- S_v amplifier voltage noise
- S_{iT} total current noise = S_{iD} detector noise + S_{iA} amplifier noise (+ S_{iR} load resistor noise)

Calcoliamo il segnale d'uscita

Output Signal:

in frequency domain $V_c = -QZ_F = -\frac{Q}{j\omega C_F}$ in time $v_c(t) = -\frac{Q}{C_F}\cdot 1(t)$

With respect to the buffer, the amplitude is greater by the gain factor $G_c = C_L/C_F >> 1$

$$\boxed{|v_c| = \frac{Q}{C_F} = \frac{C_L}{C_F}\cdot\frac{Q}{C_L} = \frac{C_L}{C_F}\cdot|v_b| = G_c\cdot|v_b|}$$

il segnale ha ampiezza maggiore rispetto al caso standard perché $C_F << C_L$.

ottiamo la tensione d'uscita in relazione a quella di avremo nel caso standard

Advantages:

- The higher signal makes less relevant the noise of the following circuits
- The signal amplitude is ruled by the well controlled and stable C_F, no more by the other capacitances C_D, C_{iA} and C_s
- The detector terminal is connected to the amplifier virtual ground, hence it stays at constant bias voltage even with signals in high-rate sequence

The noise analysis (see next slide) confirms that these advantages are obtained without degrading the S/N. The charge amplifier configuration thus is the solution of choice in most cases met in practice.

il rumore è

Output Noise Spectrum :

- the current noise S_{iT} is processed by the same transfer function as the current signal
- the voltage noise S_v is processed with the transfer function from non-inverting input to amplifier output.

Denoting by Z_L the load impedance and by Z_F the feedback impedance

$$S_c = S_v\left|1+\frac{Z_F}{Z_L}\right|^2 + S_{iT}|Z_F|^2$$

in our case $Z_L \approx 1/j\omega C_L$ and $Z_F \approx 1/j\omega C_F$ so that

$$S_c = S_v\left|1+\frac{C_L}{C_F}\right|^2 + S_{iT}\frac{1}{\omega^2 C_F^2} = \left(\frac{C_L}{C_F}\right)^2\left[S_v\left(1+\frac{C_F}{C_L}\right)^2 + S_{iT}\frac{1}{\omega^2 C_L^2}\right]$$

if $C_F/C_L << 1$, with good approximation it is

$$\boxed{S_c \approx \left(\frac{C_L}{C_F}\right)^2\left[S_v + S_{iT}\frac{1}{\omega^2 C_L^2}\right] = \left(\frac{C_L}{C_F}\right)^2 S_b = G_c^2 S_b}$$

Solo dopo un approssimazione troviamo lo stessa spectral density di prima moltiplicata per il Guadagno al quadrato

With respect to the buffer, the signal and noise thus benefit of the same gain G_c: therefore, the attainable S/N is the same with the charge preamplifier as with the voltage buffer preamplifier

L'SNR è uguale al caso di prima (standard) ma ha i vantaggi sul condensatore e sull'alimentazione

NEP & Detectivity

- Evaluations and comparisons of Photocathodes are currently based on the **Noise Equivalent Power NEP**, a figure of merit that takes into account the photon detection efficiency and the detector dark-current noise, but not the preamplifier noise.
- NEP is defined with reference to a situation where the limit to the minimum measurable signal is set by the internal noise of the detector and not by the electronic circuit noise. We have seen that this is **NOT the case with PhotoTubes** but we will see that **it is the case with PhotoMultiplier Tubes**. NEP was devised as an figure of merit for comparing objectively the intrinsic quality of different detectors.

Let a photocathode have area A_D, signal current I_p and Dark Current I_B with area density j_B. Employing a filter with bandwidth (unilateral) Δf we have noise

$$\sqrt{\overline{i_n^2}} = \sqrt{2qI_B\Delta f} = \sqrt{2qj_B}\sqrt{A_D}\sqrt{\Delta f} \quad \text{and} \quad \frac{S}{N} = \frac{I_p}{\sqrt{\overline{i_n^2}}}$$

The minimum measurable current signal $I_{p,min}$ (corresponding to S/N=1) is

$$I_{p,\min} = \sqrt{\overline{i_n^2}} = \sqrt{2qj_B}\sqrt{A_D}\sqrt{\Delta f}$$

For illumination with optical power P_p at a given λ the Detector Responsivity is

$$S_D = \frac{I_p}{P_p} = \eta_D\cdot\frac{\lambda}{hc/q} = \eta_D\cdot\frac{\lambda[\mu m]}{1,24}$$

- NEP is defined as the input optical power $P_{p,min}$ corresponding to the minimum measurable signal

$$NEP = P_{p,\min} = \frac{I_{p,\min}}{S_D} = \frac{\sqrt{\overline{i_n^2}}}{S_D} = \frac{\sqrt{2qj_B}\sqrt{A_D}\sqrt{\Delta f}}{S_D}$$

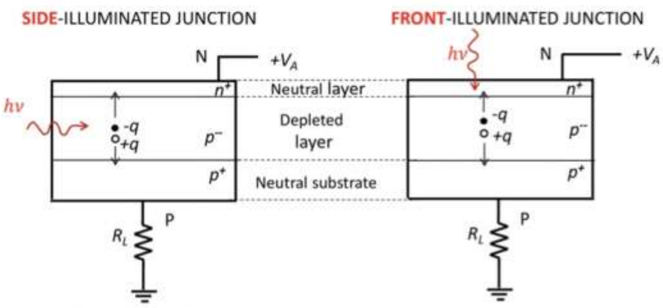
In essence: NEP = detector noise referred to the input (in this case the **optical input**).

- However, the NEP is not a fully objective figure of merit for assessing and comparing the quality of photocathodes: in fact, **cathodes of equal quality have different NEP if they have different area**. Furthermore, the NEP is an inverse scale, that is, the best photocathodes have the lowest NEP figures.
- A different figure named Detectivity D* was therefore derived from the NEP by
  a) considering the NEP value normalized to unit sensitive area ($A_D = 1cm^2$) and to unit filtering bandwidth (Δf = 1Hz)
  b) defining the Detectivity D* as the reciprocal of the normalized NEP

$$\boxed{D^* = \frac{\sqrt{A_D}\sqrt{\Delta f}}{NEP}} \quad \text{that is} \quad D^* = \frac{S_D}{\sqrt{2qj_B}} = \eta_D\cdot\frac{\lambda[\mu m]}{1,24}\frac{1}{\sqrt{2qj_B}}$$

Photodiode

Reverse biased p-n junction: $V_A > 0$



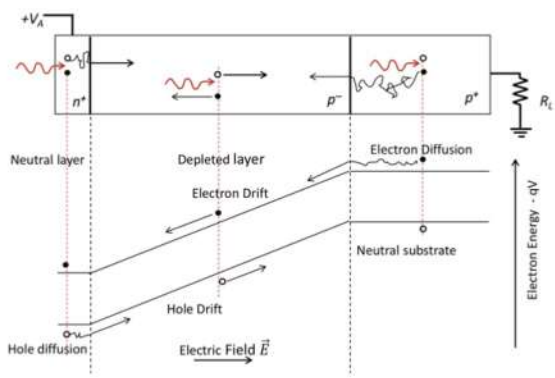
Employed for specific purposes, e.g. microsystems with integrated waveguides for on-chip optical connections

Most widely employed; the active area (illuminated area) can be designed with flexibility and can attain wide size

Abbiamo la standard giunzione P-N

Anche in questo caso i fotoni possono entrare dal lato o da sopra

Quando i fotoni arrivano di lato ho che la giunzione può essere molto piccola in spessore e molto lunga per assorbire tutta la luce, il problema di questa tecnica è che essendo la giunzione molto sottile è che devo focalizzare tutta la luce in un punto molto piccolo



Struttura del photodiodo

In questo caso abbiamo 2 portatori, l'elettrone e la lacuna.
Inoltre non abbiamo solo la depleted region ma abbiamo anche 2 zone neutre.
(Perciò dobbiamo anche capire cosa succede se un elettrone viene assorbito in zona neutrale)

Il portatore nella depleted region si comporta esattamente come nel phototube

Mentre se l'elettrone viene generato nella neutral region ho una situazione molto diversa perché qui non ho un campo elettrico. Il photone che arriva nella neutral region non genera una image charge. Questi riducono allora la detection efficiency

Carriers generated in the depleted layer:

- A carrier in the depleted layer induces opposite charges in the conductive electrodes (neutral semiconductor layer and metal contact to the external circuit)
- The value of the induced charge on a given electrode depends on the carrier distance from the electrode
- If the carrier moves the charge induced on the electrode varies, hence current flows through the contact

Conclusion: a carrier drifting in the depleted layer **causes current to flow** through the metal contact to the external circuit

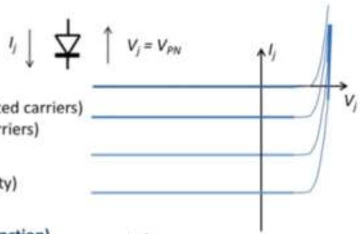
Carriers generated in neutral regions:

- A carrier in a neutral region is surrounded by a huge population of other free carriers
- When the carrier moves the distribution of free carriers swifltly rearranges itself to electrically screen any effect of the carrier motion on the external circuit

Conclusion: **as long as it diffuses** in a neutral region, a carrier **does NOT cause current** to flow through the metal contact to the external circuit.
However, **if** by diffusion it reaches the edge of depletion layer before recombining, **then** it drifts in the electric field and causes current to flow.

❑ I-V of illuminated p-n junction

$$\boxed{I_j = I_0 \exp\frac{qV_j}{kT} - I_0 - I_p}$$



I_0 reverse current (thermally generated carriers)
I_p photocurrent (photogenerated carriers)

$$\boxed{I_p = S_D \cdot P_L}$$

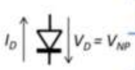
(P_L optical power; S_d radiant sensitivity)

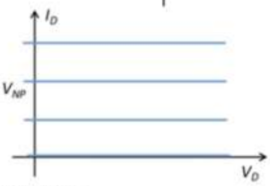
Caratteristica I-V del photodiodo, in questo caso abbiamo che la corrente è uguale a quella di un diodo solo che in questo caso ho anche Ip che la corrente dovuta dai fotoni

❑ Photodetector (reverse-biased junction)

I_D detector current = - I_j
V_D detector voltage = - V_j

$$I_D = I_p + I_0 - I_0 \exp\left(-\frac{qV_D}{kT}\right)$$





with $V_D \gg kT/q$ $\quad \boxed{I_D = I_p + I_0 \approx I_p}$

Detector photocurrent $\propto P_L$ — Detector dark current

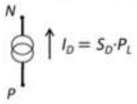
Tipicamente noi siamo interessati alla reversed biased junction, in questo caso la corrente sarà

$$I_P + I_0$$

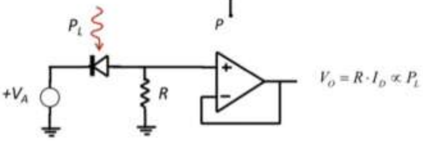
dove I_0 è la dark current.

LINEAR PHOTOCURRENT MODE: PD with high reverse bias $V_A \gg kT/q$

stationary equivalent circuit:
photo-controlled current generator

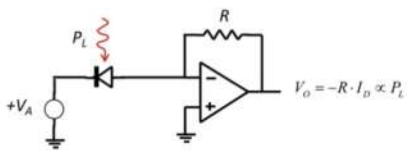


OPERATION WITH PASSIVE LOAD



in questo caso ho lo stesso problema di prima infatti se aumento la luce aumenta la corrente e quindi aumenta la caduta su R che risulta in una variazione della bias voltage

OPERATION WITH ACTIVE LOAD



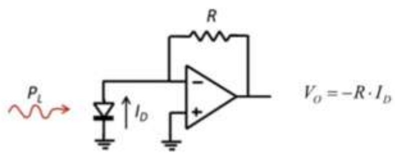
Molto meglio con il transimpedance amplifier

Semiconductor photodiodes can be operated also without a bias voltage source. As outlined below, the short-circuit current is measured in the photoconductive mode and the open-circuit voltage in the photovoltaic mode. These configurations have modest sensitivity and slow response (see later), but their simplicity is attractive in some practical cases, e.g. for monitoring a steady light over a wide dynamic range.

Posso anche evitare di mettere il bias voltage per ridurre la power consumption e perché non ho la bias voltage

PHOTOCONDUCTIVE MODE
PD in short-circuit $V_A = 0$
Linear output scale

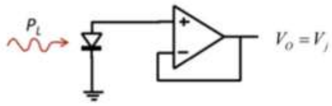
$$I_D = I_p + I_0 \approx I_p$$



Non cambia niente nelle formule, ma ho uno svantaggio significativo, perché senza bias voltage ho una depleted region molto piccola e quindi le prestazioni del photodiode vanno a peggiorare.

PHOTOVOLTAIC MODE
PD in open-circuit $I_D = 0$
Logarithmic output scale

$$V_j = \frac{kT}{q}\ln\left(1 + \frac{I_p}{I_0}\right) \approx \frac{kT}{q}\ln\left(\frac{I_p}{I_0}\right)$$



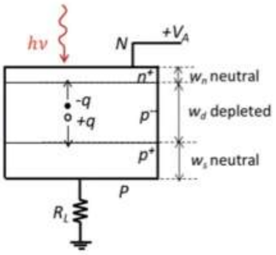
Se lavoriamo a basse lunghezze d'onda potrebbe andare anche bene visto che la lunghezza d'ingresso è molto piccola

Photon detection efficiency η_D

(è diversa dalla quantum efficiency perché è più complesso che nel phototube, dove la probabilità era dipendente dal materiale mentre qui la probabilità dipende da parametri del dispositivo)

P_d = probability of a photon to generate a free electron-hole pair **in the depletion layer** = product of probabilities of

1. NOT being reflected at the surface
2. NOT being absorbed in the top neutral layer w_n
3. BEING absorbed in the depletion layer w_d



Denoting by R the reflectivity (probability of reflection) and $L_a = 1/\alpha$ optical absorption depth:

$$P_d = (1-R)\cdot e^{-\alpha w_n}\cdot\left(1 - e^{-\alpha w_d}\right)$$

Problema 1) la luce non deve essere riflessa
Problema 2) la luce non deve essere assorbita nella neutral region
Visto che la depleted region è finita può succedere che la luce esca senza essere assorbita

$$P_d = \underbrace{(1-R)}_{\text{luce che entra dopo la riflessione}}\ \underbrace{e^{-\alpha w_n}}_{\text{lunghezza che perdo per la prima neutral region}} \cdot \underbrace{\left(1 - e^{-\alpha w_d}\right)}_{\text{lunghezza che perdo per la 2ª neutral region}}$$

In most PD structures the probability that carriers photogenerated in neutral regions reach by diffusion the depletion layer is negligible, hence the photon detection efficiency or quantum detection efficiency η_D is simply

$$\boxed{\eta_D = P_d = (1-R)\cdot e^{-w_n/L_a}\cdot\left(1 - e^{-w_d/L_a}\right)}$$

In PD structures where carriers diffusing in neutral regions have significant probability of reaching the depletion region, additional contributions to η_D must be taken into account

tutti i photon che cadono qui sono persi

Absorption lenght

$$\boxed{\eta_D = P_d = (1-R)\cdot e^{-w_n/L_a}\cdot\left(1-e^{-w_d/L_a}\right)}$$

Basic sources of η_D losses are 1) surface reflection, 2) absorption in the neutral input layer and 3) incomplete absorption in the depletion layer (active volume).
The η_D value attained depends on the actual material properties and PD structure and on the light wavelength λ.

η_D loss by Reflection

- The reflection at vacuum-semiconductor surface is strong because of the high step discontinuity in refractive index n, since n is high in semiconductors. In Silicon n>3,5 over all the visible range and further rises at short λ; the reflectivity is accordingly high R>30% and further rises at short λ .
- Losses can be reduced by tapering the n-transition with deposition of a multi-layer anti-reflection (AR) coating of materials with n values suitably scaled down from semiconductor to vacuum. Strong reduction can be obtained, down to R<<10%.
- In Silicon PDs a simple AR coating is obtained with a surface oxide layer (passivation layer), because SiO_2 has intermediate n≈2. Remarkable reduction can be obtained, down to R≈10%.

Un modo per migliorare l'efficienza e ridurre la riflessione con un antireflecting coating.
Cosa importante, l'anti reflecting coating varia per varie lunghezza d'onda.

Tipicamente mettiamo w_d = 100-200nm (?)

Questo crea un problema a basse lunghezze d'onda perchè non riescono ad arrivare alla depleted region.

$$\eta_D = P_d = (1-R)\cdot e^{-w_n/L_a}\cdot\left(1-e^{-w_d/L_a}\right)$$

η_D loss by absorption in neutral input layer

- At short *λ*, η_D cutoff occurs because photons are all absorbed in the neutral region at the surface. The escape probability is ruled by w_n/L_a (see 2nd term).
In Silicon L_a is small at short *λ* : L_a < 1 *μm* for *λ< 500nm* and L_a *<100 nm* for *λ<*400nm. In actual Si-PD structures w_n ranges from about *200 nm* to 2 *μm;* the cutoff *λ* congruently ranges from about *300 nm* to *400 nm*.

η_D loss by incomplete absorption in the depletion layer

- At long *λ* , η_D cutoff occurs because the absorption falls down. Absorption is ruled by w_d/L_a (see 3d term); with $w_d/L_a \ll 1$ we get $\left(1-e^{-w_d/L_a}\right) \approx w_d/L_a$.
Silicon is ≈ transparent beyond *1100 nm*, since photon energy < Si energy gap. In actual Si-PD structures the depth w_d can range from one to various tens of *μm*; given the *λ*-dependance of L_a , the cutoff *λ* ranges from about *900 nm* to *1100 nm*.

Current Si-PDs provide high efficiency (*η_D > 30%)* in the visible 400nm < *λ* < 800nm.

The operation range can be extended to longer *λ* with PDs in other semiconductors: up to 1500nm with Germanium devices and up to 2000nm with InGaAs devices

Dark current e rumore

- Even without light falling on it, a finite current I_B flows in a reverse-biased p-n junction. It is called **Dark Current** in PDs and reverse current in ordinary circuit component diodes.
- I_B is due to spontaneous generation of free carriers by thermal effects (and also by tunnel effects in device structures with high electric field).
- Just like in Phototubes, the shot noise of I_B is the photodiode internal noise, with effective power density (unilateral)

$$\sqrt{S_B} = \sqrt{2qI_B}$$

- The internal noise of PD devices with **microelectronic-size** (sensitive area <1mm²) is much lower than the input noise of even the best high-impedance preamplifiers. In the applications of microelectronic PDs the circuit noise is dominant, just like for vacuum phototubes.
- However, semiconductor PDs have **dark current density j_B much higher than vacuum phototubes**; this fact significantly limits the active area size of semiconductor detectors that can be employed for very low-noise operation.

La teoria è la stessa del phototubo.
il rumore è esattamente lo stesso ma la dark curret density è molto maggiore nel photodiode.
in pratica abbiamo sì lo stesso rumore ma con area del photodiodo molto più piccola

COSA EXTRA IMPORTANTE DA SAPERE.

se aumento tanto la bias voltage e quindi aumento sì la detection efficiency ma posso creare una nuova fonte di rumore dovuto dell'effetto tunneling

Dark Current of Si-PD

Non ho ben capito cosa diamine è n_G

In Silicon device physics and technology it is ascertained that in reverse-biased junctions with moderate electric field intensity:

a) the dark current is mainly due to thermal generation of carriers in the depletion layer. Contribution by diffusion of minority carriers from neighbouring neutral regions are much lower and negligible in comparison.

b) The thermal generation rate in the depletion has volume density n_G given by

Credo che $n_G \cdot A$ ci dia la dark current.

$$\boxed{n_G = \frac{n_i}{2\tau}}$$

n_i = intrinsic carrier density; $n_i = 1{,}45 \times 10^{10}\ \mathrm{cm}^{-3}$ @ Room Temperature

τ = minority carrier lifetime, strongly dependent on the device technology i.e on the starting material and on the fabrication process. Typical values:

$\tau \approx \mu s$	ordinary Si technology for integrated circuits
$\tau \approx ms$	ordinary Si technology for detector devices
$\tau \approx 1 \div 10s$	best available Si technology for detector devices

} Parametri estremamente importanti

Dark Current and active area of Si-PD

Esempio di lavoro.

A Si-PD with circular active area of diameter D (area $A = \pi D^2/4$) and depletion layer thickness w_d has dark generation rate $n_B = n_G A w$. For setting a limit $n_B < n_{Bmax}$ the diameter D must be limited

$$A < A_{max} = n_{B\max} / n_G w_d = 2\tau n_{B\max} / n_i w_d$$

$$D \leq D_{max} = \sqrt{8\tau n_{B\max} / \pi n_i w_d}$$

Example: Si-PD with w_d =10µ in good Si detector technology ($\tau \approx$10ms), intended to have the widest possible area with noise lower than a preamplifier with $\sqrt{S_i} = \approx 0{,}01 pA/\sqrt{Hz}$. For keeping the shot noise so low, the generation rate must be limited to $n_{Bmax} < 10^9 s^{-1}$ which implies

$$D < D_{max} = 1{,}3\ cm$$

In questo caso per avere rumore + piccolo di quello del preamplificatore dobbiamo avere D< 1,3cm

As we will see, the area limitation is more severe for avalanche photodiodes (APD). The APD internal gain makes negligible the role of circuit noise, hence it is the APD detector noise that limits the sensitivity and it is worth to reduce it more drastically.

Example: Si-APD with w =10µm, fabricated in very good Si detector technology (say $\tau \approx 1s$) intended to have low dark rate, comparable to that of a good vacuum tube photocathode, say $n_{Bmax} < 10^3 s^{-1}$ like a S20 photocathode with diameter 3cm. The limit is

$$D < D_{max} = 130 \mu m$$

Non sappiamo ancora cos'è APD, abbiamo un guadagno dentro il photodiodo.

Segnale di corrente del fotodiodo

Ci viene un risultato diverso. Usiamo lo stesso teorema dell'altro giorno però. Iniziamo però ad avere dei problemi nel calcolo della velocità e della traiettoria.

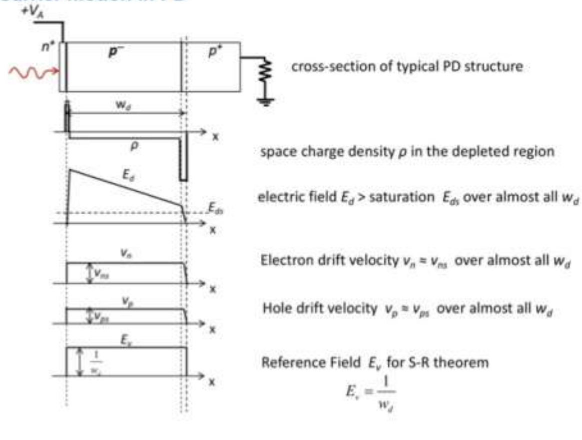
- The motion of carriers in a semiconductor with electric field E_d is different from that in vacuum with equal E_d: carriers suffer scattering on the lattice and dissipate in the collisions most of the energy received from the field. No more the acceleration, but the drift velocity v_c is a function of the field E_d.
- In Silicon (and other materials) the motion of electrons is different from holes:
  - at **low field E_d <2 kV/cm** = 0,2 V/µm the regime is **Ohmic**: $v_c = \mu_c E_d$ (electron mobility $\mu_n \approx 1500\ cm^2V^{-1}s^{-1}$; holes $\mu_p \approx 450\ cm^2V$)
  - as E_d increases above 2kV/cm the velocity rises progressively slower
  - at **$E_{ds} \approx$ 20kV/cm** = 2V/µm the **velocity saturates** at the scattering-limited values

  for electrons $\boxed{v_{ns} \approx 10^7\ cm/s}$ for holes $\boxed{v_{ps} \approx 8 \cdot 10^6\ cm/s}$

  which are almost equal to the thermal scattering velocity $v_{th} \approx 10^7$ cm/s

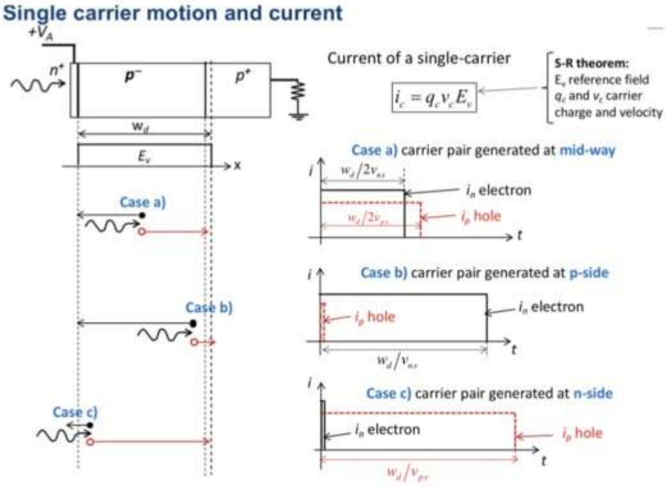
noi vogliamo che gli elettroni siano molto veloci, perché vogliamo alta banda. Perciò noi progettiamo il fotodiodo per avere la velocità uguale a quella di saturazione che è la massima che possiamo avere nel silicio. (Perciò abbiamo una velocità circa costante).

Carrier motion in PD



Un altra differenza è che ieri l'elettrone era generato nel catodo oggi ci sono elettrone e lacuna che vengono generati nella depleted region

Single carrier motion and current



Il problema è che elettrone e lacuna hanno velocità diverse e pure spazio da percorrere diverso (è uguale solo se il fotone arriva esattamente al centro).

Capiamo che quindi la single electrode response corrente cambia in base a dove arriva l'elettrone e l'elettrone arriva con probabilità che segue l'esponenziale della lunghezza di assorbimento.

È un casino da fare.

Facciamo un approssimazione, a noi non interessa la forma della single electrode response

- The duration of a single-carrier pulse is given by the transit time T_t of the carrier in the depleted region. At saturated velocity it is quite short: in Silicon the carrier travel takes ≈10ps/μm, that is, with $w_d = 1 \div 100\mu m$ it is $T_t = 10ps \div 1ns$.
- The single-carrier pulse duration thus depends on the position of carrier generation. Rigorously, the waveform of the current due to a fast multi-photon pulse is not the convolution of the optical pulse with a standard carrier response: it is a more complex computation that depends on the spatial distribution of absorbed photons.
- However, convolution with a suitable standard single-carrier response gives the waveform with approximation adequate for most cases, at least for times longer than the carrier transit time.
- A simplifying and conservative approximation currently employed for Silicon PDs assumes as standard the response to an electron that crosses all the depletion layer.

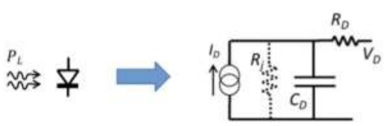
Capiamo da questa approssimazione che i photodiodi sono dispositivi estremamente veloci

Finite width of response implies low-pass filtering in light-to-current transduction: it's a mobile-mean over time $T_t = w_d/v_{sn}$, with upper band-limit $1/2T_t = v_{sn}/2w_d$.

Se aumentiamo di molto wd vediamo anche il valore di capacità del diodo (che aumenta)

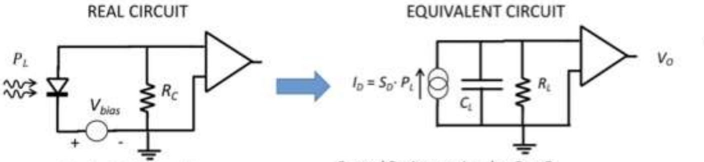
Note the w_d trade-off: long w_d is required for high quantum efficiency at long wavelength λ, short w_d for ultrafast time response. Remark, however, that this is valid for front-illuminated junction and not with side illuminated junction

Photodiode Equivalent Circuit



- $I_D = S_D \cdot P_L$ photo-controlled generator (S_D radiant sensitivity or responsivity)
- C_D diode capacitance (p-n junction)
- R_D diode series resistance (of the input layer and substrate)
- R_j parallel resistance of the reverse biased junction is considered → ∞

Dove RD è una resistenza dovuta delle connessioni silicio - pin in metallo



R_C circuit input resistance

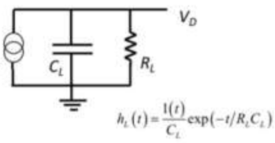
R_L total Resistance Load ≈ $R_C + R_D$
C_L total Capacitive Load = $C_D + C_S$ (stray) + C_A (amplifier)

← Abbiamo sempre un Low pass filter. In questo caso però la capacità principale è quella del fotodiodo (al contrario di quello che accadeva nel photo tube)

the load circuit is a low-pass filter with time constant $R_L C_L$ in the transfer from detector current I_D to output voltage V_O

In summary, the PD dynamic response is limited:

1. By the light-to-current transduction, with pulse response $h_D(t)$ of finite-width T_t, well approximated by a rectangular pulse.
2. By the load circuit, with δ-response $h_L(t)$ of finite-width $T_L \approx R_L C_L$



$$h_L(t) = \frac{1(t)}{C_L}\exp(-t/R_L C_L)$$

Anche oggi ci viene che $R_L C_L < T_t$ con T_t transient time

The δ-response $h_P(t)$ in the transfer from light power to detector voltage results from the convolution of the two

$$h_P(t) = h_D(t) * h_L(t)$$

Hence the width T_P is the quadratic addition of the two

$$T_P = \sqrt{T_t^2 + T_L^2} = \sqrt{T_t^2 + R_L^2 C_L^2}$$

For exploiting well the fast response $h_D(t)$ of the PD current, the load circuit does not need to have much faster response, but just comparable or slightly better

$$T_L = R_L C_L \leq T_t$$

Photodiode dinamic Response

For a PD in planar Silicon with depletion layer w_d and circular area A of diameter D

$$C_D = \varepsilon_{Si}\frac{A}{w_d} \qquad T_t = \frac{w_d}{v_{sn}} \approx w_d \cdot 10\, ps/\mu m$$

Assuming (quite optimistically) that the load capacitance be given only the junction $C_L \approx C_D$ and applying the condition $R_L C_L \le T_t$ we get

$$A \le \frac{w_d^2}{v_{sn}}\frac{1}{R_L \varepsilon_{Si}} \qquad \text{that is} \qquad D \le w_d\sqrt{\frac{1}{\pi v_{sn} R_L \varepsilon_{Si}}}$$

In wide-band operation the load resistance R_L is small, but is not much less than 100 Ω (diode resistance ≈ some ten Ohm and characterisic resistance of wide-band circuits 50÷75Ω). For exploiting well the fast response limited by the transit time, with R_L = 100 Ω, ε_{Si}≈1,06pf/cm, $v_{ns} \approx 10^7$ cm/s , the limit to the size of sensitive area is

$$D \le 12{,}5 \cdot w_d$$

In the design of detector devices, the selected depletion layer depth w_d depends on the wavelength of interest and on the photon detection efficiency sought; it actually ranges from 1μm to about 100μm.
The area of fast semiconductor photodiodes thus is small in all cases: as w_d ranges from 1μm to 50μm the limit diameter correspondingly ranges from 25μm to 1,25mm

Facciamo gli stessi calcoli fatti nel caso del photo tubo

Otteniamo che il diametro del buco deve essere minore o uguale a 12,5 · wd. Dove wd è la depleted region. (wd è estremamente piccolo)
Quindi otteniamo che anche D è estremamente piccolo

Capiamo che possiamo avere banda molto grande ma il diametro è molto piccolo.

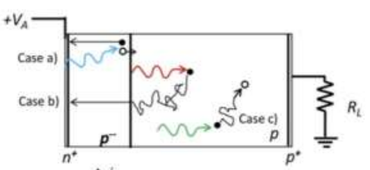
Carrier diffusion effect

Vogliamo studiare l'effetto della diffusione degli elettroni. Abbiamo diffusione degli elettroni solo dove non c'è campo elettrico quindi nel substrato e nella upper neutral region. Prima per calcolare l'efficienza non le avevamo considerate (approssimazione) tuttavia ora capiamo che possiamo fare comunicazioni molto veloci e quindi dobbiamo studiare anche questi effetti

Carrier Diffusion Effects

3

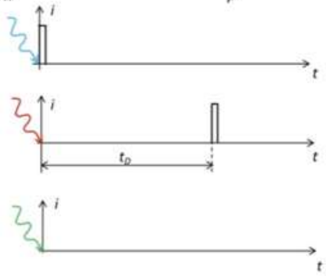
Single-Carrier Response



a) Carrier generated in depleted region: **short** and **prompt** pulse

b) Minority Carrier generated in neutral region that random-walks by diffusion and attains the depleted region: **short** pulse with **random delay t_D**

c) Minority Carrier generated in neutral region that random-walks by diffusion and there recombines: **NO** current pulse

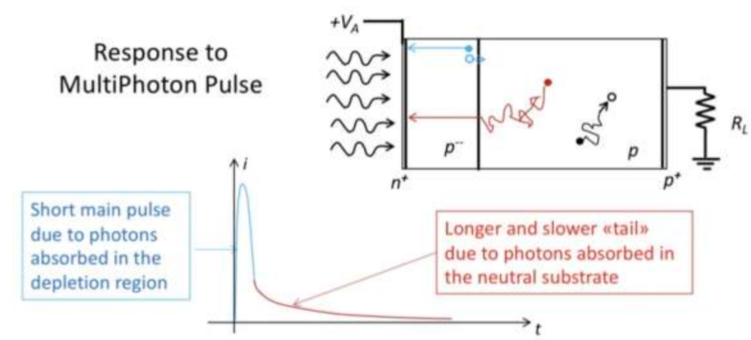


C'è una probabilità che una carica generata in una zona neutrale viaggi per diffusione fino alla depleted region.
Quando arriverà alla depleted region anche questa creerà un impulso di corrente come una normale carica generata nella depleted region.
Solo che la differenza tra 1 2 è che il picco dato dalla carica generata nella zona neutrale avrà un delay randomico che dipende dal tempo della diffusione. (il delay può anche essere ∞ perchè non è detto che la carica arrivi alla depleted region)

Vedendo sia le cariche generate nella depleted region che quelle date dalla diffusione abbiamo che

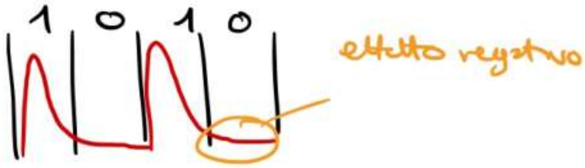
Carrier Diffusion Effects

Response to MultiPhoton Pulse



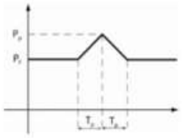
The shape and relative size of the «diffusion tail» are established by the photogeneration and by the diffusion dynamic of minority carriers in neutral regions. They strongly depend on the PD device geometry, on the material properties in the neutral regions (diffusion coefficient and minority carrier lifetime) and on the space distribution of the absorbed photons, hence on the photon wavelength.

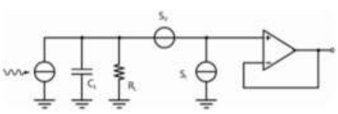
Otteniamo un impulso con una coda.
Il problema della coda è che se devo fare comunicazioni con questo sistema devo fare in modo che la coda non vada a compromettere i bit conseguenti.
Aumenta la bit error rate.



Potrei ridurre il bitrate in modo da tenere sia picco che coda dentro un unico bit (aumentando la durata) ma così riduciamo la durata di tutto il sistema

Esame 25/07/2006



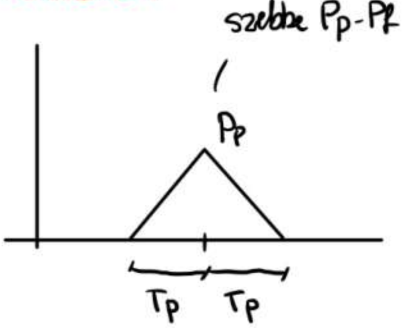


The signal coming from a photosensor is picked-up by a preamplifier featuring an extremely high input impedance (in the order of 1GΩ), bandwidth limited by a single pole at frequency f_A=100kHz and input-referred wideband noise featuring unilateral spectral density $\sqrt{S_{V,U}}$ = 2 nV/(Hz)$^{1/2}$ e $\sqrt{S_{I,U}}$ = 0,1 pA/(Hz)$^{1/2}$. C_L = 5 pF and R_L = 1 MΩ represent the capacitive and resistive load introduced by the photosensor itself. Before the photosensor an optical filter is present having a narrow optical bandwidth centered around λ=620nm. The photosensor is a phototube featuring a S20 photocathode having quantum efficiency of 5% at 620nm and dark current I_B=1fA. The light pulse reaching the photosensor is shown in figure (left): it has a triangular shape with peak power P_P and duration $2T_P$=1ms superimposed to a continuous background with optical power P_F.

Preamp : f_{PA} = 100KHz

a) Evaluate the minimum optical power that can be measured in absence of background (P_F=0) without using any additional filtering stage.
b) Evaluate the power of the background that would cause an increment by a factor 1.4 of the minimum optical signal that can be measured.
c) Discuss what kind of filtering action is required in order to improve the sensitivity of the system in the conditions of point b); then select a filter and evaluate the minimum optical power that can be measured in these conditions.
d) Discuss and explain the characteristics of the filter that would provide the best SNR; evaluate the corresponding minimum optical power and compare it with the result obtained in point c.

• Punto a)



Questa è la potenza che arriva al sensore, poi dopo il protosensor abbiamo una corrente.
La relazione tra potenza e corrente è data dalla radiant sensitivity.

Calcolare la potenza minima misurabile.

Io voglio prendere il segnale sul picco così ho il massimo SNR.
Dobbiamo però vedere se l'RC network ha un effetto sul segnale di corrente. (Da quello che ho capito il segnale di corrente ha la stessa forma di quello di potenza solo è il 5% per la quantum efficiency.

$\tau_L = C_L \cdot R_L = 5pF$ $\qquad 1M\Omega = 5\mu s$

Questa non ha effetti sulla forma del segnale.

La banda del segnale è più piccola del polo dato da $C_L R_L$ quindi non viene modificata

> Calcoliamo ora il rumore

So che abbiamo S_V e S_I, ma abbiamo altri valori di rumore?
Sì, abbiamo il rumore termico di corrente della resistenza e abbiamo anche la dark current del phototube, e oltre a questa abbiamo anche lo signal shot noise

$$\underbrace{\sqrt{S_I}}_{0,1\,pA/\sqrt{Hz}} , \underbrace{\sqrt{\frac{S_V}{R_L^2}}}_{2fA/\sqrt{Hz}} , \underbrace{\sqrt{\frac{4kT}{R_L}}}_{0,13\,pA/\sqrt{Hz}} , \underbrace{\sqrt{2qI_B}}_{0,018\,fA/\sqrt{Hz}} , \underbrace{\sqrt{2qI_S}}_{\text{signal shot noise}}$$

Portiamo tutto in corrente così abbiamo direttamente un SNR e non dobbiamo riportare il segnale di corrente in tensione.

Notiamo che la noise current data dalla black current è trascurabile, anche la voltage noise è trascurabile.

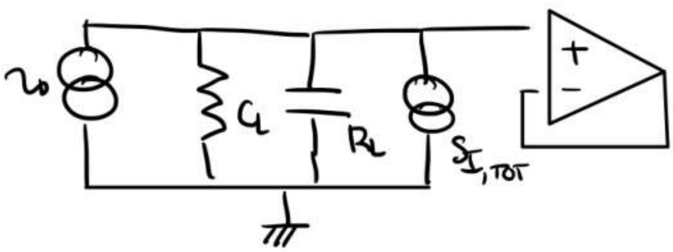
Per quanto riguarda la shot noise nel segnale, questa è trascurabile se confrontata con le altre (solo perché siamo sun phototube). Prima la considero trascurabile, poi calcolo il valore di corrente considerandola trascurabile, allora poi verifico che la shot signal noise sia realmente trascurabile

IPOTESI: $\sqrt{2qI_S}$: trascurabile (anche per forza visto che non abbiamo il numero)

Facciamo perciò la SNR

$$SNR = \frac{I_{SP}}{\sqrt{\left(S_n + \frac{4KT}{R_L}\right)\cdot BW}}$$

Notiamo che



$$S_{I,TOT}\Big|_a = S_I + \frac{4KT}{R_L}$$

La struttura ha 2 poli:

- $f_{PL} = \frac{1}{2\pi R C_L} = 31,8\ KHz$
- $f_{PA} = 100\ KHz$

Approssimiamo il sistema con solo il primo polo (così è più facile e siamo anche conservativi), allora

$$SNR \quad \frac{I_{SP}}{\sqrt{\left(S_I + \frac{4KT}{R_L}\right)\cdot\frac{\pi}{2}\cdot f_{PL}}}$$

perciò $I_{SP_{MIN}} = 1\cdot\sigma_i = 364\ pA$

ha detto che S_V in genere è filtrato solo dal preamplificatore e non dal $R\,C_L$ perché è in corrente (?). In ogni caso qui non cambia niente visto che è trascurabile

Tramite il valore di $I_{SP_{MIN}}$ noi calcoliamo il valore della shot noise del segnale e vediamo che per l'appunto è trascurabile.

Dalla corrente ricaviamo la potenza, sappiamo che la radiant sensitivity è

$$S_D = \eta\cdot\frac{\lambda}{1,24} = 25\ mA/W$$

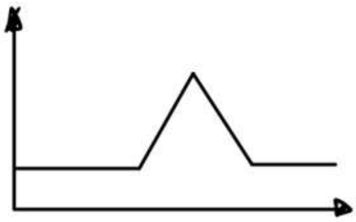
Perciò

$$P_{P\,MIN} = \frac{I_{PMIN}}{S_D} = 1{,}46\,nW$$

• PUNTO B

Valutare l'ampiezza della potenza del background che causa un incremento di 1,4 del minimo segnale misurabile.

$P_{MIN} = 1{,}4 \cdot P_{MIN}|_a$



La lunghezza d'onda del segnale è sempre la stessa perchè sennò sarebbe stata filtrata dal filtro ottico.

è ovvio che il rumore aumenta perchè se vedo i 2 segnali come segnali diversi ho il triangolo di prima e un segnale costante. Allora posso eliminare la componente del segnale in continua del segnale con un HPF. Tuttavia non posso eliminare tutte le componenti del rumore di questo segnale continuo. infatti ho anche il rumore $2qI_F$ (background noise). Questo rumore rimane perchè è un rumore bianco e quindi non cambia con un filtro HPF.

Sappiamo che il vecchio rumore era

$$S_{I\,TOT}|_a = S_I + \frac{4KT}{R}$$

allora il rumore totale di questo punto è

$$S_{I\,TOT}|_b = S_I + \frac{4KT}{R_L} + 2qI_F$$

visto che 1,4 è la radice quadrata di 2 allora dobbiamo trovare il valore di I_F che fa diventare $S_{I\,TOT}|_b = 2\,S_{I\,TOT}|_a$
Questo vale perchè il segnale in tutti e 2 i casi è lo stesso.

$$I_F = 83\,nA$$

questa corrisponde ad una potenza del background di $P_F = 3{,}32\,\mu W$

Punto C

che filtrazione posso fare per migliorare le condizioni del punto B.

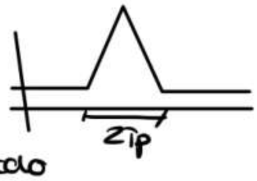
Sappiamo che il background è $\neq 0$ e vale $P_F = 3{,}32\,\mu W$

$$\sqrt{S_{I\,TOT}|_b} = \sqrt{2 \cdot S_{I\,TOT}|_a} = \sqrt{2} \cdot 0{,}16\,pA/\sqrt{Hz} = 0{,}23\,pA/\sqrt{Hz}$$

c'è sempre la shot noise del segnale che noi trascuriamo e poi dobbiamo controllare

se è OK. (Ricordiamo che la signal shot noise vale $2qI_S$).
Che tipo di rumore è questo? Se I_S è costante abbiamo che la signal shot noise è rumore bianco stazionario.

Ma nel nostro caso la potenza e la corrente hanno forma
perciò abbiamo un punto in cui non è stazionario
(e forse neanche non bianco) di durata $2T_P$.



Prima non tenevamo conto di questo perché $2T_P$ era molto più piccolo della banda del filtro quindi il rumore non era stazionario per un piccolo periodo.
Adesso che facciamo un filtro questo potrebbe non essere vero.

In ogni caso si può dimostrare che il rumore stazionario o meno è sempre e in ogni caso trascurabile.

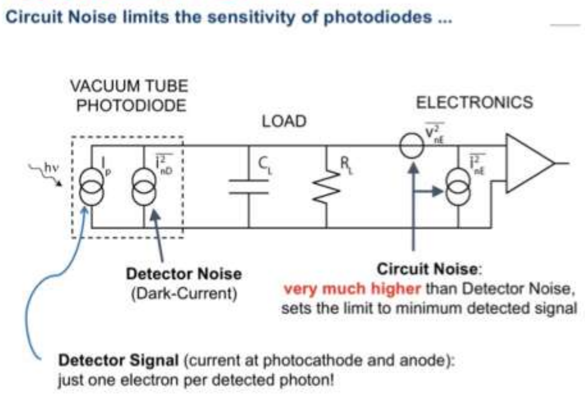
Dobbiamo quindi scegliere il filtro per il segnale.
Come abbiamo visto prima vedendo i valori notiamo che la baseline ha un'altezza molto maggiore del segnale. Possiamo levare dalle balle la baseline con un HPF

- CR → ha effetto sia su segnale che rumore (progettato per evitare signal loss)
- zero setting o CDF. (fatto in modo da evitare il doppiare del rumore)

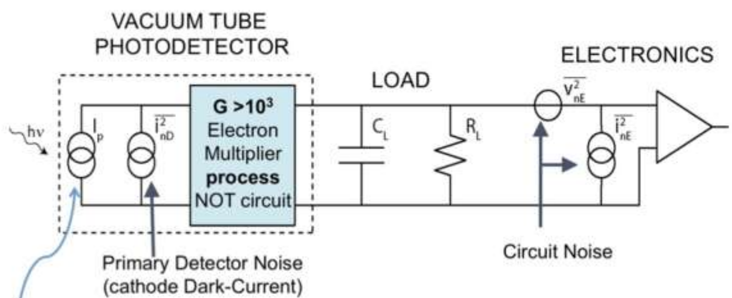
Poi posso pensare di fare un LPF in modo da ridurre il rumore.

13.05.2021 Lezione 2h

Fotomoltiplicatore

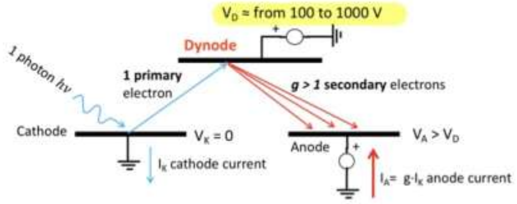


Visto che il rumore del photosensor è trascurabile potremmo amplificare il segnale d'uscita dal preamplificatore per migliorare l'SNR



- Primary Signal (photocathode current): one electron per detected photon
- Output (anode) current: **G >10^3** electrons per primary electron
- Dark-current noise and/or photocurrent noise at detector output are much higher than circuit noise, which has practically negligible effect

Ma non avevamo detto che il SNR non dipende dal guadagno, tanto si ma solo sulla sua parte. In questo caso se noi amplifichiamo amplifichiamo segnale e rumore ma il rumore è molto piccolo rispetto a ire quindi anche il rumore amplificato sarà così, allora aumento l'SNR
Il problema è: come facciamo ad amplificare il segnale dato che qualsiasi amplificatore elettronico porta rumore, faccio un ampli ottico



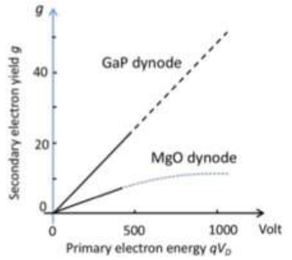
- A primary electron is emitted in vacuum with very little kinetic energy $E_e < 1eV$
- Driven in vacuum by a high potential difference (some 100V), it impacts with high energy on a **dynode** (electrode coated with suitable material, see later)
- Energy is transferred to electrons in the dynode; some of them gain sufficient energy to be emitted in vacuum; ***g > 1*** is the **yield** of secondary electrons per primary electron

Per fare questo faccio così, realizzo un photodetector con un dynode (moltiplica il numero di elettroni)

La tensione del Dynode è molto elevata.

Il Dynode può essere fatto di diversi materiali che hanno diverse caratteristiche.

Il Gallio-fosfato è molto bello perché è lineare, però costa molto e si degrada con le performance



Secondary emitter coatings with ordinary yield
- MgO Magnesium Oxide
- Cs_3Sb Cesium Antimonide
- BeO Beryllium Oxide
- Cu-Be Copper-Beryllium alloys

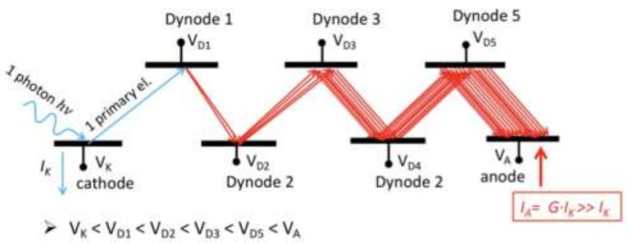
Secondary emitter with high yield (due to NEA negative electron affinity, see slide 26 in PD2) :
- GaP Gallium Phosphide

MgO dynode non ha questi problemi ma ho una saturazione. Questa potrebbe non essere un problema perché satura a circa 1000V.
L'altro problema è che il guadagno è molto più piccolo.

- In the normal working range up to ≈500V, the emission yield g is **proportional** to the accelerating voltage V (i.e. the primary electron energy) $g = k_s V_D$
- At higher voltage g rises slower and tends to saturate (energy is transferred also to electrons in deeper layers, which have lower probability of escape in vacuum)
- In the linear range ordinary emitters work with g values from ≈1,5 to ≈7 and GaP dynodes g values from ≈5 to ≈25
- GaP dynodes are more costly and delicate, require special care in operation and their yield tends to decrease progressively over long operation times

Ma questo si può risolvere usando + dynode

Sketch of the Principle (example with 5 dynodes)



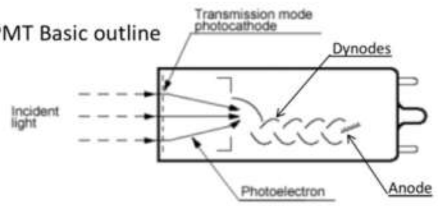
Il problema è che per ogni dynode ci deve essere una determinata ddp (tipo 100V per ogni dynode) e quindi la totale tensione si alza molto.

- $V_K < V_{D1} < V_{D2} < V_{D3} < V_{D5} < V_A$
- Electron optics (i.e. potential distribution) carefully designed to lead the electrons emitted from each electrode to the next one
- $g_r > 1$ secondary electron yield of dynode r
- $G = g_1 \cdot g_2 \cdot g_3 \cdot g_4 \cdot g_5$ **overall multiplier gain**

  that is, $G = g^5$ with equal stages $g_1 = g_2 = \ldots = g$

IL PROBLEMA con i fotomoltiplicatori è che gli elettroni generati sono generati in direzioni casuali, devo trovare un modo per focalizzare gli elettroni al secondo dynode.
Per fare questo si usano tipo dynode a parabola

PMT Basic outline



Come abbiamo detto prima abbiamo introdotto + dynode per aumentare il guadagno, perciò

- PMTs can have high number n of dynodes (from 8 to 12) and attain high gain G.

  With n equal dynodes it is $G = g^n$; e.g. with 12 dynodes $G = g^{12}$

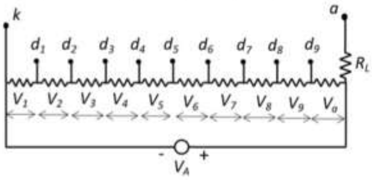
  $G = 10^4$ with $g = 2{,}2$

  $G = 10^5$ with $g = 2{,}6$

  $G = 10^6$ with $g = 3{,}2$

Il problema è che dobbiamo anche avere una grande ddp tra ogni dynode.

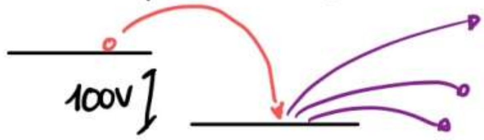
- G is controlled by the dynode bias voltage, which regulates the dynode yield g
- A single supply is usually employed, with high voltage V_A typically from 1500 to 3000 V. The dynode voltages are obtained with a voltage-divider resistor chain; the potential difference V_j between two dynodes j and $(j-1)$ is a preset fraction f_j of the supply V_A



$\boxed{V_j = f_j V_A}$

Ad esempio con 12 dynodes ci servono tipo 2,2KV.
Dobbiamo avere bassa corrente consumata altrimenti la potenza è troppo alta.
Tipicamente per avere meno corrente quel partitore resistivo è fatto con valori di resistenze molto elevate.

Ci sono ddp tra dynodes per "far prendere energia" agli elettroni per fare in modo di crearne molti.



- The supply voltage V_A thus rules the yield g_j of every dynode $g_j = k_S V_j = k_S f_j V_A$
  and the total gain $G = g_1 g_2 \dots g_n = k_S V_1 \cdot k_S V_2 \dots k_S V_n = k_S^n f_1 f_2 \dots f_n \cdot V_A^n$
  which increases with V_A **much more** than linearly
  $$\boxed{G = k_S^n f_1 f_2 \dots f_n \cdot V_A^n = K_G \cdot V_A^n}$$
  (NB: $K_G = k_S^n f_1 f_2 \dots f_n$ is constant, set by the voltage distribution and dynode characteristics)
- The gain G is very sensitive to even small variations of the supply V_A : the relative variations of supply voltage are n-fold amplified in the relative variations of gain
  $$\boxed{\frac{dG}{G} = n \frac{dV_A}{V_A}}$$
- Consequently, tight requirements must be set to the stability of the high voltage V_A versus ambient temperature and/or power-line voltage variations.
  e.g. getting ***G* stability better than 1%** for a PMT **with n=12 dynodes** requires a high voltage supply **V_A better stable than 0,08 %**

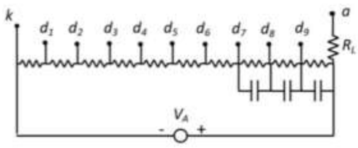
il guadagno dipende dalla ddp tra due dynode, ma visto che noi creiamo le tensioni con un partitore, allora posso scrivere il guadagno in relazione a V_A

il problema è che una variazione di tensione risulta in n volte una variazione di Guadagno, dove n è il numero di dynodes

- The parameter values in the PMT operation must be carefully selected for exploiting correctly the PMT performance. We will point out some main aspects and call the **user attention on warnings reported in the manufacturer data sheets**.
- For limiting self-heating of voltage divider below a few Watt, the divider current must be < 1 mA, hence total divider resistance must be at least a few MΩ.
- In order to avoid nonlinearity in the current amplification, variations of dynode voltages caused by the PMT current should be negligible. The PMT output current must thus be less than 1% of the divider current, i.e. typically a few μA.
- This limit is acceptable for DC current, but not for pulsed optical signals. However, fast transients of dynode voltages can be limited by introducing in the last stages capacitors in low-pass filtering configurations, as sketched in the examples

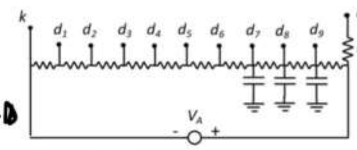
il problema è che io da un elettrone genero molti altri elettroni e questi risultano in una corrente e quindi devo anche tenere conto di questa corrente nella power dissipation.

Mi sono perso un pezzo in cui diceva qualcosa sui condensatori.



Anche avere i condensatori non è molto top perché mi serve un condensatore alla fine che tenga in storage un altissima tensione

Allora i condensatori servono per stabilizzare la tensione, visto che ho anche l'altra corrente avrei una variazione di tensione



Per risolvere che i condensatori debbano tenere altissime tensioni non li collego a terra come qui ma li collego tra loro come sopra. Così la tensione ai capi è minore.

- Space-charge effects may cause nonlinearities in the amplification of fast pulsed signals. A high charge of the signal itself can significantly reduce the electric field that drives the electrons: the higher is the pulse, the slower gets the electron collection. The pulse shape is more or less distorted, depending on its size
- Nonlinearity can occur also if the voltage signal developed on the load is high enough to reduce the driving field from last dynode to anode
- Magnetic fields have very detrimental effect: the electrons traveling in vacuum are deviated and the operation is inhibited or badly degraded. With moderate field intensity, magnetic screens (Mu-metal shields wrapped around the vacuum tube) can limit the effects; with high intensity fields PMT operation is actually impossible
- PMTs are fairly delicate and subject to fatigue effects and their operation is prejudiced by mechanical vibrations

Non abbiamo risolto tutti i problemi, questi sono gli altri

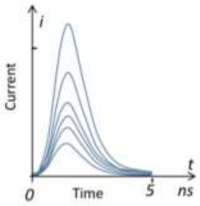
Una soluzione per la space-charge effect è quella di limitare la quantità di luce che arriva al photodetector.

Un altro problema sono i campi magnetici, infatti abbiamo cariche che si muovono nel vuoto, se abbiamo un campo magnetico allora questo cambia/inverte il verso degli elettroni

Ci sono anche altri problemi, dal punto di vista di signal recovery. Perchè quando genero gli elettroni sul dynode li genero con un processo probabilistico, quindi non so esattamente il numero degli elettroni e questo succede per ogni dynode

- The PMT output is superposition of elementary current pulses that correspond to single electrons emitted by the cathode, called **Single Electron Response (SER)** pulses.
- SER current pulses are fast (a few nanosecond width) and fairly high (pulse-charge Gq from 10^5 to 10^6 electrons). They are remarkably higher than the noise of fast circuits; with PMT weakly illuminated they are well observable on the oscilloscope screen and each of them corresponds to the detection of a single photon.
- The SER current pulses observed have all equal pulse shape, but randomly varying pulse-amplitude; i.e. G is not constant, but statistical

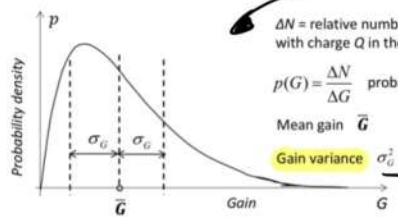
La Single electrode response allora avrà diversi valori di ampiezza e questi sono dovuti ad un processo statistico.



- The random fluctuations of G are due to the statistical nature of secondary electron emission
- Since the SER charge is much higher than the minimum measurable detector pulse*, the statistical distribution *p(G)* of the gain *G* (probability density of *G* value) can be directly collected by measuring and classifying the pulse-charge of many SER pulses.

Per studiare questo potremmo calcolare la distribuzione di questi valori

La distribuzione statistica del guadagno è questa:



ΔN = relative number of SER pulses observed with charge Q in the interval $qG \pm q\Delta G/2$

$p(G) = \frac{\Delta N}{\Delta G}$ probability density of G

Mean gain $\overline{G}$

Gain variance $\sigma_G^2 = \overline{\left(G-\overline{G}\right)^2} = \overline{G^2} - \left(\overline{G}\right)^2$

Notiamo che potremmo avere anche guadagno Ø.

La varianza del guadagno sarà molto importante.
il problema è che noi abbiamo molti dynodes e quindi tutto diventa un casino

- The plot above sketches the typical appearance of the statistical distribution *p(G)* of the PMT gain *G*.
- For different PMT models and different operating conditions (bias voltage distribution on dynodes; temperature of operation; etc.) remarkably different *p(G)* are observed. The distributions are roughly akin to gaussian, but skewed toward high *G* values.
- The main parameters to be considered for analyzing the PMT operation are mean gain $\bar{G}$, gain variance σ_G^2 and relative variance $v_G^2 = \frac{\sigma_G^2}{(\bar{G})^2}$

- Emission of primary electrons from cathode is a process with Poisson statistics, i.e. mean number N_p, variance $\sigma_p^2 = N_p$ and relative variance $v_p^2 = \frac{\sigma_p^2}{N_p^2} = \frac{1}{N_p}$
- Emission is followed in cascade by statistical multiplication with fluctuating G
- The mean of the cascade output is $N_u = N_p \cdot \bar{G}$ (two independent processes)
- The Laplace theory of probability generating functions shows that the relative variance v_u^2 of the output of a cascade is sum of the relative variance of every stage in the cascade divided by the mean value of all the previous stages. In our case:

$$v_u^2 = \frac{\sigma_u^2}{N_u^2} = v_p^2 + \frac{v_G^2}{N_p} = \frac{1}{N_p} + \frac{v_G^2}{N_p} = \frac{1}{N_p}\left(1+v_G^2\right)$$

- The variance σ_u^2 thus is

$$\sigma_u^2 = N_p^2 \overline{G}^2 v_u^2 = N_p \overline{G}^2\left(1+v_G^2\right) = \sigma_p^2 \overline{G}^2\left(1+v_G^2\right)$$

Questo è un teorema per calcolare la varianza, ricordare solo formule evidenziate.

In conclusion, the PMT :
1) amplifies the input variance by the square gain $\bar{G}^2$, like an amplifier and
2) further enhances it by the **Excess Noise Factor F** due to the gain fluctuations

$$\boxed{\sigma_u^2 = \sigma_p^2 \cdot \overline{G}^2 \cdot F} \quad \text{with} \quad \boxed{F = 1 + v_G^2 > 1}$$

Ricaviamo che tutto dipende dal valore di F, è un fattore che noi vogliamo più piccolo possibile perchè è un fattore che ci aumenta il rumore.
Tipicamente con il PMT il valore è molto basso tipo 1,4.

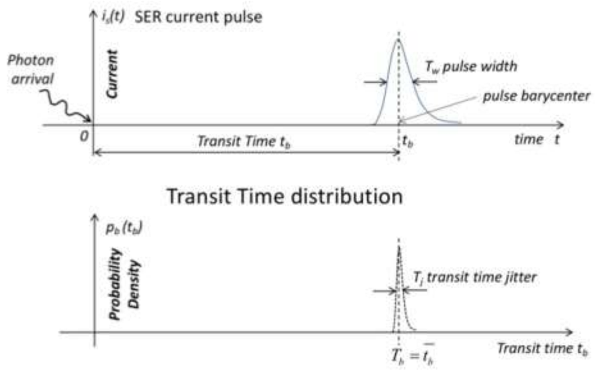
PMT noise vs Amplifier noise

- A PMT amplifies by $\bar{G}^2$ the input noise like an amplifier and further increases it by the **Excess Noise Factor *F*:** $\sigma_u^2 = \sigma_p^2 \cdot \bar{G}^2 \cdot F$
- We will see that it is ***F ≤ 2* for most PMT types and *F* is close to unity for high quality PMT types**. The factor of increase of rms noise is always **moderate** $\sqrt{F} \leq 1{,}4$ and often near to unity. Reasonably approximated evaluations can be obtained by neglecting the excess noise, i.e. with *F=1*.
- Further explanations and comments on the gain fluctuation are given in Appendix 1
- As modern alternative to a PMT, one could propose a vacuum tube photodiode coupled to a high-gain and low-noise amplifier chip, possibly with amplifier chip inside the vacuum tube. It would offer practical advantages: more simple, rugged anc compact structure, lower operating voltage, etc..
- In fact, a PMT outperforms such «photodiode-with-amplifier-inside» by detecting optical signals smaller by orders of magnitude. We can better understand the matter by gaining a better insight about how these devices work.

Risposta dinamica del fotomoltiplicatore

Dobbiamo vedere la banda della single electrode response (cioè la larghezza del segnale).

PMT response to a single photon

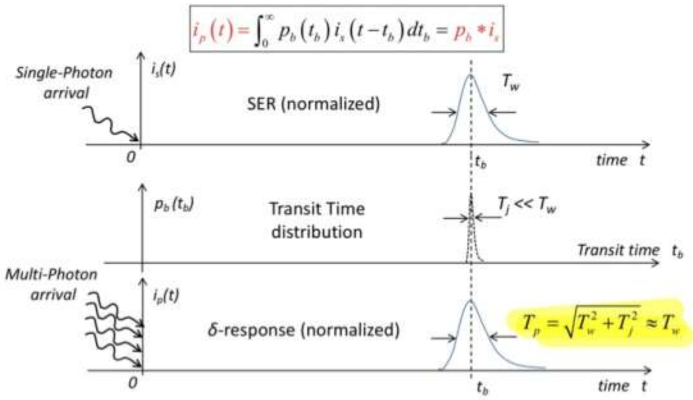


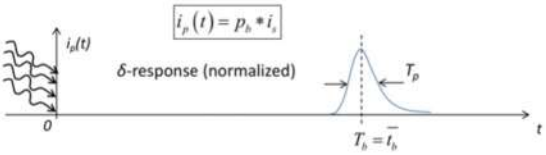
La forma è qualcosa di così, notiamo che c'è un delay dovuto dal fatto che è possibile avere un segnale solo quando gli elettroni vanno dall'ultimo dynode al catodo

Anche la durata del Transit time è variabile perchè abbiamo una distribuzione si dove posso avere il picco del segnale e quindi varia il transit time

- Differently from vacuum tube photodiodes, in PMT the rise of a SER current pulse is delayed (from ≈10ns to some 10ns dependent on PMT type and bias voltage) with respect to the photon arrival. The dynodes electrostatically screen the anode, so that only electrons traveling from last dynode to anode induce current (Shockley-Ramo theorem).
  The **PMT transit time t_b** is defined as the delay of the **pulse barycenter**.
- The transit time t_b randomly fluctuates from pulse to pulse, with a transit time **jitter T_j** (full-width at half maximum FWHM of the t_b distribution) from a few 100ps to a few ns depending on PMT type and bias voltage. T_j is due to the statistical dispersion of the electron trajectories in the first stages of the multiplier.
- The SER pulse **width T_w** (FWHM from a few ns to various ns, depending on PMT type and bias voltage) is always wider than the transit time jitter: $T_w \approx$ 5 to 10 times T_j . It is due to the statistical dispersion of the electron trajectories in all the multiplier.
- T_w has very small fluctuations, practically negligible
- Further explanations and comments on these parameters are given in Appendix 2

PMT response $i_p(t)$ to a multi-photon δ-like light pulse: derived from 1) SER pulse waveform and 2) transit time distribution





- The δ-response is a convolution $i_p = p_b * i_s$, hence its FWHM T_p is quadratic sum of FWHMs T_w and T_j of the components

$$T_p = \sqrt{T_w^2 + T_j^2}$$

- since T_j / T_w is small (from 0,1 to 0,2) the width of the δ-response is practically equal to the SER current pulse width $T_p \approx T_w \left[1 + \frac{1}{2}(T_j/T_w)^2\right] \approx T_w$
- The finite SER pulse width establishes a finite bandwidth f_p for the PMT employed as analog current amplifier

$$f_p = 1/k_a T_w$$

(the coefficient k_a is from ≈3 to ≈10, depending on the SER pulse waveform)

Possiamo anche calcolare la banda del segnale

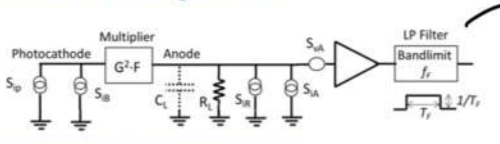
$$f_p = 1/K_a T_w$$

dove K_a va da 3 a 10

Notiamo che comunque è un sensore molto veloce.

Rapporto segnale rumore e minimo segnale misurabile.

Noise sources and filtering with PMTs



è un GI con larghezza TF.

Posso e non posso avere CL.

- n_p photoelectron rate → $I_p = n_p q$ photocurrent
- n_D dark electron rate → $I_D = n_D q$ cathode dark current
- n_b electron rate due to photon background → $I_b = n_b q$ photon background current
- $n_B = n_D + n_b$ total background electron rate → $I_B = n_B q$ total background current

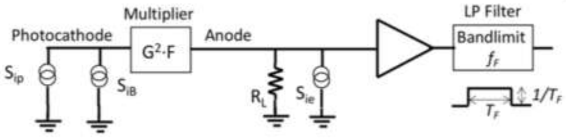
Noise sources :

- at cathode: $S_{ip} = 2qI_p = 2q^2 n_p$ photocurrent noise, increases with the signal
- at cathode: $S_{iB} = 2qI_B = 2q^2 n_B$ background noise, **independent from the signal**
- at anode: resistor load noise S_{iR} and preamplifier noise S_{iA} and S_{vA}

Let's deal with S/N and minimum measurable signal in the basic case: constant signal current I_p and low-pass filtering (typically by Gated Integration)

Una cosa è la dark count, un'altra cosa è il background, la dark count è quella che ho con il sensore coperto, la background è la conta che ho di base con il sensore scoperto. Questa conta è incorrelata perciò farò dark count + background count.

il problema è che abbiamo rumori a destra e sinistra del guadagno.
Posso muovere tutti i rumori all' input.



RICORDARSI CHE IL GUADAGNO DELLA CORRENTE HA ANCHE F.

We consider cases with wide-band load, i.e. with $1/4R_LC_L >> f_F$, such that

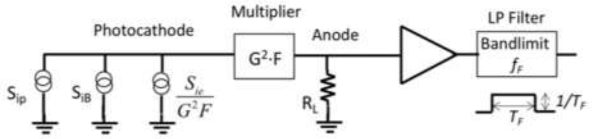
a) the filtering effect of C_L is negligible
b) the circuit noise can modeled simply by a current generator

$$S_{ie} = S_{iA} + S_{iR} + S_{vA}/R_L^2$$

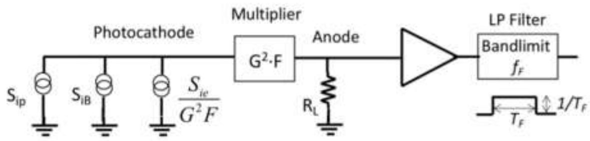
which can be referred back to the input (at the photocathode) as S_{ie}/G^2F

Tipicamente G molto alto, allora di norma i rumori degli ampli operazionali sono trascurabili (sempre da provare numericamente)

anche se S_{ie}/G^2F non fosse trascurabile lo unisco al SiB sommandoli assieme



il problema si crea quando non ho S_{ie}/G^2F, in quel caso devo considerare (?) Sip la quale non è indipendente dal segnale.



- The circuit noise S_{ie} can be modeled by a shot current **at the anode:** $I_e = S_{ie}/2q$ with electron rate $n_e = I_e/q = S_{ie}/2q^2$
- With wide band preamplifier and low resistance $R_L \approx$ few kΩ the circuit noise typically is $\sqrt{S_{ie}} \approx 2\,pA/\sqrt{Hz}$ or more. The equivalent shot electron rate is $n_e \approx 10^{14}$ **el/s or more**
- Referred to input (cathode), the circuit noise is modeled by a shot current with **reduced** electron rate n_e/FG^2. For instance, with G= 10^6 it is $n_e/FG^2 \approx 100$ **el/s**
- The circuit noise referred to the input added to the background noise $S_{iB}=2qI_B=2q^2n_B$ gives the **constant** noise component (i.e. **NOT** dependent on the signal)

$$S_{iB} + \frac{S_{ie}}{G^2F} = 2qI_B + \frac{2qI_e}{G^2F} = 2q^2\left(n_B + \frac{n_e}{G^2F}\right)$$

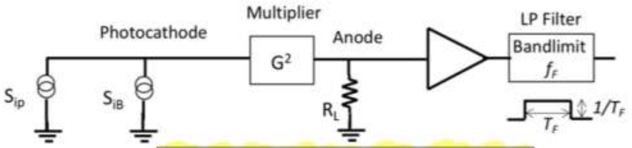
il rumore del preamplificatore non è una shot noise ma è un numero, noi dividiamo per 2q e otteniamo una corrente fittizia per scriverla come shot noise per calcolare l'equivalent rate degli elettroni.

Voglio arrivare a scrivere che:

For the sake of simplicity in the following computations we consider:

a) **negligible circuit noise.** Anyway, we know when it must be taken into account and how to do it, by considering an increased constant component of noise.
b) negligible excess noise, i.e. ***F = 1***. Anyway, cases with non-negligible F > 1 can be taken into account simply by introducing the factor $\sqrt{F}$ to decrease the S/N and increase the noise variance and the minimum signal computed with F=1.

Possiamo scrivere l'SNR, qui abbiamo un problema, abbiamo il segnale che è anche un rumore. Cioè abbiamo Ip sia al numeratore che al denominatore sotto radice.



$$\boxed{\frac{S}{N} = \frac{I_p}{\sqrt{S_{ip}f_F + S_{iB}f_F}} = \frac{I_p}{\sqrt{2qI_pf_F + 2qI_Bf_F}}}$$

il problema principale di questo è che se cambio il filtro fF non so come cambia l'SNR ma devo rifare tutti i conti.

The minimum signal $I_{p,min}$ is reached when S/N = 1 : we will see that the result markedly depends on the **relative size of constant noise vs photocurrent noise**

Possiamo avere 2 casi Sip trascurabile o SiB trascurabile

Caso con rumore predominante Sip (quindi SiB trascurabile)

- The simplest **extreme case is with negligible background noise:** only photocurrent noise matters. With noise band-limit $f_F = 1/2T_F$ (GI filtering)

$$\frac{S}{N} = \frac{I_p}{\sqrt{2qI_p f_F}} = \frac{I_p T_F}{\sqrt{qI_p T_F}} = \sqrt{\frac{I_p T_F}{q}} = \sqrt{n_p T_F} = \sqrt{N_p}$$

$N_p = n_p T_F$ is the **number of photoelectrons** in the filtering time T_F.

- In fact, the S/N can be obtained directly from the Poisson statistics of photoelectrons: with mean number N_p, the variance is $\sigma_p^2 = N_p$ and

$$\frac{S}{N} = \frac{N_p}{\sigma_p} = \frac{N_p}{\sqrt{N_p}} = \sqrt{N_p}$$

- Remark that in this case the noise is **NOT constant,** independent from the signal: as the signal goes down, **also the noise goes down!!**
  - By making lower and lower I_p, **when S/N = 1 the minimum signal $I_{p,min-p}$ is reached**

$$\boxed{\left(\frac{S}{N}\right)_{\min} = 1 = \sqrt{\frac{I_{p,\min-p} T_F}{q}} = \sqrt{n_{p,\min-p}\, T_F} = \sqrt{N_{p,\min-p}}}$$

  - The minimum measurable photocurrent signal $I_{p,min-p}$ corresponds to just **one photoelectron in T_F**, the filter weighting time:

$$\boxed{I_{p,\min-p} = \frac{q}{T_F}} \qquad \boxed{n_{p,\min-p} = \frac{1}{T_F}} \qquad \boxed{N_{p,\min-p} = 1}$$

  - Observing the complete S/N equation

$$\frac{S}{N} = \frac{I_p}{\sqrt{2qI_p f_F + 2qI_B f_F}} = \frac{I_p T_F}{\sqrt{qI_p T_F + qI_B T_F}} = \frac{n_p T_F}{\sqrt{n_p T_F + n_B T_F}} = \frac{N_p}{\sqrt{N_p + N_B}}$$

  we see that the background noise is truly negligible only if $I_B << I_p$ for any I_p **down to the minimum $I_{p,\,min-p}$**, i.e. only if

$$\boxed{I_B \ll \frac{q}{T_F}} \qquad \boxed{n_B \ll \frac{1}{T_F}} \qquad \boxed{N_B \ll 1}$$

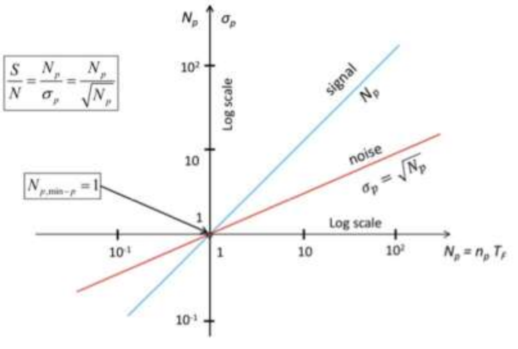
In questo caso il rumore non è costante e dipende dal numero di elettroni ricevuti nella finestra d'integrazione.

Il minimo segnale rilevabile è un fotoelettrone nella mia finestra di integrazione

Importante

Nel caso generale possiamo scrivere l'SNR così.
Capiamo che abbiamo il caso precedente quando il numero di elettroni dati da l background è molto minore di Np. ma noi sappiamo che Np è 1 perciò NB è molto minore di 1.

In questi casi siamo limitati dal rumore dello shot signal. in questo caso ho che



Signal measured by **charge**, in terms of **number of photoelectrons $N_p = n_p T_F$**

L'SNR = 1 l'ho dove linea blu e rossa si incrociano cioè per Np = 1

Notiamo che passiamo da un caso all'altro $\sqrt{Np}$ o $\frac{Np}{\sqrt{N0}}$ in base al valore di Tf.
Dove Tf è la larghezza della finestra del GI che progettiamo noi, quindi non è un qualcosa che si fa solo una volta ma dobbiamo fare diversi conti

Devo anche essere sicuro che nel Tf io abbia abbastanza tempo per prendere un segnale, per fortuna abbiamo un sinc che ci aiuta.

Nell'altro caso

- The **opposite extreme case is with negligible photocurrent noise:** only background noise matters. More precisely, it's the case where the limit current $I_p = I_{p,min-p}$ computed with only the photocurrent noise is much lower than the background current I_B

$$\boxed{I_B \gg \frac{q}{T_F}} \qquad \boxed{n_B \gg \frac{1}{T_F}} \qquad \boxed{N_B \gg 1}$$

In questo caso abbiamo NB maggiore di Np.

- There is now a different **minimum signal $I_{p,min-B}$ limited by the background noise**

Risultato?

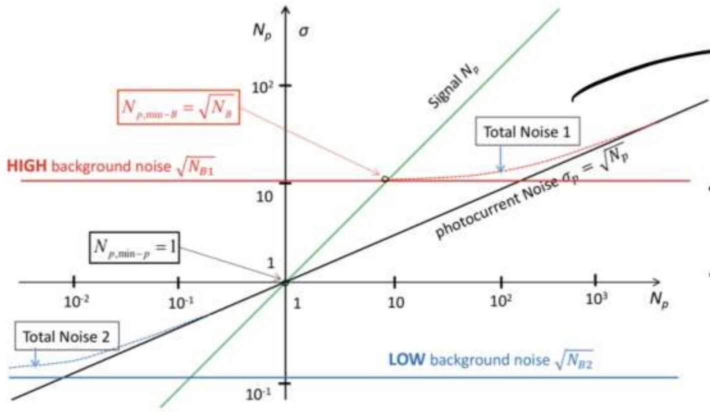
$$\boxed{I_{p,\min-B} = \sqrt{\frac{qI_B}{T_F}}} \qquad \boxed{n_{p,\min-B} = \sqrt{\frac{n_B}{T_F}}} \qquad \boxed{N_{p,\min-B} = \sqrt{N_B}}$$

- In **intermediate cases both noise components** contribute to limit the minimum signal, which is computed from

$$\frac{S}{N} = \frac{N_{p,\min}}{\sqrt{N_{p,\min} + N_B}} = 1 \qquad \text{2}^{\text{nd}} \text{ order equation that leads to} \qquad N_{p,\min} = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4N_B}\right)$$

(NB: the other solution is devoid of physical meaning)

e nel mezzo? Nel mezzo devo calcolare l'equazione di secondo grado



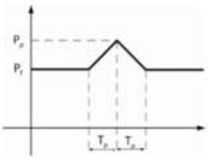
Rumore totale

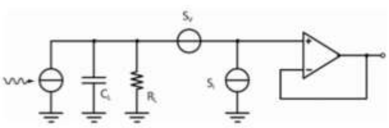
Qui nel mezzo devo calcolare l'SNR con l'eq di secondo grado.

Signal **charge**, in terms of **number of photoelectrons $N_p = n_p\, T_F$**

14.05.2021 Tutorial 3h

Continuiamo con l'esame dell'altro giorno





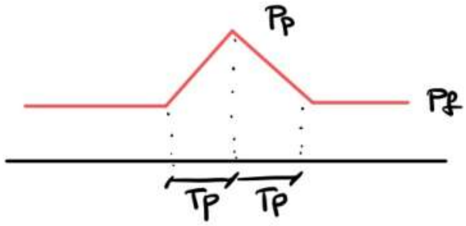
a) Evaluate the minimum optical power that can be measured in absence of background (P_F=0) without using any additional filtering stage.
b) Evaluate the power of the background that would cause an increment by a factor 1.4 of the minimum optical signal that can be measured.
c) Discuss what kind of filtering action is required in order to improve the sensitivity of the system in the conditions of point b); then select a filter and evaluate the minimum optical power that can be measured in these conditions.
d) Discuss and explain the characteristics of the filter that would provide the best SNR; evaluate the corresponding minimum optical power and compare it with the result obtained in point c.

The signal coming from a photosensor is picked-up by a preamplifier featuring an extremely high input impedance (in the order of 1GΩ), bandwidth limited by a single pole at frequency f_A=100kHz and input-referred wideband noise featuring unilateral spectral density $\sqrt{S_{V,U}} = 2\ nV/(Hz)^{1/2}$ e $\sqrt{S_{I,U}} = 0{,}1\ pA/(Hz)^{1/2}$. C_L = 5 pF and R_L = 1 MΩ represent the capacitive and resistive load introduced by the photosensor itself. Before the photosensor an optical filter is present having a narrow optical bandwidth centered around λ=620nm. The photosensor is a phototube featuring a S20 photocathode having quantum efficiency of 5% at 620nm and dark current I_B=1fA. The light pulse reaching the photosensor is shown in figure (left): it has a triangular shape with peak power P_P and duration $2T_P$=1ms superimposed to a continuous background with optical power P_F.

Dal punto B avevamo ricavato che $\sqrt{S_{I_{TOT}}} = 0{,}23\ pA/\sqrt{Hz}$ con $P_F = 3{,}32\ \mu W$

Punto c) Tipo di filtro per trovare la minima potenza ottica nelle condizioni del punto b)

So che



$f_{PA} = 100\,KHz$ e $f_{PL} = 31{,}8\,KHz$

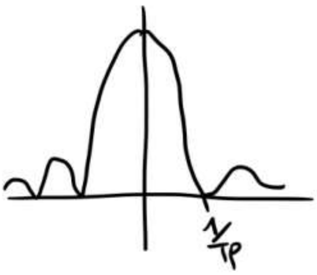
Cosa buona e giusta è eliminare la baseline, per farlo posso usare un

- CR
- Zero setting

In tutti e 2 i casi devo stare attento sia al segnale che al rumore, nel caso del zero setting devo stare attento a non perdere come baseline il segnale, inoltre dobbiamo evitare la noise doubling (per fare questo uso una lunga finestra d'integrazione per la baseline, relativamente alla finestra che abbiamo sul segnale)
Nel caso del CR voglio un low frequency pole per non avere signal losses.

Adesso dobbiamo calcolare il passabasso del segnale, prima di questa cosa dobbiamo vedere la banda del triangolo per vedere se ha senso fare un passabasso o basta $f_{PL} = 31{,}8\,kHz$

Per calcolare la banda del segnale triangolare sappiamo che il triangolo è la convoluzione di 2 rect, quindi in frequenza il triangolo è il $sinc^2$.



La banda del segnale è pressochè tutta contenuta prima del primo zero che viene a

$$1/T_P = 2\,KHz$$

Notiamo quindi che è molto minore rispetto a f_{PL} quindi ha senso fare un passabasso.

Possiamo implementare diversi LPF. es GI (non ci viene chiesto di ottimizzare)
Comunque se volessimo il GI ottimo si ha per $2 \cdot \frac{2}{3} T_P$.
Altrimenti prendiamo un GI di $2T_P$ e via.
In tutti e 2 i casi centrato sul segnale.

Perciò la minima corrente rilevabile è

$$I_{PMIN} = 10{,}3\,pA \qquad (\text{nel caso di } T_G = 2T_P)$$

Perciò

$$P_{MIN} = \frac{I_{PMIN}}{S_D} = 412\,pW.$$

Punto d) Best SNR.

ATTENZIONE!! La optimum filter theory funziona solo con rumore stazionario bianco, qui abbiamo anche rumore non stazionario, ma visto che il rumore dominante è bianco e stazionario, allora la applichiamo comunque.

Optimum filter (stessa forma del segnale) e quindi con il match filter otteniamo

$$P_{MIN} = 358\,pW$$

ATTENZIONE!! se durante la nostra finestra d'integrazione il segnale è costante allora non c'era bisogno di fare il discorso stazionario o meno perché il rumore sarebbe stato stazionario.

ALTRO ESAME

Exam Text of 07/02/2005 (Problem 3)

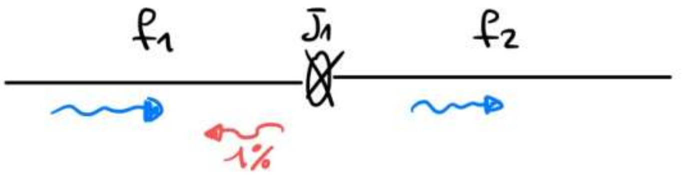
A faulty joint in optic fibers reflects about 1% of the power coming from a laser pulse. This can be used to locate faulty joints in fibers. Rectangular laser pulses with a duration T_P=100ns and power P=1mW generated by a diode laser emitting light at 800nm are exploited. Reflections are observed using a silicon p-i-n photodiode (reflective coefficient at surface of 0.2; surface neutral region thickness 0.5µm, depleted region thickness around 10µm). The photodetector is connected to a current preamplifier featuring a wide bandwidth (limited by a single pole at f_{PA}=100MHz) and input-referred current noise with wideband unilateral spectral density $S_i=(1pA)^2/Hz$. Speed propagation of pulses in fiber is 20cm/ns and the attenuation is 2dB/km.

a) Evaluate the minimum optical power of a pulse that can measured, assuming a minimum acceptable SNR=5.
b) Evaluate consequently the maximum distance in fiber at which it is possible to locate a faulty joint (hint: please note that the pulse has to travel forward and come back).
c) What is the spatial resolution, i.e. the minimum distance between two faulty joints that allows you to locate them both individually?
d) You are now asked to increase the maximum distance at which you can locate a faulty joint without impairing the spatial resolution. Discuss if and how it is possible to achieve this goal. Then, select a filter and evaluate the improvement factor that you can obtain with it.

Laser pulses, quindi + di 1

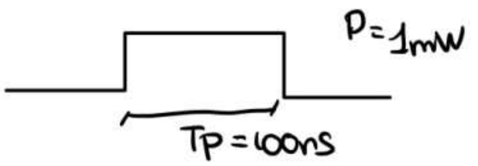
$$\left.\begin{aligned} t_N &= 0{,}5\,\mu m \\ t_D &= 10\,\mu m \\ R &= 0{,}2 \end{aligned}\right\} \text{Fotodiodo}$$

$$\sqrt{S_i} = 1\,pA/\sqrt{Hz}$$



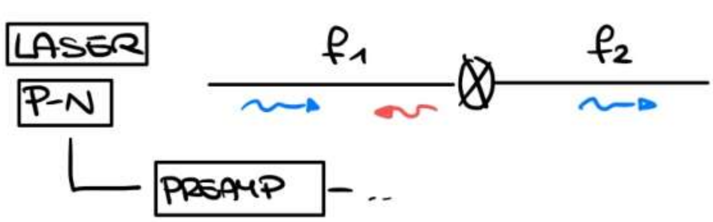
$R_{FJ} = 1\%$

LASER



$\lambda = 800nm$

Costruiamo l'intero sistema, noi siamo interessati solo alla potenza riflessa



mettiamo il fotodiodo stesso lato del laser così non dobbiamo fare differenze (dovremo sapere anche la potenza d'ingresso) e poi ci basta solo un lato della fibra

PUNTO a) SNR=5 calcolare P_{MIN} misurabile

il problema principale è che noi non sappiamo la lunghezza della fibra, perché la potenza riflessa all'ingresso dipende dalla giunzione e dalla lunghezza della fibra. Più lontana è la giunzione meno potenza riflessa ho all'ingresso.

Ma qui mi chiedono solo la minima potenza misurabile del mio sistema di acquisizione.

Noi per ora sappiamo solo che il rumore del preamplificatore è

$$\sigma_i = \sqrt{S_I \cdot \frac{\pi}{2} f_{PA}} = 12{,}5 nA$$

perciò il minimo segnale che possiamo misurare sarà $5 \cdot \sigma_i = 62{,}5 nA$
(5 perché è il minimo SNR)

Dobbiamo ricavare una potenza da questa corrente. La potenza che entra nel photodiode che da in uscita questa corrente.
Dobbiamo usare la radiant sensitivity

$$S_D = \eta \cdot \frac{\lambda}{1{,}24} \left[A/W \right]$$

Non abbiamo η, Tuttavia sappiamo la reflettività del photodiodo ed è logico che l'efficienza dipende da quanta luce entra e quanta no. perciò l'efficienza a 800nm è

$$\eta_{Pin}(800nm) = (1-R)\, e^{-\frac{t_N}{L_0}} \left(1 - e^{-\frac{t_D}{L_0}}\right) = 48\%$$

Absorption length nel silicio a 800nm è 10μm [L_0=10μm] è da ricordare!!!

Dove t_D è la larghezza della depleted region, noi sappiamo anche che la zona neutra è alla superficie e che tutti gli elettroni che vanno lì si ricombinano. Maggiore è t_N allora η_{Pin} cala, mentre se t_D aumenta allora η_{Pin} aumenta

Allora $$P_{MIN} = \frac{I_{MIN}}{S_D} = \frac{I_{MIN}}{\eta \cdot \frac{\lambda}{1{,}24}} = 202 \, nW$$

Punto B) Trovare la distanza max per una faulty joint

Sappiamo che $v_g = 20\,cm/ns$ e $\alpha = 2\,dB/km$, inoltre sappiamo che $P_{MIN} = 202\,nW$.

Sappiamo che la potenza riflessa è 1% di quella che inviamo e dobbiamo tenere conto di tutte le attenuazioni, sia in andata che in ritorno

$$\alpha \cdot d = 10\log\frac{P_{IN}}{P_{OUT}} \qquad \xrightarrow{P_{IN}} \xrightarrow{\quad F \quad} \xrightarrow{P_{OUT}}$$

nel nostro caso P_{OUT} prende la giunzione e torna indietro (1%) per la stessa fibra, perciò la potenza che torna è uguale a

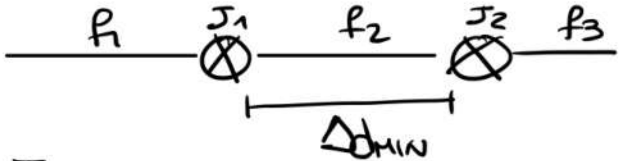
$$P_{BACK} = P_{LASER} \cdot 10^{-\frac{\alpha \cdot d}{10}} \cdot R_{FJ} \cdot 10^{-\frac{\alpha d}{10}}$$

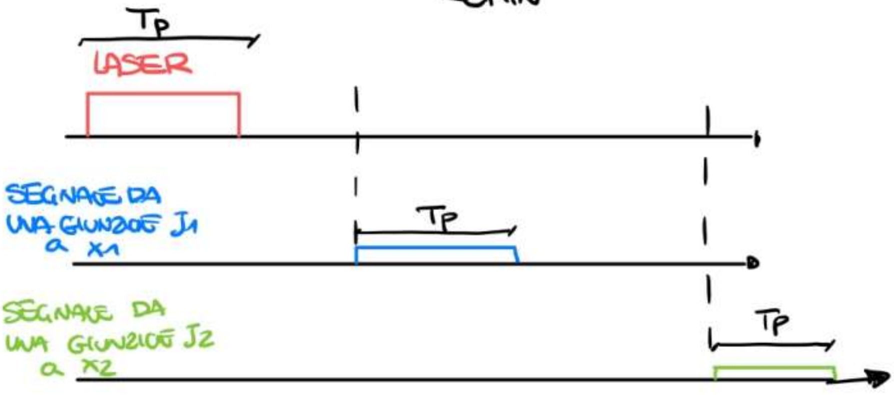
Data $P_{MIN} = P_{BACK}$ ricaviamo d

$P_{BACK\,MIN} = P_{MIN}$, significa $d_{MAX} = 4,23\,Km$

Punto c)

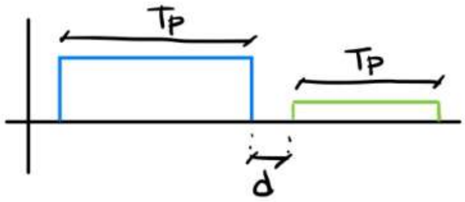
Più di una singola faulty joint, calcolare la distanza tra le 2 giunzioni che mi fa localizzare le 2 individualmente





Io devo vedere gli impulsi separati, so che la durata di ogni impulso è Tp.

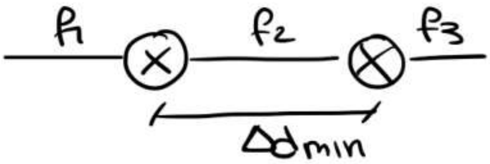
Cosa vuol dire che siamo in grado di distinguere i segnali? Non ci deve essere overlap ma devono anche essere abbastanza separati da essere distinguibili



Prendiamo una distanza tra i 2 di Tp (scelta a caso) se ci fossimo stati attaccati sarebbe stato più un casino per il sistema di rilevazione.

Se fossero stati attaccati avrei dovuto fare un sistema che misura la durata del

segnale, se ho T_p ho solo una giunzione rovinata, se $2T_p$ ne ho 2.
(ma è complesso)



$$2\Delta d_{min} = 2T_p \cdot v_F$$

2Tp perché voglio Tp del segnale iniziale che però a sua volta dura Tp.

2 volte la distanza per la velocità perché la faccio sia in andata che in ritorno

Perciò $\Delta d_{min} = T_p \cdot v_F = 20m$

PUNTO B

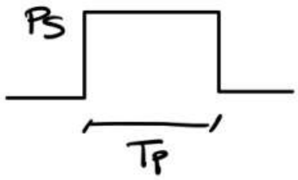
Aumentare la distanza massima per cui possiamo rilevare una giunzione fallata senza toccare la spatial resolution, (quella calcolata al punto sopra 20m)

È possibile fare ciò? Sì se riduciamo il rumore perché un miglior SNR mi permette di andare + lontano.

d_{MAX} è stato calcolato con $\sigma_i = \sqrt{S_I \cdot f_{PA} \cdot \frac{\pi}{2}} = 12{,}5\,nA$

Per ridurre il rumore possiamo ridurre la banda, ma dobbiamo stare attenti perché se riduciamo la banda rischiamo di modificare il segnale che va a interferire con il secondo segnale dato dalla seconda faulty joint

il segnale è

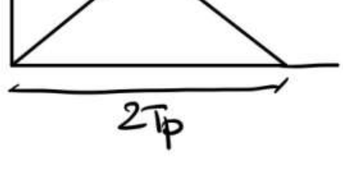


Possiamo applicare un GI-LPF

ci focalizziamo sul singolo impulso per ora
Come dimensioniamo il GI?

Se mettiamo $T_G = T_p$ cosa succede?

Con un Mobile mean filter abbiamo che $(T_G = T_p)$

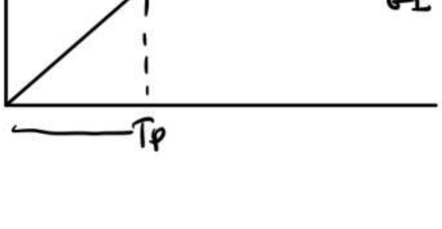


Perché è la convoluzione tra 2 rect uguali
Mobile mean

Con questi filtri andiamo a modificare la durata del segnale

Serve del tempo anche per scaricare il condensatore del GI

Con un GI abbiamo che

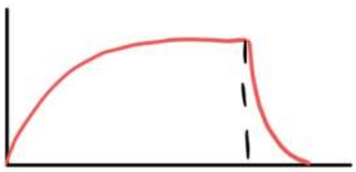


Notiamo che non ci va bene perché non possiamo rovinare la spatial resolution

Potremmo anche dire che resettiamo il condensatore ma dobbiamo anche dire quanto tempo teniamo il valore costante che è un casino (comunque non ci andrebbe bene).

A dire il vero nel caso del Mobile mean LPF per noi non sarebbe stato un problema visto che la durata spaziale da noi settata fra Tp comunque sarà al limite

E se filtrassimo con un LPF-RC, allora il segnale d'uscita sarebbe



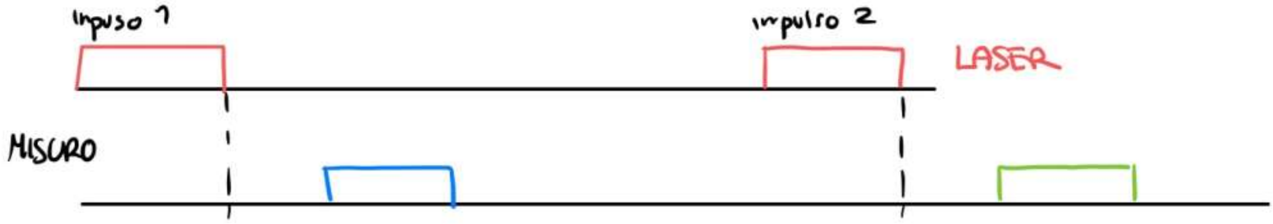
Noi vogliamo τ bassa per ridurre il rumore ma non troppo bassa perchè vogliamo che il segnale non "si espanda" troppo.

Con un RC-LPF e $\tau = 10ns$ otteniamo $d_{max} = 5{,}2Km$

Con un Mobile mean LPF tollerando i $2T_g$ di espansione $d_{max} = 6{,}1Km$

Un altro modo di aumentare la distanza massima è quello di usare impulsi multipli e in questo caso l'SNR aumenta con la radice quadrata del numero di impulsi.

Tuttavia dobbiamo stare attenti al fatto che l'impulso che andiamo a misurare sia sempre quello che ritorna dalla prima faulty Joint e non dalla seconda



come faccio a sapere che questa è la riflessione della 1ª faulty giunt o non è la riflessione di un'altra faulty giunt ancora relativa all'impulso 1?

Devo assicurare che il periodo del laser sia minore del tempo di travel dell'impulso laser andata e ritorno, dunque mettere un limite sulla distanza massima dove la faulty Joint può essere.

$$T_{LASER} \leq T_{TRAVEL}$$

quindi avrò una frequenza del laser limitata $f_{MAX\,LASER}$.
Più grande è il periodo del laser maggiore sarà la durata della misurazione.

> Esempio. Per avere $d_{max} = 8Km$ ho bisogno di un numero di campioni pari a $N_{SAMPLE} = 1600$, questo perchè

$$d_{MAX} = \frac{10}{2\alpha} \log \frac{P_L \cdot R}{P_{MIN}/\beta} \qquad \text{dove } \beta = \sqrt{N_{SAMPLES}}$$

(NON SO DA DOVE HA PRESO LA FORMULA)

8Km è la massima lunghezza della fibra non dove c'è il primo Joint (?)

in questo caso la massima frequenza è 12,5 KHz che corrisponde in un tempo per singola misura di 128mS.
La frequenza la ricavo considerando il tempo di andata e ritorno di 8Km della luce.

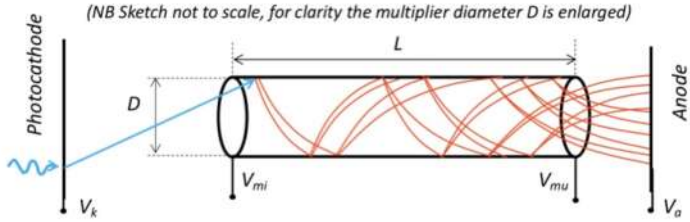
Non possiamo avere + frequenza perchè altrimenti si sovrappongono gli impulsi, in questo ultimo punto la soluzione migliore era quella usando + impulsi ma dovevo prima scegliere qual è la d_max che vogliamo.

18.05.2021 lezione 2h

Progress in PMT

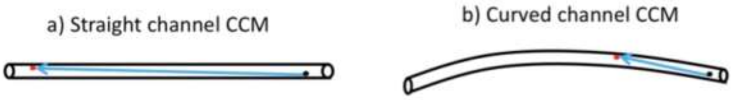
Produrre i PMT è molto difficile devono essere fatti a mano.
La soluzione è creare un PMT con un tubo con un dynode continuo, così ho il vantaggio che non devo allineare nulla.

(NB Sketch not to scale, for clarity the multiplier diameter D is enlarged)



il tubo è esso stesso il voltage divider (tipo resistenza a filo)

è molto facile da produrre ma ha anche dei lati negativi.



In order to exploit CCMs it is necessary to neutralize the effect of Ion Feedback.

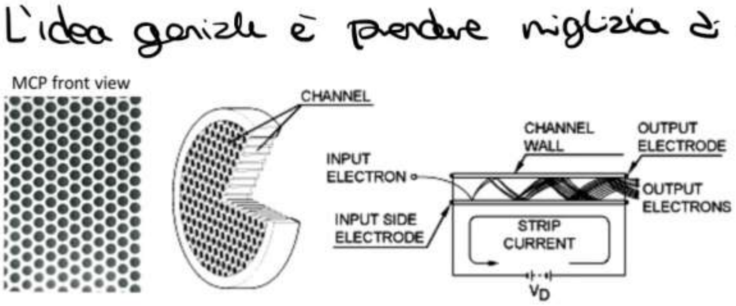
- In the last part of the channel the density of energetic electrons is high and creation of free heavy ions (ionized atoms) by collision with residual gas molecules (or with the wall material) becomes probable.
- The free ions drift in the field and by impacting on the wall cause a strong emission of electrons. If the impact occurs near the channel input the emitted electrons undergo all the channel multiplication.
- This is a positive feedback effect, which enhances the current amplification in uncontrolled way and may even cause a self-sustaining breakdown current in the multiplier.
- The effect is avoided by bending the axis of the multiplier tube. Due to the large mass and small charge, a free ion has small acceleration in the electric field and its trajectory is almost straight; the ions thus impact in the last part of the channel, hence the emitted electrons undergo undergo a much lower amplification

Quando abbiamo molti elettroni ad alta energia possiamo creare uno ione, il problema dello ione è che ha carica opposta e quindi può muoversi indietro per molto tempo e questo crea un feedback che non ci va bene per il rumore.
Questo non accade nei PMT normali perchè sbattono sul primo dynode e quindi non viaggiano molto.

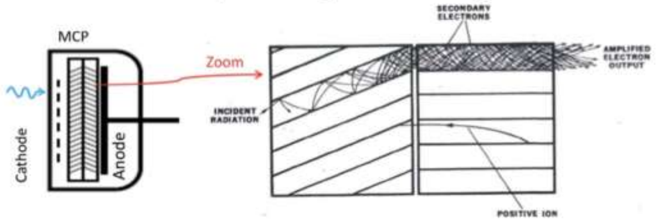
Un modo per risolvere questo è curvare il tubo così che lo ione non viaggi molto all'indietro.

Un altra soluzione è usare meno luce in input, così risolviamo anche lo space charge effect.
il problema di questo è che possiamo avere dei picchi di luce ad altissima energia per pochissimo tempo e questo può saturare questo sensore e mandarlo in non lineare.

L'idea geniale è prendere migliaia di questi tubi e metterli insieme, abbiamo sempre il problema degli ioni ma non più quello di limitare la luce, perchè abbiamo migliaia di tubi e quindi possiamo dividere la luce su ognuno di questi tubi che devono avere poca luce d'ingresso.



Inoltre grazie a questa struttura non devo nemmeno focalizzare la luce.
Un problema di questa struttura sono gli ioni perché non posso piegare migliaia di tubi. Nella realtà però posso tagliare i tubi e collegarli a diversi angoli.



Most of the limitations that plague CCMs are relaxed for MCPs with illumination distributed on the cathode because:

a) Electrons emitted from the same position of the cathode do not enter all in the same microchannel; they are distributed over a group of facing channels in the MCP.
b) The perturbation of the voltage distribution in a channel affects the multiplication and collection of electrons just in that channel and closest neighbors, not farther.

It follows that:

1) the limit to the output mean signal current is much higher; it is a small percentage of the **total** bias current of the MCP, not of a single microchannel
2) also many-photon optical pulses are correctly linearly processed, since the pulse photoelectrons are multiplied in parallel in different microchannels

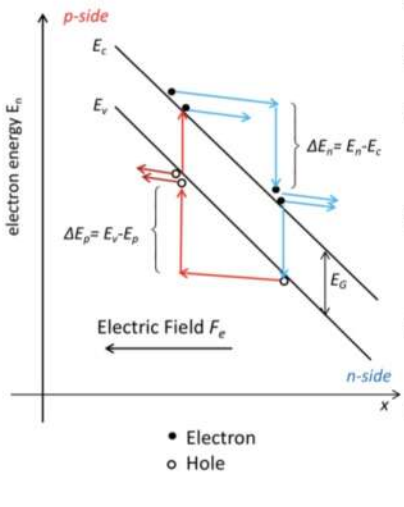
- The statistical gain distribution of MCPs is similar to CCMs, significantly wider than for dynode-PMTs, with excess noise factor significantly higher F>2
- The dynamic response of MCPs is remarkably superior to that of dynode PMTs. The transit time T_b and its jitter T_j are remarkably shorter; in fast MCP types they are reduced down to $T_b \approx 1$ns and $T_j \approx$ a few 10ps. Also the SER pulse-width T_w is shorter, down to $T_w \approx$ a few 100ps.

Timing gitter 100ps, non è per niente male

Visto questo tempo perché non li usiamo ovunque? quali sono i lati negativi di questo sensore?
Fragile visto che è fatto di vetro e servono comunque altissime tensioni

i problemi di tutti i PMT sono la detection efficiency, il fatto che sono fragili, costosi e richiedono molta tensione. Per risolvere questo si possono usare i Photodiodi

Avalanche Photodiode



- A free electron drifting in the field gains kinetic energy $\Delta E_n = En - Ec$
- Part of ΔE_n is transferred to lattice vibrations by scattering events
- Because of energy and momentum conservation, a ionizing collision can occur only when

$$\Delta E_n > 1{,}5 E_G$$

- Until reaching such ΔE_n the carrier travels without ionizing. The carrier multiplication thus has a dead-space; it is a **discontinuous statistical** process
- There is inherently a **positive feedback** loop in the process, because also holes can ionize by impact
- a cascade of ionizing collisions produces **avalanche multiplication** of carriers

Se abbiamo abbastanza energia un elettrone o lacuna può creare ancora una coppia elettrone lacuna, così facendo possiamo creare una valanga di elettroni lacune.

Perché parliamo di valanga e non moltiplicazione nel fotodiodo?
Perché le lacune creano lacune mentre gli elettroni creano sì elettroni ma anche lacune, perciò ho un feedback positivo, che anche nel caso sopra crea più rumore (?)

La cosa difficile di questi sensori è che l'elettrone ci mette un po' di tempo prima di prendere abbastanza energia per far partire l'altro elettrone, la cosa difficile è quel tempo.

Noi useremo un approssimazione, continuous model, e con questo modello possiamo creare due variabili α e β che dicono la probabilità di creare un elettrone o lacuna nello spazio Δx. Cioè ho un elettrone che viaggia nello spazio qual'è la probabilità che nello spazio Δx questo crei un elettrone dovuto a un impatto? Questo dipende da α.

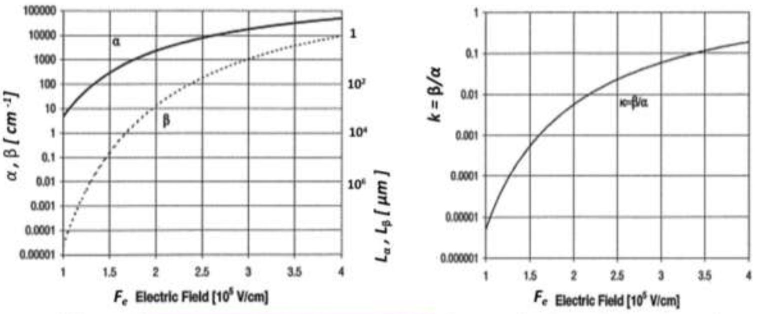
- The carrier multiplication can be analyzed with a **continuous statistical model**, based on the **average in space of the true discontinuous random process**.
- The continuous model provides a good approximation if the width of the multiplication region (high-field region) is definitely larger than the mean path between ionizing collisions. **The model is inadequate if the high-field region is very thin**, i.e. for width smaller than or comparable to the mean path between collisions.
- The model considers the probability of ionizing impact of a carrier as continuously distributed in space (i.e. it considers the average of many trials of carrier multiplication started by a primary charge).
- The **ionizing coefficients α for electrons and β for holes** are defined as the probability density of ionization in the carrier path; that is, for a carrier traveling over *dx* the probability of producing impact-ionization in *dx* is

  $\alpha\, dx$ for electrons and $\beta\, dx$ for holes
- The mean path between ionizing collisions thus is

  $L_\alpha = 1/\alpha$ for electrons and $L_\beta = 1/\beta$ for holes
- **The features of the multiplication process strongly depend on the relative intensity of the positive feedback, hence on the value of $k = \beta/\alpha$**, which is different in different materials: k<<1 in Silicon, k>1 in Ge and k≈1 in GaAs and other III-V materials

Una cosa importante è il rapporto β/α, il problema però è che i valori di β e α e il rapporto dipendono dal campo elettrico, ma il campo elettrico varia all'interno del fotodiodo

Inoltre α e β cambiano anche in base alla temperatura.



- α and β **rapidly increase with the electric field F_e**. They can be described with good approximation by $\alpha = \alpha_o \exp(-F_{no}/F_e)$ and $\beta = \beta_o \exp(-F_{po}/F_e)$

  In Silicon $\alpha_o = 3{,}8\ 10^6\ cm^{-1}$, $F_{no} = 1{,}75\ 10^6$ V/cm; $\beta_o = 2{,}25\ 10^7\ cm^{-1}$, $F_{po} = 3{,}26\ 10^6$ V/cm
- k is ≈ 0,1 at high electric field F_e and as F_e decreases k strongly decreases (because the dynamics of valence-band holes and conduction-band electrons are different)
- α and β **markedly decrease as temperature increases** (because stronger lattice vibrations drain more energy from carriers in the path between ionizing collisions)

Semplifichiamo il modello supponendo il campo elettrico costante con tutto costante (tensione di alimentazione temperatura ecc) e luce solo da un lato.

In questo caso possiamo calcolare la corrente data dagli elettroni e delle lacune

Non vale sempre

In the simplest case $\alpha = \beta$ (e.g. in GaAs) the equation is simply and we obtain:

Vogliamo calcolare il guadagno di corrente, cioè il guadagno tra corrente d'ingresso e quella d'uscita

$$\boxed{j_m = \frac{j_i}{1 - \int_0^w \alpha(x)\,dx} = \frac{j_i}{1 - I_i}}$$

Dovrebbe essere la corrente d'uscita

$I_i = \int_0^w \alpha(x)\,dx$ is called **ionization integral** and has a clear physical meaning:

Ii è la probabilità che io abbia ionizzazione tra 0 e w dove w è la dimensione del photodetector

it is the probability for a carrier to have an ionizing collision in the path from x=0 to x=w

The current j_m is the primary current j_i amplified by the **multiplication factor M**

$$\boxed{M = \frac{j_m}{j_i} = \frac{1}{1 - I_i}}$$

è il guadagno ingresso uscita solo se α=β

Sappiamo che α=β è molto raro, ma a noi la formula piace, allora

In cases with $\alpha \neq \beta$ the equation can still be integrated and the results can still be written in the form

Allora anche in questo caso α≠β usiamo la stessa formula ma al posto di α usiamo αe chiamato alfa efficiente.

$$j_m = \frac{j_i}{1 - I_i} \qquad \boxed{M = \frac{j_m}{j_i} = \frac{1}{1 - I_i}}$$

but the ionization integral I_i is now the integral of an effective ionization coefficient α_e

$$\alpha_e = \alpha \exp\left[-\int_0^w (\alpha - \beta)\, d\xi\right]$$

so that in this case

$$I_i = \int_0^w \alpha_e(x)\,dx = \int_0^w \alpha \exp\left[-\int_0^w (\alpha - \beta)\, d\xi\right] dx$$

$$j_m = \frac{j_i}{1 - I_i} \qquad \boxed{M = \frac{j_m}{j_i} = \frac{1}{1 - I_i}}$$

Notiamo che il guadagno dipende da I_i che dipende dalle dimensioni w del sensore

Notiamo anche che $I_i = \int_0^w \alpha \, dx$ che è l'integrale della probabilità, allora può andare a 1, se ho 1 $J_m = \infty$. Chiamiamo tensione di breakdown la tensione che aumenta α tale che $I_i = 1$ e quindi che la corrente d'uscita sia ∞.

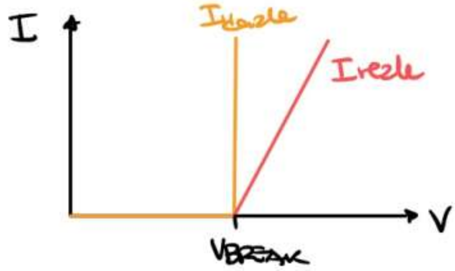
- The ionization integral I_i in any case **strongly** depends on the **applied bias voltage** V_a and on the **temperature T**
- I_i is nil until the field F_e produced by V_a attains level sufficient for impact ionization
- Computations and experiments show that the **rise of M gets steeper as the high-field zone gets wider**. This is quite intuitive, since a wider zone corresponds to a higher number of collisions, which enhances the effect of the increased impact ionization probability due to an increase of the electric field

Notiamo anche che la breakdown voltage cambia con la temperatura

Avalanche Breakdown

- When the applied bias voltage V_a reaches a characteristic value V_B, the Ionization Integral $I_i \rightarrow 1$ and, according to the equation, $M \rightarrow \infty$ and $j_m \rightarrow \infty$
- V_B **is called Breakdown Voltage**; it is a characteristic feature of the diode, ruled by the distribution of the electric field F_e and by the dependance of α and β on the electric field F_e and on the temperature T
- V_B increases with the **temperature** T. The increase is different in devices with different field profiles. It is anyway **strong**, some 0,1% per K degree. For Si it is about $\approx 30\ mV/K$ in devices with $V_B = 30\ V$ and $\approx 900\ mV/K$ in devices with $V_B = 300\ V$.

Nel mondo reale al breakdown non abbiamo corrente infinita ma grazie alla space charge effect abbiamo che (effetto che si contrappone ai campi elettrici?) Allora abbiamo un sistema del tipo



Alla fine è come una resistenza

Abbiamo detto che il guadagno dipende dalla tensione di bias, ma come?

A photodiode biased at V_a **below the breakdown voltage** V_B **but close to it** provides **linear amplification** of the current by exploiting the avalanche carrier multiplication.

Such photodiodes with internal gain are called **Avalanche PhotoDiodes (APD);** they bear some similarity to PhotoMultiplier Tubes (PMT), but have remarkably different features

- The amplification gain is the multiplication factor M, which can be adjusted by adjusting the bias voltage V_a with respect to V_B
- Since V_B strongly depends on the diode temperature T, variations of T have effect equivalent to significant variations of the bias V_a. Therefore, for having a **stable gain M, the temperature of the APD must be stabilized**.
- The actual dependance of M on V_a can be fitted fairly well by an **empirical** equation

$$M = \frac{1}{1 - (V_a / V_B)^u}$$

Ci serve Vbias molto stabile

-

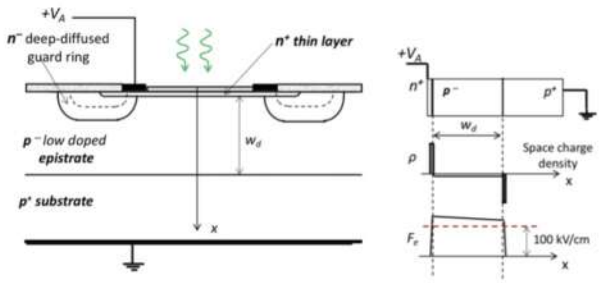
with exponent $\boldsymbol{u}$ that depends on the field profile (and on the type of semiconductor); it varies from 3 to 6, with higher values corresponding to wider high-field zone.

Se proviamo a fare questo sensore con una giunzione PIN non viene

Evolution of the APD device structure

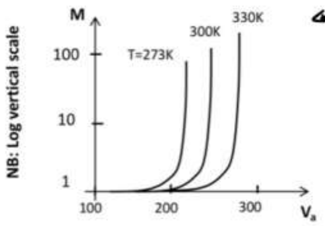
non ho capito perché (ma c'entra il campo magnetico)

Early attempts to develop APDs exploited **PIN structures modified** for operating at higher electric field (typically F_e > *100 kV/cm*): more efficient guard-ring for avoiding edge breakdown; higher uniformity in material processing over the sensitive area; etc. The PIN structure, however, turned out to be unsuitable for APD devices.



PIN structure: unsuitable for APD devices

1. Even perfect p-i-n devices would have features not well suitable for operating as APD
2. Moreover, real p-i-n devices have unavoidable small local defects that rule out any prospect as APD.



Andamento del guadagno al variare della temperatura e dell'alimentazione.

Notiamo che parliamo di tensioni dell'ordine di 100/200/300 volt.

- Even a perfect p-i-n diode would have multiplication factor M very steeply rising with the bias voltage V_a, because the depletion layer is wide (for obtaining high detection efficiency) and the high electric field zone covers it almost completely. **It would be extremely difficult to obtain a stable and accurately controlled gain M.**

il problema gigante è il valore del guadagno, abbiamo solo 10/100 di guadagno quando con il PMT arriviamo 10^5.

The evolution of the device design from PIN to Reach-Through APD structure was then driven by the insight gained in the PIN-APD failure.

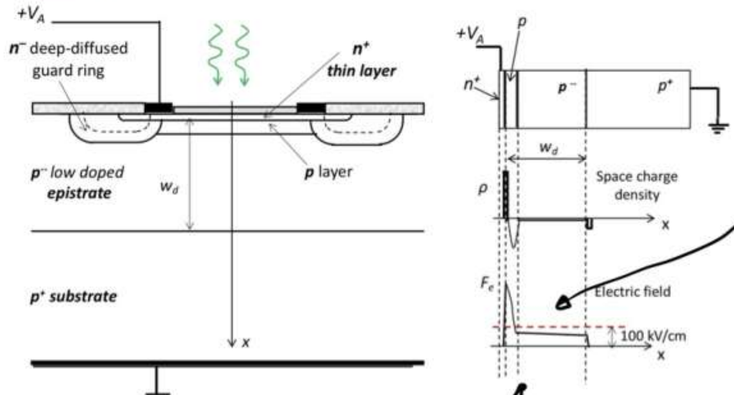
Faccio una struttura diversa

Reach-Through Si-APD devices (RAPD)

Metto un'altra zona drogata p sotto la n.

Basic idea: to improve the structure by inserting a **thin layer with high electric field F_e** (where carriers undergo avalanche multiplication) beside a wide **depletion layer with** moderate F_e (where carriers just drift at saturated velocity)

In questo modo ho un campo elettrico molto alto solo in quella zona



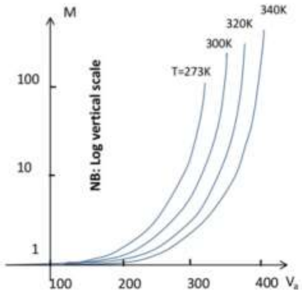
il campo magnetico della zona piatta noi lo vogliamo basso visto che dipende dalla VBIAS ma non troppo basso perché gli elettroni vengono assorbiti per tutta la lunghezza del sistema (Non ho capito)

Noi metteremo un campo elettrico che da la velocità limite degli elettroni oltre non ha senso

il picco di campo elettrico serve per qualcosa che non ho capito tipo per il calcolo di Fi?

Reach-Through Si-APD devices (RAPD)

- The total depletion layer width of Si RAPDs in most cases is from 10 to 30μm, in order to obtain high detection efficiency up to 800-900nm wavelength (NIR edge)
- The width of the multiplication region (where F exceeds the ionization threshold) is much thinner, from 1 to a few μm
- Moderately steep rise of M with the bias voltage is obtained; the RAPD gain can thus be reliably controlled.
- The dependance of M on the device temperature is still remarkable and must be taken into account



Il grafico dell'andamento del guadagno è questo.
Notiamo che dipende ancora molto dalla temperatura, nonostante ciò M può arrivare a 1000.

Anche qui come nel caso del PMT abbiamo la excess noise factor perché anche qui la probabilità di creare elettroni è un processo statistico

The highest M obtained with Si-APDs is much lower than the gain level currently provided by PMTs. In the best cases M values up to about 500 are obtained; attaining M=1000 is out of the question

Nel caso dell'avalanche diode abbiamo però che la probabilità di creare elettroni è molto più bassa e quindi ho più rumore che nel caso del PMT, inoltre nel PMT ho solo una direzione mentre qui ho anche il feedback.

L'excess noise nell'avalanche photodiode è:

In Silicon with electric field intensity just above the ionization threshold, the situation is very favorable since the *F* degradation due to the positive feedback is negligible.

- The ratio of ionization coefficients is very small $k = \beta/\alpha < 0{,}01$
  → probability of impact ionization by holes much lower than that of electrons.
- the mean number μ of secondary electrons generated by the impact of an electron is **small** $\mu << 1$

The process can be analyzed as a cascade of electron impacts. By employing the Laplace probability generating function and numbering in sequence the impacts we get

$$\boxed{F = 1 + v_M^2 = 1 + \frac{1}{1+\mu} \approx 2}$$

≃ 2 nel PMT era ≃ 1, inoltre nel caso dell'avalanche photodiode ho un guadagno molto minore che nel PMT.

***F=2* is the lowest possible *F* for Si-APDs and is achieved at low gain level. The conclusion is confirmed by experiments on carefully designed APD devices operating at *M<50*.**

For comparison, recall that ordinary PMTs routinely offer F < 2 at very high gain $M>10^5$.

- **In Silicon the *k* factor markedly increases as the field is increased**. Therefore, *F* markedly increases as the bias voltage of the APD is raised for increasing the gain.

$K = \beta/\alpha$

A thorough mathematical treatment of the avalanche multiplication is quite complicated and beyond the scope of this course. We will just comment some results of treatments reported in the technical literature.

With some simplifying assumptions (uniform electric field; constant k value), it has been shown that the excess noise factor *F* **with primary current of electrons** is

$$F \approx M\left[1-(1-k)(1-1/M)^2\right]$$

- In cases with negligible positive feedback k=0, the equation confirms the result of the approximate analysis

$$F = 2 - 1/M \approx 2 \quad \text{(since } M>>1\text{)}$$

- In cases with full positive feedback (i.e. equally efficient carriers, as in GaAs and other III-V semiconductors) it is k≈1 and *F* increases as M

$$F \approx M$$

nel caso di indio gallio arsenide avremo $\alpha = \beta$ e quindi $K=1$

- In cases with intermediate feedback level it is 0<k<1 and the equation specifies how F increases with M with rate of rise that increases with k. For instance:

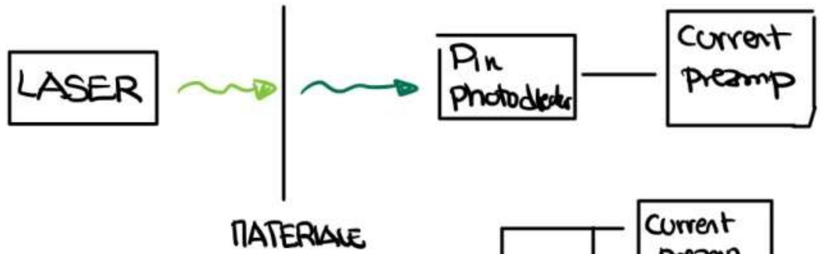
  with k=0,01 at M=100 we get F≈3
  with k=0,1 at M=100 we get F≈12

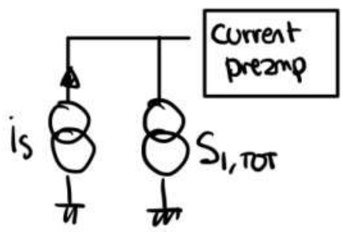
The optical transparency of materials at 800nm is to be measured and a laser diode with emitted power P=1mW is used. The laser can be used in continuous wave operation mode (i.e. continuous light is emitted) or with 10% of its optical power sinusoidally modulated at 1MHz (by using a sinusoidal current to drive the diode). A silicon p-i-n photodiode (depleted junction thickness 30um; surface reflectivity coefficient R=0.2) is used. The photodetector is connected to a current preamplifier featuring a wide bandwidth (limited by a single pole at f_{PA}=100MHz) and input-referred current noise with wideband unilateral spectral density $S_i=(1pA)^2/Hz$ and 1/f noise component with f_C=100Hz. Discuss the guidelines and describe two approaches to be used in the two possible cases. Select a filtering scheme for each case and evaluate quantitatively:

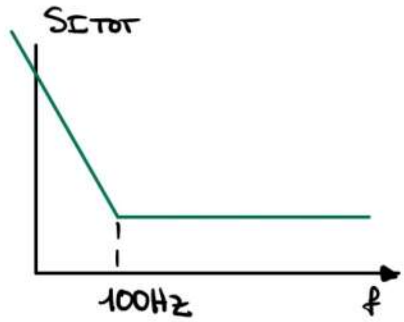
a) The sensitivity that can be obtained, i.e. the minimum optical power that can be measured.
b) The minimum value of the optical coefficient that can be measured.

$P = 1mW \rightarrow \begin{cases} 1) \text{ Modalità continua} \\ 2) \text{ sin modulation (con questa abbiamo solo il 10\% della potenza @ 1MHz)} \end{cases}$

Fotodiodo $\begin{cases} t_D = 30\mu m \\ R = 0{,}2 \end{cases}$



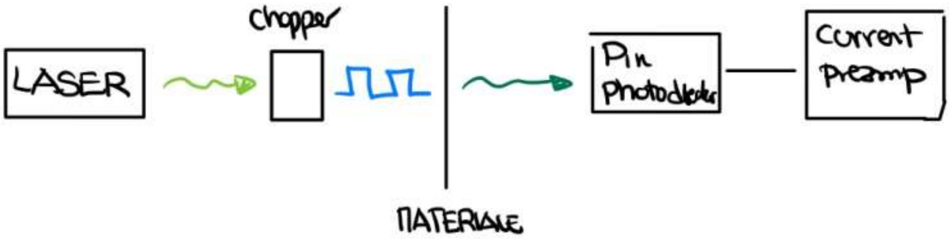




Ho 2 casi

- LASER IN Continua
  significa che abbiamo un segnale costante al photodiode.
  In questo caso però abbiamo un segnale DC che si sovrappone al rumore 1/f e visto che 1/f va a infinito è un casino.
  Dobbiamo usare un segnale che si comporti in modo differente tra segnale e rumore. Possiamo usare un correlated double filtering?
  Spegnere il laser non è una soluzione perché ci mette un botto ad accendersi allora possiamo bloccare fisicamente il segnale del laser
  Posso allora bloccare il segnale fare uno zero setting molto lungo e togliere poi il blocco al laser.
  Ma c'è un modo migliore, con il quale possiamo usare un CDF, usando il chopper

Solo che dipende dalla distanza tra misura iniziale e misura reale (e non so la distanza)



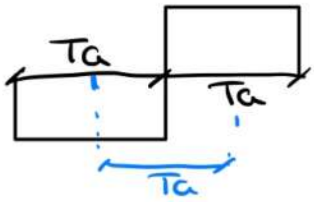
Posso usare il CDF perché ogni intervallo con il quale ho luce è preceduto da uno senza luce.
Ma come li dimensiono?

SEGNALE

Dobbiamo decidere frequenza e Dutycycle

> Nel caso facessimo il CDF:

- Short Δt tra le 2 finestre d'integrazione per ridurre al minimo il rumore 1/f



Con 2 finestre d'integrazioni uguali e attaccate abbiamo $\Delta t = T_a$.

Lato negativo doppiamo il rumore bianco

Se volessimo ridurre il rumore bianco ma aumentare quello 1/f allunghiamo la finestra d'integrazione sulla base

Visto che siamo noi a decidere la frequenza decidiamo noi il Ta e quindi possiamo scegliere il filtro migliore per il rumore 1/f

Noi sappiamo che il rumore di 1/f di due finestre adiacenti è calcolabile come

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{2{,}1 \cdot S_I \cdot f_c \cdot \ln(3)} = 15{,}2\,pA$$

← Deriva della formula incasinata con la funzione peso ecc.. vedere tutorial prima

Notiamo che $\sigma_{1/f}$ non dipende da Ta, vediamo che il rumore bianco dipende da Ta e potremmo regolare Ta in modo che sia trascurabile rispetto al rumore 1/f

$$\sigma_W = \sqrt{2 \cdot S_I \cdot \frac{1}{2T_a}}$$

il 2 perché le 2 finestre d'integrazione sono incorrelate e quindi è come se prendessi 2 volte il rumore.

Se voglio $\sigma_W < 10 \cdot \sigma_{1/f}$ per renderlo trascurabile (10 numero a caso) allora

$$T_a = 43mS$$

Qual'è quindi la minima potenza misurabile?

$\sigma_i = \sigma_{1/f} = 15{,}2\,pA$ ⟶ Allora la corrente minima che possiamo misurare alla fine del photodiodo è 15,2pA

Questa corrente sul detector corrisponde ad una potenza sul detector pari a

$$P_{MIN,det} = \frac{I_{SMIN}}{S_{DMIN}}$$ ← radiant sensitivity (dobbiamo calcolarla

Sappiamo che

L'absorption lenght $L_a = 10\,\mu m$ @ 800nm

Dobbiamo decidere la grandezza della neutral region t_n, Decidiamo 200nm
(se avessimo voluto scegliere di leggere la luce blu allora avremmo dovuto avere t_n minore possibile)

Allora la detection efficiency

$$\eta = (1-R)\,e^{-\frac{t_n}{L_a}}\left(1-e^{-\frac{t_D}{L_a}}\right) = 0{,}76$$

perciò la potenza minima sul dispositivo

$$P_{MIN,disp} = \frac{I_{SMIN}}{\eta \cdot \frac{\lambda}{1{,}24}} = 31\,pW$$

P_{in} ⇝ | ⇝ P_{OUT}
T

$$T = \frac{P_{OUT}}{P_{IN}}$$

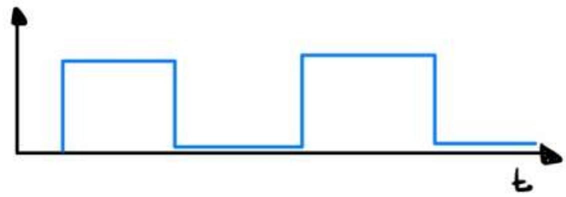
se T=1 è trasparente se T=0 blocca completamente la luce

ATTENZIONE!! in ingresso ho un onda quadra con duty cycle 50% ma la nostra funzione peso del segnale prende solo la parte on del segnale, allora $P_{IN} = P_{LASER}$, perchè quando è on la potenza del segnale è P_{LASER}

C'è un altro modo di fare avendo il laser sempre in continua?
LOCK-IN AMPLIFIER
Anche in questo caso è richiesto un chopper.

Con un lock-in amplifier miglioriamo il tutto perchè se scegliamo bene la modulated frequency non abbiamo più il rumore 1/f.

Se modiliamo il segnale sopra fc per evitare di avere rumore 1/f.
Ma questo è un segnale di luce possiamo solo avere luce on e luce off non luce negativa

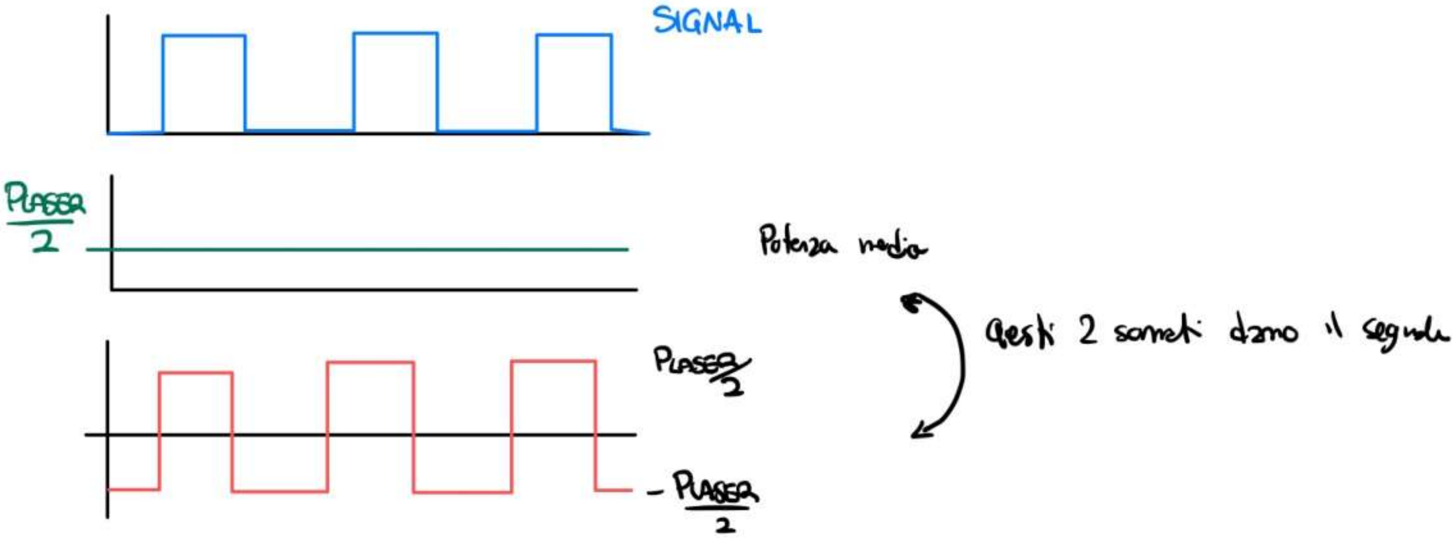


Questo segnale ha una componente DC
(+ corto il duty cycle + bassa la componente DC)
ma ci sarà sempre la componente DC.

Come demoduliamo questo segnale?

Per demodularlo dobbiamo avere un lock in amplifier con onda quadra ±1
(ci serve una demodulazione simmetrica per evitare la componente DC che cadrebbe sul rumore 1/f)

Perciò se considero un duty cycle del 50%



Scelgo $f_{MOD} \gg f_c$ per esempio $f_{MOD} = 1KHz$

Mi serve poi un LPF per il lock in, in questo caso non ho limiti di banda (sempre perciò allora scelgo $f_{LPF} = 10Hz$ (più basso è meglio perché riduce il rumore)

Nel caso del lock in abbiamo che il rumore di corrente è

$$\sigma_i = \sqrt{S_{i,u} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{LPF}} = 3{,}96pA$$

che corrisponde a $P_{MIN} = 9pW$

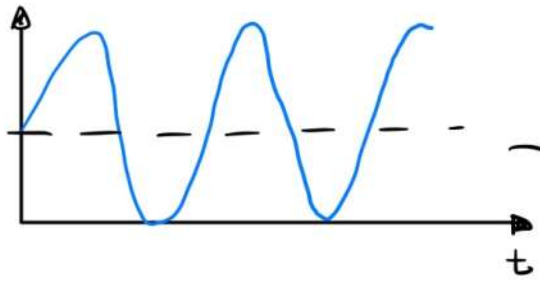
allora $T_{MIN} = \frac{P_{MIN}}{P_{LASER}/2} = 18 \cdot 10^{-9}$

Quindi la soluzione migliore è il lock in amplifier

b) laser con modulazione sinusoidale a frequenza 1MHz

- $f = 1MHz$
- $P = 0{,}1\, P_{LASER}$

Anche in questo caso il segnale è sempre > di Ø perché stiamo parlando di luce



Cosa significa che la potenza del segnale è il 10% di P_{LASER}?
Significa che la corrente in continua del segnale è il 10% della potenza

$P_{MOD} = 10\% \cdot P_{LASER}$

Visto che so che il valore medio è P_{MOD} allora il picco sarà $2P_{MOD}$ e il minimo a zero

Dobbiamo usare un lock-in, perché abbiamo che la corrente sinusoidale è a 1MHz ma la corrente continua è nel mezzo del rumore 1/f.

Anche in questo caso ci serve un LPF per il lock-in e anche in questo caso scelgo 10Hz di banda.

Allora

$$\sigma_i = \sqrt{2 \cdot S_i \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{LPF}} = 5{,}6\, pA$$

.1 2 perché lock in amplifier con demodulazione sinusoidale

Quindi $P_{MIN,det} = 12{,}7\, pW$

Perciò $T_{MW} = \frac{12{,}7\, pW}{P_{MOD}} = \frac{12{,}7\, pW}{P_{LASER}/10} = 127 \cdot 10^{-9}$

perché è la potenza media che inviamo.

Nel caso del lock in con onda quadra e laser continuo $T_{MIN} = 18 \cdot 10^{-9}$ che è + basso che quello sinusoidale.

Exam text of 08/02/2018 (Problem 2)

a) Define the radiant sensitivity of a photodetector and how it is possible to write it as a function of the wavelength. Calculate a reasonable value of this parameter at 500nm for a PIN photodiode and for a typical Phototube.

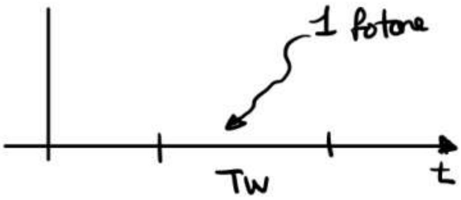
b) Define and explain the meaning of the NEP and Detectivity of a photodiode and a PMT

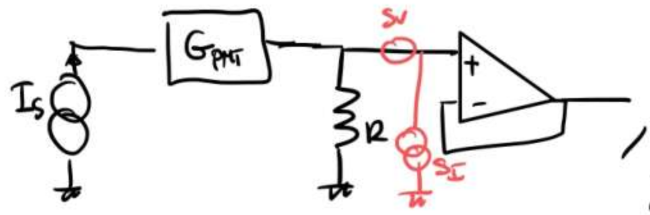
c) Considering a PMT, calculate the minimum value of the gain G in order to be able to detect single photons on a time window of 5ns.

d) Starting from the random sequence of independent elementary pulses, describe the current shot noise: noise mean, mean square and power and finally power spectrum.

Facciamo la domanda c)

Abbiamo una finestra di tempo di 5ns e vogliamo calcolare il valore del gain per poterlo fare.





Possiamo anche usare il transimpedance amplifier

ho che il fotone va sul mio PMT e questo crea una corrente che va nel guadagno del PMT che poi misurerò l'uscita con dell'elettronica. è importante dire che abbiamo dell'elettronica perché questa crea rumore.

Noi sappiamo che il rumore della resistenza in corrente è $4kT/R$ e sappiamo che questo rumore di corrente si confronta direttamente con la corrente del PMT.
Perciò noi vorremo R alta per avere rumore basso.
Noi però facciamo il caso estremo

$$R = 50\,\Omega \qquad \sqrt{S_V} = 10\,nV/\sqrt{Hz} \qquad \sqrt{S_I} = 2\,pA/\sqrt{Hz}$$

(Valori scelti a caso MA REALISTICI)

Noi osserviamo il segnale per 5ns (non di più perché sennò prendiamo solo rumore) quindi dopo il preamplificatore possiamo supporre un GI con durata 5ns.

$$SNR = \frac{I_S}{\sqrt{\left[\frac{S_{ITOT}}{G^2_{PMT}\cdot F} + 2q(I_S + I_D)\right]\frac{1}{2T_W}}}$$

Riferiamo tutto il rumore all'input

$$\sqrt{S_{ITOT}} = \sqrt{S_I + \frac{S_V}{R^2} + \frac{4kT}{R}}$$

Dato dall'elettronica

$$= 200\,pA/\sqrt{Hz}$$

è S_V/R^2 perché modellizziamo S_V come un rumore di corrente.

Per riferire questo rumore all'input devo dividere per G^2_{PMT} e per il fattore F del PMT

C'è anche la dark current

con un singolo fotone in Tw $I_S = \frac{q}{T_W}$

e il rumore associato $\sigma_{n,S} = \sqrt{2q I_S \cdot \frac{1}{2T_W}} = \frac{q}{T_W}$

è possibile avere un SNR = 1 ma dobbiamo avere che l'unica componente del rumore non trascurabile sia $\frac{2q I_S}{2T_W}$

Dobbiamo controllare che le altri componenti siano trascurabili

$$\left[\frac{S_{I,TOT}}{G^2_{PMT} \cdot F} + 2q(I_S + I_D)\right]\frac{1}{2T_W} \leftarrow \text{ricordiamo che questo è il rumore}$$

$$\sigma_{I,n} = \sqrt{2q I_D \cdot \frac{1}{2T_W}} \ll \frac{q}{T_W} \rightarrow \sqrt{2q \cdot \underbrace{\frac{q N_D}{T_W}}_{I_D} \cdot \frac{1}{2T_W}} \ll \frac{q}{T_W}$$

$\rightarrow N_D \ll 1$

$N_D = T_W \cdot n_D$ e noi sappiamo che un numero ragionevole di n_D è 10^3 el/s e visto che vediamo un tempo piccolissimo T_W allora $N_D \ll 1$ è realistico

Serve anche che

$$\sigma_{i,e} = \sqrt{\frac{S_{I,TOT}}{G^2_{PMT}} \cdot \frac{1}{2T_W}} \ll \frac{q}{T_W} \longrightarrow G_{PMT} \gg 6{,}25 \cdot 10^4 \leftarrow \text{ragionevole}$$

21.05.2021 Lezione 3h

La detection efficiency del silicio sul blu è abbastanza bassa, allora dobbiamo usare indium Gallium arsenide.

Il problema è che con il silicio $M=100$ $F=2{,}5$
ma con l'indium Gallium arsenide $F \leq 10$ con $M=10$

F = excess noise

Nel caso del PMT $F=1$ e avevamo che il rumore era trascurabile rispetto al rumore del preamp. Ma in questo caso F non è più basso.

Possiamo leggere un fotone con l'APD?

APDs for Single-Photon Counting (SPC)?

APDs can detect smaller optical pulses than PIN diodes, thanks to the internal gain M.

However, the improvement of sensitivity is much lower than that brought by PMTs with respect to vacuum tube PDs. The reason is that in comparison to PMTs the APD gain M has

1. much lower mean value $\bar{M}$
2. much stronger statistical fluctuations, with relative variance that increases with $\bar{M}$

The **QUESTION** arises:

can we employ linear amplifying APDs instead of PMTs in single photon counting and timing techniques?

And the **ANSWER** is: **NO**!

More precisely, almost NO for silicon APDs and absolutely NO for APDs in other materials. In fact, we will now verify that only some special Si-APDs achieve single photon detection, although with marginal performance (detection efficiency lower than APD in analog detection; etc.), and other APD devices are out of the question.

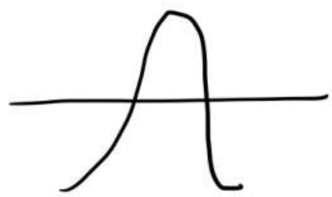
Timing techniques? Non sono interessato a vedere solo quanti fotoni ricevo ma sono + interessato al tempo di arrivo di questi

LA risposta è NO!!

Qual'è il significato di saper rilevare un singolo fotone?

- The APD output pulses due to a single primary carrier (single-photon pulses) are observed and processed accompanied by the noise of electronic circuitry, arising in the preamplifier and processed by the following circuits.
- A pulse comparator is employed to discriminate SP pulses from noise; pulses higher than the comparator threshold are accepted, lower pulses are discarded.
- The parameters of the set-up (rms noise; pulse amplitude; threshold level) should be ajusted to provide:
    1. Efficient **rejection of noise**, i.e. low probability of false detections due to the noise
    2. Efficient **detection of photon pulses**, i.e. high probability of detecting the SP pulses, which have variable amplitude with ample statistical fluctuations

ricordiamo la single electrode response. se arriva un elettrone avrò la single electrode response



metto una threshold per discriminare se ho o meno il segnale

il problema è che ho anche il rumore, perciò devo avere un comparatore per capire se ho o meno il segnale

- rejection of noise

Suppongo di avere il rumore senza segnale, in questo caso devo avere che la threshold deve essere maggiore del livello del rumore

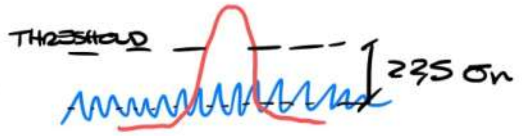
- detection of photons pulses

Vorrei essere in grado di leggere qualsiasi impulso dato dal singolo fotone

Io vorrei la threshold alta per avere rejection of noise ma la vorrei anche bassa per rilevare i photon pulses. Ho un tradeoff.
Se amplifico il segnale posso alzare la threshold e fine.

In generale per il tradeoff.

- With noise amplitude having gaussian distribution (most frequent case) with variance σ_n (rms value), the **noise rejection threshold level must be at least $N_{nr} \geq 2,5\, \sigma_n$**, in order to keep below <1% the probability of false detection



- We have seen that by employing an **optimum filter** for measuring the amplitude of detector pulses we get rms noise (in number of electrons)

Ma con questa threshold riusciamo a leggere il segnale? Quindi il segnale deve essere maggiore della threshold

$$\sigma_n = \frac{\sqrt{2C_L\sqrt{S_v}\sqrt{S_i}}}{e}$$

e =electron charge and typically:
$C_L \approx 0,1$ to 2pF load capacitance;
$\sqrt{S_v} \approx 2$ to 5nV Hz$^{-1/2}$ series noise;
$\sqrt{S_i} \approx 0,01$ to 0,1 pA Hz$^{-1/2}$ parallel noise

With high quality APD and preamp we get typically $\sigma_n \approx 40$ to 120 electrons.
The noise rejection threshold required then is

$$N_{nr} \geq 2,5\, \sigma_n \approx 100 \text{ to } 300 \text{ electrons.}$$

Se ho un guadagno maggiore di 100 o 300 allora supero la threshold e posso misurare il rumore.
Sembrerebbe quindi che con un APD possiamo rilevare il singolo fotone.
Scopriremo poi che ci servirà un guadagno molto maggiore di 100 o 300 quindi picche.

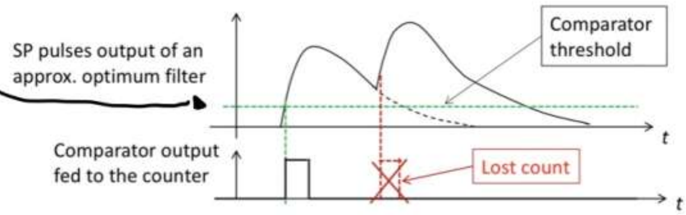
Furthermore, M just higher than N_{nr} is not sufficient for having SP pulses higher than the threshold: we will see that **M much higher than N_{nr} is necessary**.

- We know that the optimum filter (and of course also an approximate optimum) is a low-pass filter and the output pulse has a width (i.e. a reciprocal-bandwidth) of some noise corner time constant T_{nc}. Since in our case T_{nc} ranges from 10ns to a few 100ns, the output pulses are fairly long and this brings drawbacks.

Se abbiamo un segnale passato nel filtro ottimo ci viene un esponenziale decrescente circa, che ha durata pari alla τ del filtro.
Poi noi mettiamo la threshold

Count losses in Photon Counting

- In photon counting **the finite width of the SP pulse causes count losses.** When the time interval between two photons is shorter than the output pulse width, pulse pile-up occurs (i.e. the two pulses overlap), the comparator is triggered only once and one count is recorded instead of two



- Photons occur randomly in time, hence the probability of pulse pile-up increases when the pulse width is increased.
- In conclusion, the percentage of lost counts increases as the pulse-width is increased. The width of the SP pulses should be minimized, in order to achieve efficient photon-counting with minimal percentage of lost counts.

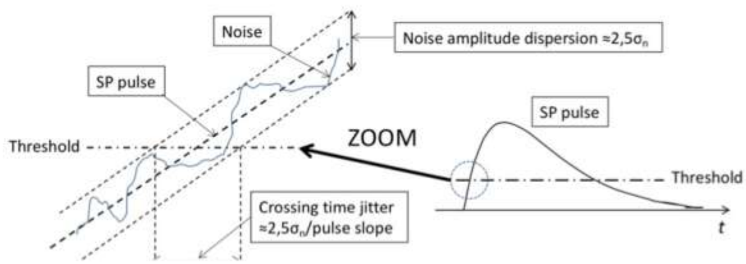
Notiamo che se abbiamo 2 fotoni vicini allora i 2 segnali si sovrappongono e quindi io non riesco a rilevare il secondo fotone che arriva (perché la somma dei 2 segnali non scende sotto la threshold).

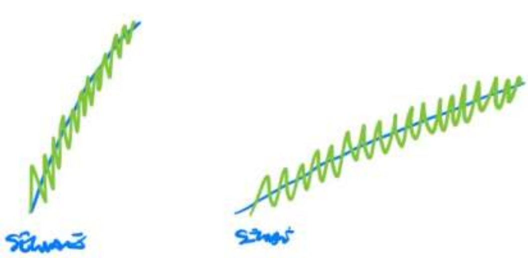
L'unico modo per "risolvere" questo è ridurre τ e quindi aumentare la banda del filtro ottimo ma se aumentiamo la banda del filtro sappiamo che collezioniamo più rumore che quindi è maggiore di 100 e 300).

Time-jitter in Photon Timing

- In photon timing, the arrival time of the pulse is marked by the crossing time of the threshold of a suitable circuit by the SP pulse.
- The noise causes **time jitter** (statistical dispersion) of the threshold crossing time
- A quantitative analysis is not reported here, but it is evident that the time jitter is proportional to the noise and **inversely proportional to the pulse rise slope**.
- A fairly **long T_{nc}** implies reduced pulse bandwidth and reduced slope of the pulse rise, hence **wide time jitter**.

Dobbiamo anche considerare che il segnale ha il rumore sovrapposto e quindi sulla threshold ho un rumore.
Notiamo che l'effetto di questo rumore sulla threshold dipende dalla pendenza del segnale, infatti se il segnale è molto pendente il jitter ha meno effetto





Dovremo avere che il segnale sia molto rapido

For reducing count-losses and time jitter, we must process the APD pulses with filter bandwidth wider than the optimum filter. However, this implies higher noise, hence higher threshold level and higher gain required to the APD.

Ma questo non è nemmeno tutto il problema

Efficiency in the detection of SP pulses

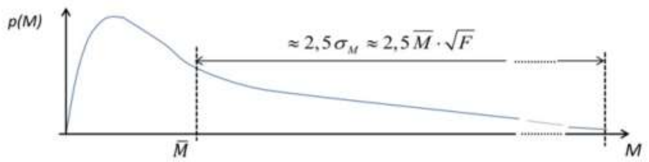
- If the APD gain M were constant for all SP pulses, it would be sufficient to have M just higher than the noise rejection threshold level N_{nr} , but this is not the case.
- The gain M has strong statistical fluctuations, hence a high excess noise factor F>>1, which is directly related to the relative variance of M

$$F = 1 + v_M^2 = 1 + \sigma_M^2 / \left(\overline{M}\right)^2$$

- The statistical M distribution thus has variance σ_M remarkably greater than the mean value $\overline{M}$

$$\sigma_M = \overline{M}\sqrt{F-1} \approx \overline{M} \cdot \sqrt{F}$$

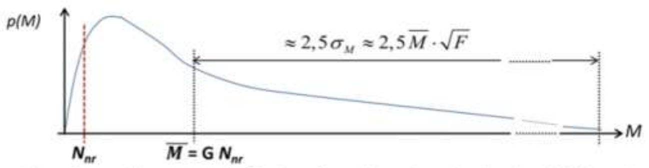
- This implies that M has a strongly asymmetrical statistical distribution, with most of its area below the mean value $\overline{M}$ and a long "tail" above it



La distribuzione del guadagno dell' APD è statistica ed ha forma simile a quella nel grafico.
La distribuzione ci dice quali sono le probabilità di avere quel guadagno.

Noi però avevamo fatto tutto il discorso di prima supponendo il guadagno medio, ma cosa succede se il guadagno è minore della media? Cosa che è molto probabile visto che la distribuzione non è simmetrica e l'area tra 0 e $\overline{M}$ è maggiore di quella tra $\overline{M}$ e ∞.

Efficiency in the detection of SP pulses



- Therefore, with a mean gain $\overline{M}$ just above the noise rejection threshold a major percentage of the SP pulses is rejected. This downgrades the photon detection efficiency, i.e. the basic performance of the detector.
- In order to limit the reduction of detection efficiency due to the threshold, the mean gain $\overline{M}$ should be higher than the noise rejection threshold N_{nr} by a factor G>>1
- In the most favorable case (special Si-APD with optimum filtering), the value of $\overline{M}$ necessary for attaining the noise rejection threshold N_{nr} is near to the maximum available APD gain, but there is still some margin. In other cases (regular Si-APDs with wideband electronics) there is no margin at all.
- **CONCLUSION:** photon counting with linear amplifying APDs is possible only with special Si-APDs and with photon detection efficiency strongly reduced with respect to that obtained with the same APDs by measuring the analog current signal.

Notiamo che matematicamente per avere che il discorso iniziale funzioni dobbiamo avere che Nnr sia molto minore del guadagno.
Ma Nnr è relativo alla varianza del rumore e non posso toccarlo.
Perciò per avere questa situazione devo avere un guadagno molto alto.

Sembrerebbe non esserci soluzione, Ma in realtà la soluzione c'è.

Avalanche diodes above VB

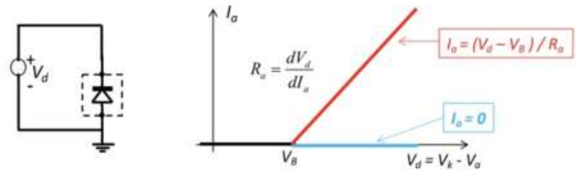
- We have seen that the positive feedback inherent in the avalanche multiplication of carriers causes strong limitations to the internal gain of APDs in linear operation mode, thus ruling out the possibility of employing them instead of PMTs in single photon counting and timing.
- However, the positive feedback makes possible a radically different operation mode of some avalanche diodes, which working in this mode at voltage **above** the Breakdown Voltage V_B, turn out to be valid single-photon detectors.
- It is called **Geiger-mode** operation
  - Single photon switches on avalanche: macroscopic current flows
  - It's a triggered-mode avalanche: detector with "BISTABLE inside"
  - Avalanche is quenched by pulling down diode voltage $V_d \approx V_B$ (or below)
  - Diode voltage is then reset above the breakdown
- Such avalanche diodes, operating above the breakdown voltage in Geiger mode, generate macroscopic pulses of diode voltage and current in response to single photons. They are therefore called **Single-Photon Avalanche Diodes (SPADs)**.

L'idea è quella di lavorare oltre la tensione di breakdown (fino ora lavoravamo di poco sotto).
Lavorare oltre la breakdown significa avere correnti e feedback positivo
L'idea è usare la geiger-mode operation
Questo si basa sul fatto che per avere la valanga dobbiamo avere un elettrone, ma se ci mettiamo la giunzione a una tensione di bias sopra la tensione di breakdown non abbiamo elettroni e quindi la

corrente è zero. Se riceviamo un fotone generiamo l'elettrone e abbiamo la valanga. il problema è che abbiamo poco tempo perché abbiamo anche la generazione termica di elettroni. Appena abbiamo la valanga abbiamo una corrente macroscopica che starebbe lì all'infinito, quindi noi dobbiamo abbassare la tensione sotto quella di breakdown per ammazzare la valanga. e poi rimettere la tensione sopra il breakdown per poter rilevare altri elettroni

(il fatto che se andiamo oltre il breakdown per un po' non abbiamo corrente è dovuto al fatto che alla giunzione in equilibrio non abbiamo nessuna corrente).

SPAD I-V characteristic above VB



The I-V characteristics shows a **bistable** behavior above breakdown $V_d > V_B$:

a) Without free carriers in the depletion region, $I_A = 0$ above breakdown
b) at $V_d > V_B$ a self-sustaining avalanche can be **started even by a single free carrier** entering in the high field region at $V_d > V_B$. In this case $I_A > 0$.

The higher the bias voltage above the breakdown, the higher the avalanche current. Therefore, the $\Delta V = V_d - V_B$ is a key parameter: it is called excess bias or **overvoltage**.

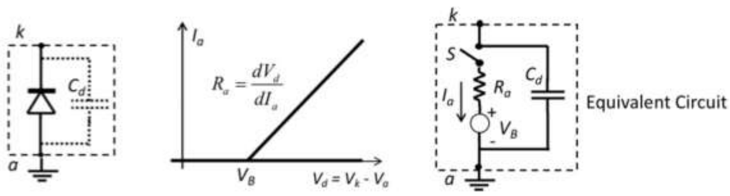
SPAD main properties

- In order to be able to operate in Geiger mode above the breakdown voltage, a diode should have uniform properties over the sensitive area: in particular, it must be free from defects causing local field concentration and lower breakdown voltage (the so-called microplasmas, due to metal precipitates, higher dopant concentration, etc.)
- Pulses are produced in SPADs also by the spontaneous thermal generation of single carriers in the diode junction and constitute a **dark count rate (DCR)** similar to that observed in PMTs. **Low DCR is a basic requirement** for an avalanche diode to be employed as SPAD.
- Various parameters characterizing the **detector performance strongly depend on the diode voltage**: probability of avalanche triggering, hence the photon detection efficiency; amplitude of the avalanche current pulse; dark count rate; delay and time-jitter of the electrical pulse with respect to the true arrival time of the photon; etc.
- **The breakdown voltage** depends on the structure of the device and on doping levels. V_B also strongly depends on junction **temperature**. At constant supply voltage V_d, the increase of V_B causes a decrease of excess bias voltage V_{ov}, impairing detector performance. Junction-temperature stability is very important.

Dobbiamo creare un modello del sensore

14

Equivalent Circuit of Diode above Breakdown

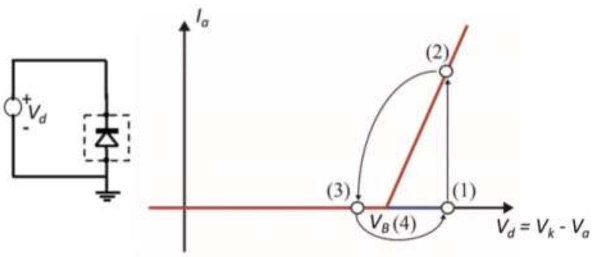


The equivalent circuit of the diode provides a quantitative understanding of the diode operation and confirms that the pulses observed correspond to single carriers generated in the device, spontaneously or by the absorption of single photons

- at $V_d > V_B$ the switch S can be closed or open; when it is closed, the avalanche current flows. At $V_d \leq V_B$ it is always open.
- **Closing the switch** is the equivalent of **triggering the avalanche** in the diode. Therefore, S is closed when a carrier injected or generated in the high field region succeeds in triggering the avalanche
- S then is open when the avalanche current is quenched (i.e. terminated) by the decrease of the diode voltage down to $V_d \approx V_B$

la corrente generata da elettroni per fotoni o generati termicamente sono uguali

Geiger mode operation



(1) Quiescent state: Bias voltage V_d above breakdown V_B (with excess bias V_{exc}) is applied and no current flows

(2) Avalanche current flowing: it is triggered by a photon or noise

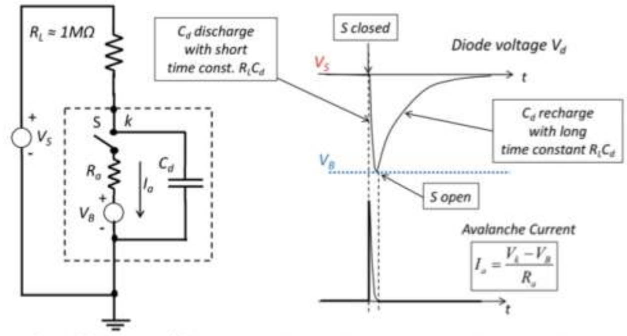
(3) Quenching: bias voltage V_d is lowered below the breakdown to stop the avalanche current flowing

(4) Reset: voltage across the junction is restored to the initial value

(capiamo quindi che gli elettroni generati termicamente sono la nostra dark current. Andando a lavorare sulla purezza dei materiali ad oggi riusciamo a stare circa 1s senza avere elettroni generati termicamente).

C'è anche la trigger probability nella realtà, cioè il fatto che un elettrone generato o da fotone non crei la valanga perché il feedback non è abbastanza alto

Passive Quenching Circuit



$R_a \approx 100\Omega$ to some kΩ
$C_d \approx$ 1 to a few pF
$T_a = R_a C_d \approx$ 100ps to few ns
$T_L = R_L C_d \approx$ 1 to some μs

When the diode voltage goes down to V_B the avalanche is no more self-sustaing. The avalanche is thus quenched by the action of R_L and the circuit is called **Passive Quenching Circuit (PQC)**

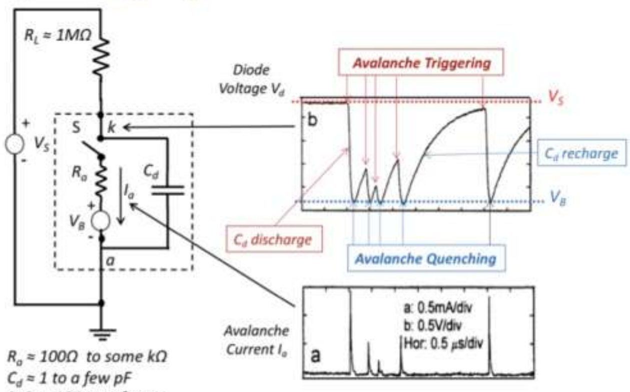
In pratica quando chiudo l'interruttore la capacità si scarica su Ra // RL quindi tutta su Ra e quindi la capacità si scarica velocemente. Scaricata la capacità lo switch si apre e quindi la capacità si carica tramite RL e quindi lentamente.

In pratica ho creato un circuito di quenching passivo (circuito per resettare il diodo)

Notiamo che c'è un problema, quando il condensatore è scaricato la tensione su K è data dal partitore quindi la tensione su K è data da VB (breakdown) + caduta su Ra (che essendo piccola è piccola) quindi su K abbiamo Vbreakdown + VRA che è maggiore di VBREAK e quindi come diamine si fa a chiudere lo switch. Funziona solo per la statistica, infatti RL deve essere grande tale che la corrente sia tanto piccola che faccia sì che per un bassissimo tempo statisticamente non passino elettroni, allora la valanga si blocca.

Se ho più fotoni in sequenza accade questo

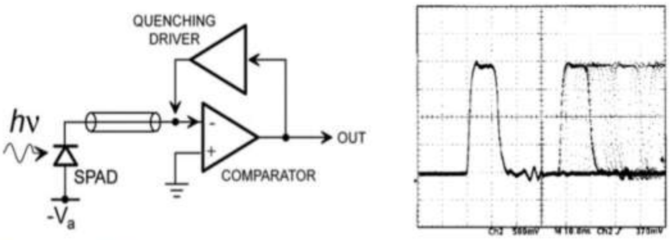
Passive Quenching Circuit with repeated triggering



$R_a \approx 100\Omega$ to some kΩ
$C_d \approx$ 1 to a few pF
$R_a C_d \approx$ 100ps to few ns
$R_L C_d \approx$ 1 to some μs

arrivano i fotoni che non ho ancora caricato del tutto Cd, quindi posso avere un effetto simile a quello del count loss. Perché la corrente può essere molto bassa che non viene rilevata.
La soluzione è un quenching circuit attivo che sente se c'è una valanga

Principle of Active Quenching Circuits (AQC)



Output Pulses

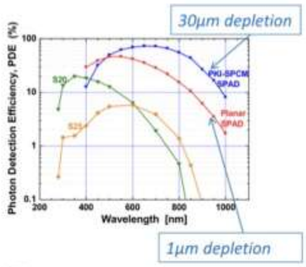
by providing

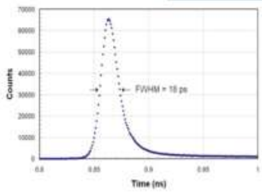
- short, well-defined deadtime
- high counting rate > 1 Mc/s
- good photon timing
- standard output

opened the way to SPAD applications

Semiconductor SPADs vs. PMTs

- **microelectronic advantages:**
  miniaturized, low voltage, etc.
- **improved performance:**
  higher Photon Detection Efficiency
  better photon timing
  comparable or lower noise





Challenges in SPAD development

Microelectronic Technology

- **Strict control** of transition metal contamination
  - ultra-clean fabrication process (defect concentration < 10^9 cm^{-3})
  - suitable gettering processes **compatible** with device structure

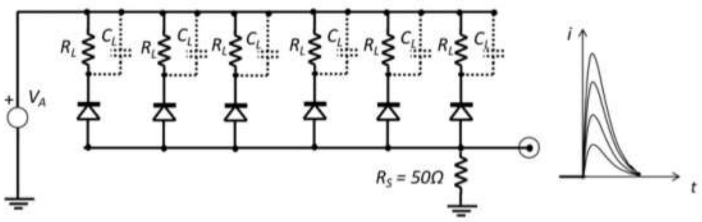
Device design

- **Electric field engineering**
  avoids BB tunneling and reduces field-enhanced generation, with impact on:
  → dark count rate
  → dark count decrease with temperature
  → photon detection efficiency
  → photon timing jitter

Front-end electronics

- **Low-level sensing of the avalanche current** → avoids or reduces trade-off between timing jitter and active area diameter
- **Application-specific** electronics

Silicon PhotoMultipliers (SiPM)



This detector is a SPAD array where

- each pixel has an individual integrated quenching resistance $R_L \approx 100k\Omega$.
- each pixel has a very small individual load capacitance $C_L \approx 100\ fF$
- All pixels have a common ground terminal, connected to a low resistance external load, typically $R_S = 50\Omega$. The pixel currents all flow in this terminal, they are added

The detector pixels are thus

a) individually triggered by incident photons,
b) individually quenched by the discharge of the pixel capacitance
c) individually reset by the recharge of C_L with short time constant $R_LC_L \approx 10ns$

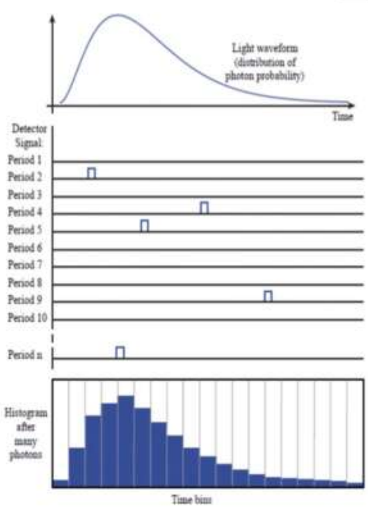
Mettiamo molti spad in parallelo, se faccio questo sistema integrato le capacità C_L sono molto piccole.
In questo modo abbiamo che la costante di tempo $R_LC_L \simeq 10ns$. Perciò non abbiamo count loss se ci arriva un elettrone ogni > 10ns.
La cosa bella è che visto che abbiamo SPAD in serie non arriveranno gli stessi elettroni a tutti e quindi non avrò tutti gli SPAD che si resettano allo stesso momento, così ho sempre copertura.

Time correlated single photon counting

Voglio misurare ad esempio la pendenza di un segnale che mi dice la probabilità di trovare il fotone con la fotoluminescenza. Non posso farlo xè il segnale è molto veloce.
Un modo per farlo è fare diverse misure e leggere ogni volta quando arriva l'elettrone

TCSPC working principle

- Use a periodical illumination with a pulsed laser
- Measure the time of arrival of each photon re-emitted by the sample
- Build a histogram of the photons time of arrivals
- Upon the collection of a statistically significant amount of events, the histogram corresponds to the waveform you would have obtained with a single "analog" measurement.
- The equivalent bandwidth is not limited by the Single Electron Response (SER)



Thermal sensor

Principle:

- Resistance R_S of metal conductors increases monotonically with temperature T
- calibration of resistance versus temperature $R_S(T)$ is accurate and stable
- By measuring resistance variation ΔR_S we get the temperature variation ΔT

Linear behavior of R_S(T) is a good approximation on wide T range for various metals

$R_S = R_0(1+\alpha\,\Delta T)$ T_0 = reference temperature; $R_0 = R_S(T_0)$;

$\Delta R_S = \alpha\,\Delta T\,R_0$ $\Delta T = T - T_0$; $\Delta R_S = R_S - R_0$

α is called **temperature coefficient of resistance**.

α is around $\approx 4\cdot 10^{-3}$ for metals currently employed in RTDs

Metal	α
Platinum Pt	$3{,}9\cdot 10^{-3}$
Copper Cu	$4{,}3\cdot 10^{-3}$
Tungsten W	$4{,}6\cdot 10^{-3}$
Nickel Ni	$6{,}8\cdot 10^{-3}$

è in pratica una resistenza che cambia il suo valore con la temperatura.

Abbiamo un comportamento lineare. figo!

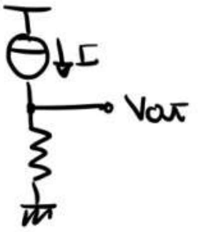
Ro = valore della resistenza ad una specifica temp.

Molto importante ricordare gli alfa (ordine di grandezza)

Tipicamente noi usiamo il platino, perché è molto lineare e chimicamente inerte e non subisce contaminazioni.

il "problema" di questi sensori è che vogliamo un ottima conduttività termica tra sensore e fonte di calore ma vogliamo ottima isolazione tra il calore e l'elettricità per non falsare la misurazione.
Un'altro problema è l'effetto piezoelettrico (quando diamo forza un metallo questo può cambiare valore di resistenza)

Il modo + facile di misurare la resistenza è



il problema è che noi dissipiamo potenza nella resistenza e quindi l'autoscaldiamo. e quindi cambiamo la temperatura.

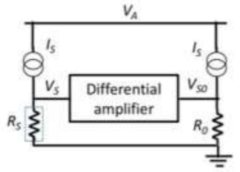
L'unica cosa che possiamo fare qui è limitare la potenza dissipata

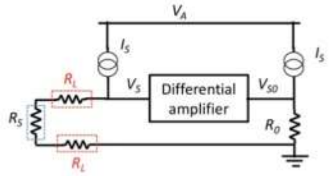
Possiamo anche usare questa tecnica

in questo modo possiamo mettere una tensione come vogliamo (onda quadra, sinusoide ecc..) inoltre dobbiamo anche scegliere l'ampiezza massima perché dobbiamo avere un limite sulla potenza dissipata.

il problema in queste 2 strutture è che $R = R_0 + R_0\alpha\Delta T$ e noi vogliamo misurare Δt.
Sappiamo che α è nell'ordine di 10^{-3} e quindi $R_0\alpha\Delta t$ è molto piccolo, non posso semplicemente amplificare perché ho anche Ro sommato, quindi ho che anche Ro si amplifica.

Dobbiamo sottrarre la baseline Ro, il modo più facile con cui posso farlo è con un differential amplifier.

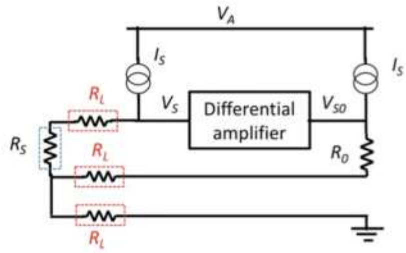




- Since ΔV_S is much smaller than V_S, it is advisable to include in the circuit a reference V_{SO} and take **directly differential measurements of ΔV_S**, instead of measuring V_S and then subtracting V_{SO}
- However, in various cases the RTD is placed on a measured object not near to the circuit, the **long connecting wires** have resistance R_L not negligible with respect to R_S and their **effect is significant** and must be taken into account
- In the simplest configuration, called «Two-wire-connection», the two wire resistances are in series with R_S and their voltage drop $2I_S R_L$ is added to V_S, thus causing a significant error in the measured ΔV_S

Nella realtà abbiamo un altro problema, tipicamente noi vogliamo misurare cose lontano dall'elettronica e quindi abbiamo anche le resistenze dovute al cavo.
il problema è che anche questi R_L cambiano con la temperatura

Un modo intelligente per risolverlo è:

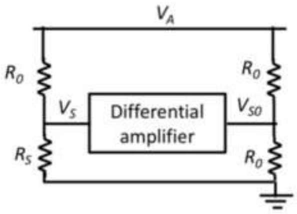


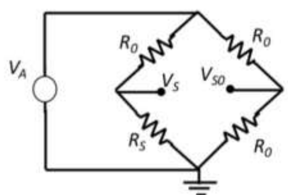
- Errors in ΔV_S due to wire resistances R_L are avoided by a **«Three-wire-connection».** Both the reference arm and the RTD arm include in series a wire resistance R_L; the third wire resistance R_L is inserted in the common return to the circuit ground

Nella realtà viene usato questo? NO!! Costa troppo, Perché il current generator costa troppo.
Noi rimpiazziamo il generatore di corrente con la resistenza.
WISTON BRIDGE

Qual'è il lato negativo di questa configurazione?

tipicamente il valore di Ro è molto piccolo (ed è un bene perché uso meno platino), il problema è che Ro è piccolo e quindi noi sappiamo che il segnale è dipendente da Ro [Ro α Δt]





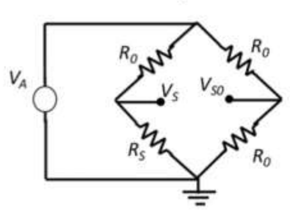
- An alternative configuration, devised when current generators were not available, requires only resistors and due to its simplicity is still widely exploited
- A **voltage divider** is implemented by the **R_S of the RTD** in series with a **reference resistor R_0** and the variations of the divider output voltage corresponding to the variations of R_S are measured
- This is the principle of the **Wheatstone bridge**, invented in 1833 by Samuel Hunter Christie and popularized by Charles Wheatstone and usually drawn as sketched above at right

Un problema è che $V_S = V \cdot \frac{R_S}{R_S + R_0}$, che non è più lineare (è un problema ma non troppo, perché possiamo creare una look up table). Ma siamo fortunati, se Δt è piccolo tale che $R_S \simeq R_0$ (cambia poco da Ro) allora il comportamento è circa lineare.

$$R_S = R_0 + \Delta R_S$$

$$V_{S0} = V_A \frac{R_0}{R_0 + R_0} = \frac{V_A}{2}$$

$$V_S = V_A \frac{R_S}{R_0 + R_S}$$



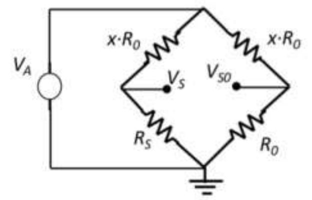
Quando all'esame facciamo questo dobbiamo motivare 2 cose
- il segnale è quello perché faccio la derivata (dimostrare)
- Le resistenze Ro, perché usiamo Ro e non altri valori tipo 100Ro? Non cambierebbe niente

For **small resistance variation** $\Delta R_S < 0{,}05\ R_0$ the voltage variation ΔV_S is **approximately linear** with ΔR_S and can be computed by first-order development

$$\Delta V_S = \Delta R_S \left(\frac{dV_S}{dR_S}\right)_{R_S = R_0} = \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_S}{R_0} = \frac{V_A}{4}\alpha \Delta T$$

Ricordarsi anche di parlare della power dissipation.
Se lui non ci da la massima power dissipation allora scegliamo VA come ci va)

$$R_S = R_0 + \Delta R_S$$
$$V_{S0} = V_A \frac{R_0}{R_0 + xR_0} = \frac{V_A}{1+x}$$
$$V_S = V_A \frac{R_S}{xR_0 + R_S}$$



Calcoliamo la funzione con xR allora, troviamo x che ci da il valore massimo. notiamo che il segnale massimo lo abbiamo per X = 1

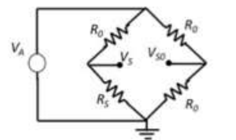
The Wheatstone bridge can be employed with **any ratio x** of the voltage divider, i.e. R_S can be in series with a resistor $x{\cdot}R_0$ with any value of the factor x. However, it is intuitive and readily verified that **with x=1 the highest output ΔV_S** is obtained

$$\Delta V_S = \left(\frac{dV_S}{dR_S}\right)_{R_S=R_0} \Rightarrow \Delta R_S = V_A \frac{x}{(1+x)^2}\frac{\Delta R_S}{R_0}$$

$$\max\left[\frac{x}{(1+x)^2}\right] = \frac{1}{4} \quad for \quad x=1$$

Se la variazione di temperatura non è più piccola allora non possiamo più considerare l'uscita lineare

$$R_S = R_0 + \Delta R_S$$
$$V_{S0} = V_A \frac{R_0}{R_0 + R_0} = \frac{V_A}{2}$$
$$V_S = V_A \frac{R_S}{R_0 + R_S}$$

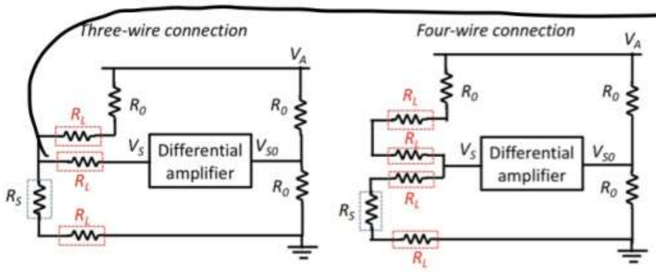


Non è così tanto un problema perchè risolviamo calcolando con i microcontrollori.

The cheap availability of integrated electronics for digital data processing and storage makes practical to extend the application of the Wheatstone bridge also to cases with **greater variations ΔR_S**, that have a **non-linear but known dependance** of ΔV_S on ΔR_S

$$\Delta V_S = V_S - V_{S0} = V_A \frac{R_0 + \Delta R_S}{2R_0 + \Delta R_S} - \frac{V_A}{2} =$$
$$= \frac{V_A}{2} \cdot \frac{\frac{\Delta R_S}{2R_0}}{1 + \frac{\Delta R_S}{2R_0}}$$

Ma anche con il witson bridge abbiamo il problema della resistenza dei cavi.

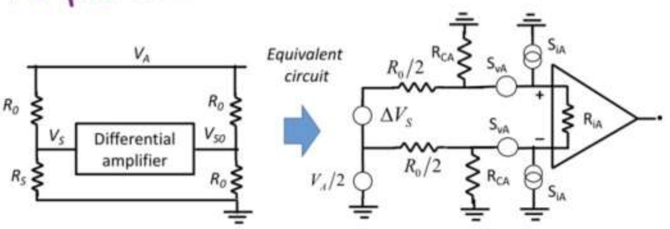


Tipicamente su questa impedenza non ho caduta xè Ampli Z→∞ e quindi in prima approssimazione l'uscita è sempre uguale

Se vogliamo essere + precisi usiamo la tecnica a 4 RL.

- «**Two-wire connection**» causes error also in this case by adding $2R_L$ to R_S
- «**Three-wire-connection**» adds one R_L to the RTD and one to the balancing resistance R_0. The R_L of the connection to the differential amplifier is not compensated, but its effect is negligible because the current in it is negligible
- «**Four-wire-connection**» achieves complete simmetry between RTD arm and balancing arm, with complete cancellation of the errors due to wire resistances (and also cancellation of other minor thermoelectric effects caused by electrical current flowing in conductors with a temperature gradient)

Amplificatore



Tipicamente siamo dominati dalla voltage noise dell'OP-amp.

Dobbiamo tenere conto della common mode rejection ratio.

Since the **source resistance is low**, typically R_0=100 Ω:

- for the input differential resistance $\mathbf{R_{iA}}$ and the input-to-ground resistance $\mathbf{R_{CA}}$ **moderately high** values are sufficient
- the contribution of the input current noise generators is reduced, the input **voltage noise generators are dominant**

Since the differential signal ΔV_S is accompanied by a **high common mode signal $V_A/2$** :

- adequate **CMRR** is required **at the frequency of the supply V_A**, which can be selected at several kHz for reducing the 1/f noise contribution

Termistore

- Commonly used temperature transducers called Thermistors are made of semiconductor ceramic materials, oxides of Cr, Mn, Fe, Co, Ni
- The dependence of thermistor resistance R on temperature is strikingly different from RTDs (see the plot in slide 29): strongly **nonlinear**, **decreases with increasing temperature** and the R values are **much larger** (some 100 kΩ at room temperature) and have much **greater relative variation**
- The resistance-temperature relationship can be described by the equation

$$R = \exp(B/T)$$

where T is the absolute temperature in Kelvin degrees, B is constant. B is called characteristic temperature of the termistor and usually ranges from 2000 K to 4000 K.
Making reference to the resistance value R_0 at a known reference temperature T_0 we get

$$R = R_0 \exp\left[B\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

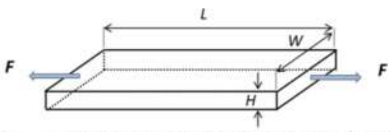
Sono estremamente non lineari, i vantaggi sono che il segnale è molto + grande, il costo è minore e anche la dimensione è minore.

Questi sensori non sono usati per misurare valori di temperatura molto precisi.

27-05-2021 3h

Strain Gauges

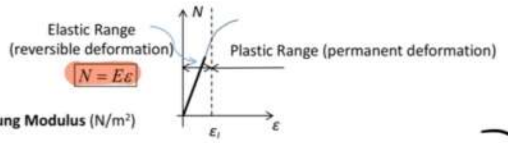
Sono sensori di forza



Metal bar with L = length; W = width; H = thickness; A= W·H cross section
F = pull force applied to the ends

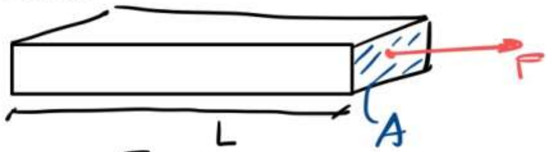
- Stress N = F/A force per unit area
- ΔL = extension of L due to F
- Strain ε = ΔL/L relative variation of L, measured in unit **ΔL/L=10^{-6} = 1μstrain**

Up to the elastic limit ε_L (characteristic of material), strain ε is proportional to stress N.
For currently employed metals (steel, brass, etc.) the limit is $\varepsilon_L < 2\%$



E Young Modulus (N/m^2)

Lo stress per definizione è la forza fratto l'area



$$N = \frac{F}{A}$$

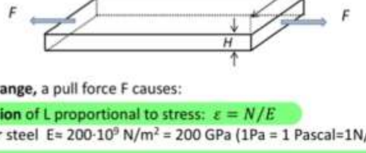
Dato questo valore noi vogliamo calcolare l'allargamento del metallo (la strain)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Tipicamente ε è molto piccolo (10^{-6})

Ricordiamo che abbiamo una parte elastica, nella quale io metto la forza e si allunga la tolgo e torna normale, ma poi abbiamo anche una parte plastica, che rimane allungata. Tipicamente noi lavoriamo solo in zona elastica perché ci va bene che

$$E\varepsilon = N = \frac{F}{A}$$



In **elastic range**, a pull force F causes:

1) **Extension** of L proportional to stress: $\varepsilon = N/E$
e.g. for steel E≈ $200 \cdot 10^9$ N/m^2 = 200 GPa (1Pa = 1 Pascal=$1N/m^2$)

2) **Contraction** of the section **dimensions** W and H proportional to the L extension ε

$$-(\Delta W/W) = -(\Delta H/H) = \nu \cdot \varepsilon$$

ν Poisson Ratio (adimensional number)

For most materials ν ≈ from 0,25 to 0,4; for current metals ν ≈ from 0,3 to 0,35

3) **Contraction** of the section **area** A= W·H (in absolute value)

$$\frac{\Delta A}{A} \approx \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta H}{H} = 2\nu \cdot \varepsilon$$

Quando abbiamo un allargamento del materiale abbiamo anche un cambiamento dell'area

esiste anche l'effetto piezoresistivo

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{L}{\sigma A}$$ R resistance; ρ resistivity; $\sigma = 1/\rho$ conductivity

Notiamo che la resistenza dipende dalla lunghezza e dall'area

Notiamo che anche la resistività cambia con lo strain.

Capiamo che tutti gli elementi della formula dipendono dallo strain.

- Piezoelectric effect: in various materials a crystal lattice deformation changes the material resistivity, which contributes to the change of macroscopic resistance.
- Strain changes the shape of the energy band curves (energy vs momentum E-k), hence changes the electron effective mass m* and therefore the carrier mobility
- Semiconductors have strong piezoresistive effect and the dependence of conductivity on the strain is markedly nonlinear and strongly dependent on the semiconductor doping and on the temperature
- Metals have small or moderate effect, somewhat higher for Nickel and alloys than other metals. The dependence of conductivity on the strain N is fairly linear and a **piezoresistivity coefficient β** can be defined

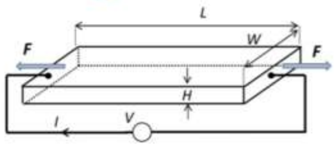
$$\rho = \rho_o (1 + \beta N)$$

and the relative variation due to the piezoresistive effect can be described as

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_o} = \beta N = \beta E \cdot \varepsilon$$

Strain gauge principle

Come posso misurare la resistenza?



Calcolo la variazione della resistenza relativamente a se stessa.
Faccio perciò la derivata multipla della formula della resistenza

$$R = \rho \frac{L}{A} = \frac{L}{\sigma A}$$ R resistance; ρ resistivity; $\sigma = 1/\rho$ conductivity

- In principle, a **Strain Gauge** (SG) is a long and thin metal slab (small cross section H << L and W << L) employed to measure the strain ε along its length L
- It is employed to measure strain in elastic range, without permanent deformation
- The relative variation of R is small (small elastic deformation and small or moderate piezoresistive effect) and can be **evaluated in first-order approximation***, i.e. denoting by subscript «o» the quiescent values without strain

Noto che gli elementi differenziali come definito prima sono proporzionali ad altri valori.

$$\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{\Delta L}{L_o} - \frac{\Delta A}{A_o} + \frac{\Delta\rho}{\rho_o} = \varepsilon + 2\nu\varepsilon + \beta E\varepsilon = \varepsilon(1 + 2\nu + \beta E)$$

* The finite small variation is computed as a differential

Definiamo perciò un Gauge Factor

$$\frac{\Delta R}{R_o} = \frac{\Delta L}{L_o} - \frac{\Delta A}{A_o} + \frac{\Delta\rho}{\rho_o} = \varepsilon + 2\nu\varepsilon + \beta E\varepsilon = \varepsilon(1 + 2\nu + \beta E)$$

- The conversion gain from strain ε to relative variation of the SG resistance R is called **Gauge Factor G**

$$\boxed{G = \frac{(\Delta R/R_o)}{\varepsilon} = 1 + 2\nu + \beta E}$$

- Metal SG have small or moderate G:
  - G from 1,8 to 2,2 for most metals
  - G from 2 to 3,5 for Ni-Cu and Ni-Fe-Cr alloys
  - G≈12 for Nickel

  Since metals have about $\nu \approx 0{,}3$ a metal SG without piezoresistivity (i.e. with β=0) would have

  G≈ 1,6 ← valore tipico

  A comparison with the actual *G* values shows that the piezoresistivity contribution is significant, but it is not a big one

Strain gauge device

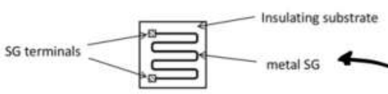
Conflicting requirements condition the design and fabrication of SG devices

a) **Requirement**: SG fastened to the sample under test for having the same strain
Solution: SG fastened onto a robust thin foil, which is then glued to the sample

b) **Requirement**: SG electrically isolated from the sample under test, for avoiding shunt effects due to conductive samples
Solution: SG supporting foil in insulating material

c) **Requirement**: small size of SG, for measuring the local strain and not strain averaged over a fairly wide area
Solution: limited size of the SG foil, as required by the case under test

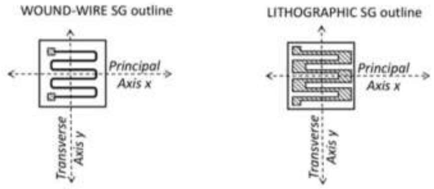
d) **Requirement**: not too small resistance of SG, for limiting measurement errors and uncontrolled parasitic effects (electrical contact resistance, etc.):
Solution: meander configuration of the resistor, in order to fit a long conductor length into the small area of the foil



Tipicamente non misuriamo lo strain di un materiale grande (tipo ala di un aereo) ma mettiamo un altro pezzettino di metallo che deve essere attaccato al pezzo principale. Il pezzettino di metallo che noi usiamo da resistenza deve essere isolato dal resto.
Voglio fare il sensore piccolo, ma sensore piccolo → resistenza piccola → variazione della resistenza piccola. La soluzione è che al posto di usare un pezzo di metallo normale come resistenza, faccio una roba così. Il problema è che tipicamente noi vogliamo misurare la forza in solo 2 direzioni opposte

e con questo sono sensibile anche a piccole variazioni nelle altre 2 direzioni.

- Old fashioned **wound-wire technology**: long thin **metal wire** wound in meander and fastened on insulating foil; strain measured on Principal Axis x (direction of meander long portions) with Principal Gauge Factor G_P
- Main drawbacks: a) sensitive also to strain along Transverse Axis y, though with a minor Transverse Gauge Factor $G_T \approx 0{,}05\ G_P$ b) moderate precision and reproducibility; well-matched SG samples are not available
- Modern **lithographic technology**: exploits lithographic technology (well developed in different scales for printed circuit boards and for integrated circuits) for finely designing SG of small size (1 cm and less) in a **very thin metal layer (from 2 to 10 µm) coated over an insulating foil**



Soluzione: Ad oggi si fanno linee più larghe nelle direzioni che non voglio, quindi la componente spuria è trascurabile.

Con le nuove tecniche arriviamo a resistenze fino a diversi KΩ.

Tuttavia questi sensori sono anche sensibili alla variazione della temperatura.

Strain gauges measurements

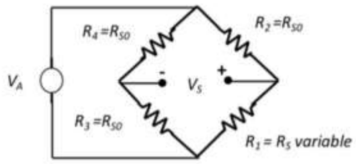
As concerns the electronic measurement techniques, **Strain Gauges and Resistance Temperature Detectors (RTD) are essentially the same case**: small variations of a smal resistance (typically a few hundred Ohms) must be measured with high precision.

We will thus make explicit reference to the treatment of RTDs and add some notes about specific issues of SGs

- The SG resistance is $R_S = R_{S0} + \Delta R_S = R_{S0} + G\varepsilon R_{S0}$
- The Wheatstone Bridge with equal resistors (SG and other resistors with value R_{S0}) is a rational and widely employed solution. With small variations $\Delta R_S / R_{S0} << 1$ the signal V_S is proportional to the strain ε (as computed at 1st-order)

For a W-bridge with
- one SG of variable R_S
- three constant R_{S0}

$$\boxed{V_S = \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_S}{R_{S0}} = \frac{V_A}{4} G \cdot \varepsilon}$$



il valore di resistenza cambia anche con la temperatura, si dimostra che ho

$$\varepsilon_T = 2000 \cdot \Delta T_{[in K]} \text{ microstrain}$$

Abbiamo la stessa configurazione che nel caso delle termoresistenze. Allora compariamo i 2 casi.

- The resistivity of metals increases with the temperature

  $\rho = \rho_0 + \Delta\rho = \rho_0 + \alpha\,\Delta T\,\rho_0$ (α temperature coefficient of the metal)

  for metals employed in SG it's around $\alpha \approx 4\cdot 10^{-3}$ /K .
- Comparing R_S variations due to strain ε and to a temperature variation ΔT

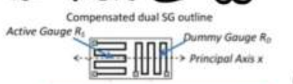
  $$\left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}}\right)_N = G\varepsilon \qquad \left(\frac{\Delta R_S}{R_{S0}}\right)_T = \alpha\,\Delta T$$

  we see that if the SG temperature T has an even small deviation $\Delta T = T - T_0$ from the reference temperature T_0 of the other resistors in the bridge, a remarkable error ε_T ensues. In fact, with $\alpha \approx 4\cdot 10^{-3}$ /K and G≈2 the error is

  $$\varepsilon_T = \frac{\alpha\,\Delta T}{G} \approx 2\cdot 10^{-3}\,\Delta T = 2000\cdot\Delta T\,[in\ K]\ microstrain$$
- SG temperature deviations are often met in practice (e.g. SG working on motors or other structures with variable temperature) and produce unacceptable errors. Temperature effects in the SG cannot be avoided, but accurate **compensation** of their effect can be obtained by inserting in the Wheatstone bridge a properly devised **dummy gauge**

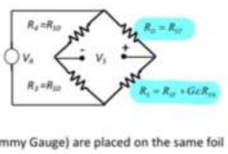
che è tanto visto che la unità di misura è µstrain, allora non è trascurabile. Non possiamo neanche stabilizzare la temperatura perché per misurare 1 µstrain dovrei avere stabilità di temp di 1/2000 K (impossibile). Poi questi sensori si usano in condizioni critiche (tipo ali dell'aereo).

L'idea è quella di usare una Dummy cell, cioè prendo un altro sensore che non è in grado di misurare uno dei 2 effetti, in questo caso un sensore che è in grado di misurare solo la temperatura, poi faccio la differenza e top. Ci serve però un sensore che misuri la temperatura allo stesso modo che il strain gauge. Posso fare la furbata, uso 2 strain gauge uguali solo che la ruoto di 90°



$$\boxed{R_S = R_{S0} + \alpha\,\Delta T\,R_{S0} + G\varepsilon R_{S0} = R_{ST} + G\varepsilon R_{S0}}$$

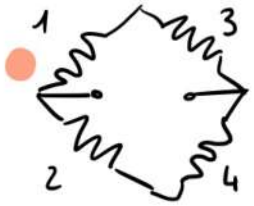
$$\boxed{R_D = R_{S0} + \alpha\,\Delta T\,R_{S0} = R_{ST}}$$



- Two identical gauges (Active Gauge and Dummy Gauge) are placed on the same foil with principal axes orthogonal
- The foil is glued to the structure under test, with principal axis of the active gauge in the direction of the strain to be measured
- The strain of the structure tested modifies the resistance R_S of the active gauge, but not the resistance R_D of the dummy gauge
- Active and dummy gauge in close contact with the structure tested are kept at the same temperature of the structure
- The power dissipation in the resistors must be limited by limiting the supply voltage V_A, in order to limit the SG self-heating

in questo modo lo strain gauge a 90° misura solo la temperatura e non lo strain.

Per misurare tutto ci va benissimo, basta solo il wiston Bridge, per compensare la temperatura basta mettere tutti e 2 i valori di resistenza nel wiston bridge



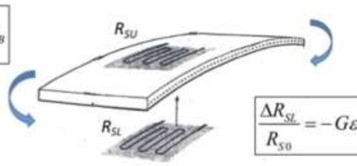
Supponiamo di avere qui lo strain gauge che misura la forza

l'altro strain gauge posso metterlo in 2 o 3, ma è meglio in 2 perché se lo metto in 3 ho un cambiamento di common mode e quindi se ho un amplificatore dopo il wheatstone bridge che non ha una buona common mode rejection ratio posso creare problemi.

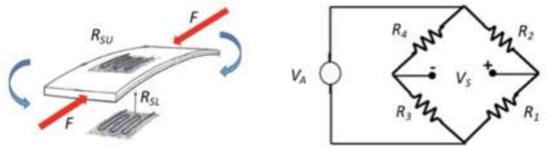
Con gli strain gauges posso anche misurare il piegamento di un materiale

- With one Strain Gauge just a component of the strain is measured, the tensile or compressive strain in the direction of the SG principal axis.
- However, other strain components can be measured with more SGs rationally combined in the Wheatstone bridge
- Let's consider bending a long board with rectangular section (see the figure). The upper surface experiences a tensile strain $\boldsymbol{\varepsilon_B}$, the lower surface a symmetrical compressive strain $-\boldsymbol{\varepsilon_B}$. In fact, the strain linearly varies in the board section from $\boldsymbol{\varepsilon_B}$ to $-\boldsymbol{\varepsilon_B}$ and is zero in the mid, which is called «neutral plane»
- Let's consider to apply on the two surfaces of the board two matched SG (with equal resistance R_{S0} and Gauge factor G), denoted as R_{SU} on the upper surface and R_{SL} on the lower surface. Due to bending we get

$$\boxed{\frac{\Delta R_{SU}}{R_{S0}} = G\varepsilon_B}$$



$$\boxed{\frac{\Delta R_{SL}}{R_{S0}} = -G\varepsilon_B}$$



- With R_{SU} inserted in the bridge as R_1 and R_{SL} as R_3, we measure the bending strain $\boldsymbol{\varepsilon_B}$

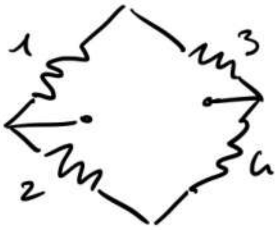
$$V_{SB} = \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_{SU}}{R_{S0}} - \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_{SL}}{R_{S0}} = \frac{V_A}{2} G \cdot \varepsilon_B$$

- Let's consider now that a compressive force is added at the board ends: equal strain $\boldsymbol{\varepsilon_F}$ is added at the upper and lower surface, but the two SG have equal variation and the added contribution to the bridge output voltage is zero

$$\frac{\Delta R_{SU}}{R_{S0}} = \frac{\Delta R_{SL}}{R_{S0}} = G\varepsilon_F \Rightarrow V_{SF} = \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_{SU}}{R_{S0}} - \frac{V_A}{4}\frac{\Delta R_{SL}}{R_{S0}} = 0 \Rightarrow \boxed{V_S = V_{SB} + V_{SF} = \frac{V_A}{2} G \cdot \varepsilon_B}$$

- In conclusion, by suitably employing two SG we can separately measure the net bending strain $\boldsymbol{\varepsilon_B}$ also in presence of an axial strain $\boldsymbol{\varepsilon_F}$

Usando 2 sensori, uno sopra e uno sotto posso capire il verso del piegamento.
perché sopra ho che si tira o sotto si schiaccia o viceversa
Posso fare la stessa cosa di sopra con il ponte di wheatstone



Se io sono interessato al bending e ho il sensore sopra in posizione 1 dove metto il sensore 2?

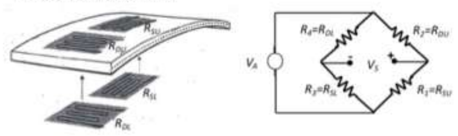
Lo metto in 2 perché così se ho una variazione uguale su tutti e 2 il segnale d'uscita è ∅ mentre se uno si schiaccia e l'altro si allarga ho in uscita il segnale doppio

E se fossi interessato solo all'estensione e non più al piegamento, avendo sempre un sensore su 1? Lo metto in 4 così non vedo i comportamenti differenziali ma vedo quelli di modo comune
Ma attenzione, in quest'ultimo caso ho che non ho immunità alle variazioni di temperatura

Nella realtà anche nel caso prima non sono molto a prova di temp perché ho 2 temp diverse sopra e sotto

- The measurements of $\boldsymbol{\varepsilon_B}$ and $\boldsymbol{\varepsilon_F}$ obtained with two matched SG as illustrated are correct only if the two SG are at the same temperature, but in many cases this is not achieved because the two SG are not in close proximity
- The drawback is avoided and the approach extended to all cases simply by
  a) employing dual compensated SGs instead of simple SGs and
  b) inserting in the bridge each dummy gauge in suitable position to compensate the associated active gauge

Allora uso 4 sensori



- Combinations of various SGs can be employed also for measurements in complex strain situations, i.e. with strain components in various directions, e.g. two-dimensional strain in aeronautical structures, such as aeroplane wings

Semiconductor strain gauges

Li facciamo perché magari vogliamo ricavare lo strain di un semiconduttore

- Semiconductors such as Germanium and Silicon have very strong piezoresistive effect. Strain Gauges in such materials thus provide large Gauge Factor G in the range from 100 to 300
- Magnitude and sign of the piezoresistive effect are governed by the type and level of doping. In p-type Silicon the effect is positive (tensile strain increases the resistivity) and in n-type silicon it is negative (tensile strain decreases the resistivity)
- The effect is markedly dependent on the temperature, with G decreasing significanly as the temperature is increased. A typical example is a reduction from G=120 at 10°C to G=105 at 65°C.
- The Gauge Factor G is not constant as the strain is increased, i.e. the gauge is not linear, with G decreasing significantly at moderately high strain. A typical example is a decrease from G=125 at 2000 microstrain down to G=100 at 4000 microstrain
- The elastic range of these semiconductor materials is quite narrower than that of metals, the elastic limit is typically at ≈4000 microstrain

il guadagno è + alto ma la parte lineare del semiconduttore è molto + piccola.

In summary, semiconductor SGs suffer noteworthy limitations

- Response is not linear
- Response is strongly dependent on the temperature
- Dynamic range is small

but also offer remarkable features, such as

- High Gauge Factor, which provides high sensitivity: dynamic strains as small as 0,01microstrains can be measured
- Small SG size <1mm, which makes possible to measure highly localized strains, where a foil metal SG would be too large
- Composite structures including various resistors can be fabricated in a small region of the semiconductor crystal. The monolithic structure ensures equal temperature of the resistors and by selective doping it is possible to obtain different sign of piezoresistive effect in different resistors. Therefore, it is possible to devise SG configurations where the strain effects in different resistors inserted in a Wheatstone bridge collaborate to produce a voltage output, whereas the temperature effects are compensated

28.05.2021 Tutorial 3h

Continuiamo con il punto c)

Exam text of 08/02/2018 (Problem 2)

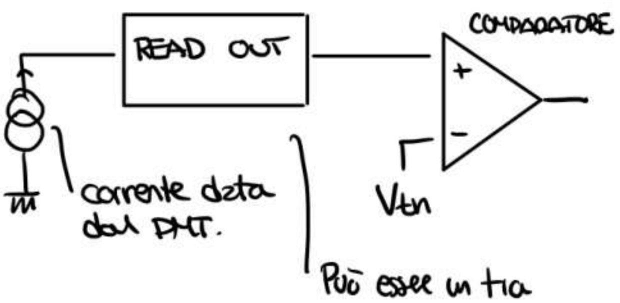
a) Define the radiant sensitivity of a photodetector and how it is possible to write it as a function of the wavelength. Calculate a reasonable value of this parameter at 500nm for a PIN photodiode and for a typical Phototube.

b) Define and explain the meaning of the NEP and Detectivity of a photodiode and a PMT

c) Considering a PMT, calculate the minimum value of the gain G in order to be able to detect single photons on a time window of 5ns.

d) Starting from the random sequence of independent elementary pulses, describe the current shot noise: noise mean, mean square and power and finally power spectrum.

Approccio digitale



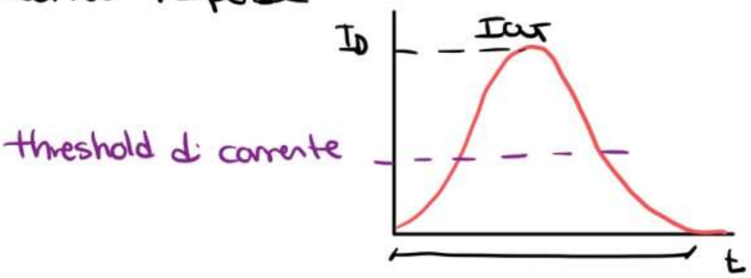
Overall noise

$$\sqrt{S_{v TOT}} = 200pA/\sqrt{Hz}$$

Ogni volta che supero la threshold ho un impulso in uscita.

Vogliamo fare un detect del single photon

Che segnale ho in uscita del PMT quando ho un singolo fotone? Single electron response



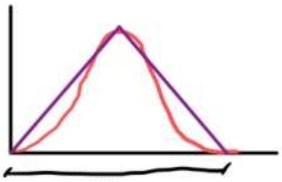
Quant'è una durata ragionevole del segnale?

È nell'ordine dei nanosecondi

Prendiamo 5nS.

Quali sono i limiti che dobbiamo mettere al read out?

Un limite è quello della banda. Possiamo approssimare il segnale con quello di un triangolo e da quello calcolare la banda del segnale



Approssimazione triangolo → $sinc^2$, allora il primo lobo ce l'ho a

$$\frac{1}{\frac{T_{SER}}{2}} = 0,4 GHz$$

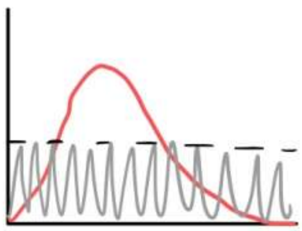
E prendiamo un margine di 10 della banda per fare una scelta conservativa (visto che era un approssimazione)

$$BW_{readout} = 10 \cdot 0,4GHz = 4GHz$$

Per sapere se ho un singolo segnale al PMT devo avere che il segnale sia maggiore del rumore all'input del read out

$$\sigma_{iIN} = \sqrt{S_{I,TOT} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot BW_{readout}} = 15,62 \mu A$$

Passiamo ora lato comparatore. Devo decidere che threshold mettere per il segnale. Vogliamo una threshold sopra il background di rumore e quindi vogliamo che il segnale sia maggiore del rumore.
Con il Gain del PMT cambia l'altezza del segnale di corrente, perciò abbiamo un limite sul Gain dato dal limite sul picco della corrente (deve essere fuori dal rumore)



Diciamo che la corrente deve essere maggiore di $3\sigma_i$ del rumore

$$I_{peak\,min} = 3\sigma_i$$

Se relazioniamo il gain del PMT alla corrente di picco abbiamo risolto il problema

$$Q = q \cdot G_{PMT} \simeq \frac{I_{PEAK} \cdot T_{SER}}{2}$$

ho fatto in pratica un bilanciamento di carica (e ho usato il triangolo come approssimazione)

$$I_{PEAK_{MIN}} = \frac{2q \cdot G_{PMT}}{T_{SER}} = 3\sigma_i$$

Allora

$G_{PMT} = 73 \cdot 10^4$ valore ragionevole per un PMT

Abbiamo in uscita dal comparatore un SNR del tipo (?)

$$SNR = \frac{N_S}{\sqrt{N_S + N_D}}$$ → se $N_D \ll N_S$ posso rilevare il single photon

N_S: eventi relativi al segnale
N_D: eventi relativi alla dark count $N_D = n_D \cdot T_{OBS}$ ← Tempo di osservazione

Se voglio fare $N_D \ll N_S$ posso anche ridurre T_{OBS}.

Exam Text of 25/06/2018 (Problem 2)

SPAD PHOTODIODE	PREAMPLIFIER
Area=0.007 mm^2 Detection efficiency @500nm= 50%; Dark counts=10 cps	- Load Input Resistance R_L=1kΩ - Load Input Capacitance C_L=2 pF - Current Noise (unilateral) at amplifier input $\sqrt{S_{iA}} = 1pA/\sqrt{Hz}$ - Voltage Noise (unilateral) at amplifier input $\sqrt{S_{vA}} = 1nV/\sqrt{Hz}$

We want to study the Earth surface by measuring the time of flight of pulses sent from a satellite in a low orbit (200km from the ground). To perform this measurement, a square laser pulse (pulse width = 1us) at λ=500nm is used, while an APD is used for detection.

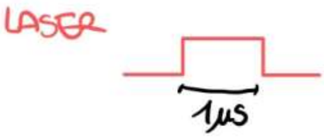
1) Discuss and select the most appropriate repetition frequency of the laser. Being able to choose among different APDs, discuss the main features of an APD that could be successfully exploited in this measurement and calculate its detection efficiency and sensitivity.

2) Assuming that the selected APD has a dark current of 1pA and considering the preamplifier with the above reported characteristics, select a suitable filter for this measurement and evaluate the minimum power of a SINGLE laser pulse that can be measured.

3) Due to the movement of the satellite along its orbit, it is possible to make measurements with a maximum duration of 1s. Discuss how the previous measure can be improved and calculate the minimum power that can be measured in this new scenario.

4) How would the situation change if the SPAD with the above reported characteristics was used to replace the APD? Following this approach, calculate the minimum power that can be measured in this case.

Abbiamo impulsi mandati dal satellite che rimbalzeranno sulla terra e torneranno indietro.



$\lambda = 500nm$

APD usato per fare la rilevazione del segnale rimbalzato dalla terra. Visto che noi rileviamo il segnale del laser solo rimbalzato allora il segnale è lo stesso in forma e la stessa lunghezza d'onda ($\lambda = 500nm$) perché non abbiamo fluorescenza. Dobbiamo poi anche studiare il coefficiente di riflessione

Poi non è detto che rimbalzi sempre sulla terra ma ci possono anche essere nuvole ecc.

Punto a) scegliere la frequenza del laser, dobbiamo scegliere un APT, la sua detection efficiency e S_0.

- Noi sappiamo che la luce è stata riflessa, quindi $\eta(500nm)$
- Per sapere la frequenza del laser dobbiamo calcolare il tempo che il segnale sta ad andare e tornare (il percorso massimo)

Calcoliamo il tempo massimo di raggio $d = 200km$ $v = 3 \cdot 10^8$

$$T = \frac{2 \cdot d}{v} = 1{,}33ms$$

Dobbiamo essere conservativi perché la distanza è $\simeq 200km$, perciò

$1{,}33ms \longrightarrow f_{rasse} = 750Hz$

Noi la prendiamo conservativa e facciamo $f_{rasse} = 700Hz$

Andando allo APD

$L_a = 1\mu m$

Dobbiamo decidere i valori di R, t_n e t_D. Noi sappiamo che

$$\eta = (1-R)e^{-\frac{t_N}{L_a}}(1-e^{-\frac{t_D}{L_a}})\Big|_{500nm}$$

Noi abbiamo scelto

$R = 0{,}2$ $t_n = 0{,}1\mu m$ $t_D = 5\mu m$ $\rightarrow$ $\eta(500nm) = 70\%$ Valore ragionevole a 500nm

Gli altri parametri dell'APD sono

S_D = calcolabile = 0,29 A/W

Ci sono però altri elementi che dobbiamo selezionare

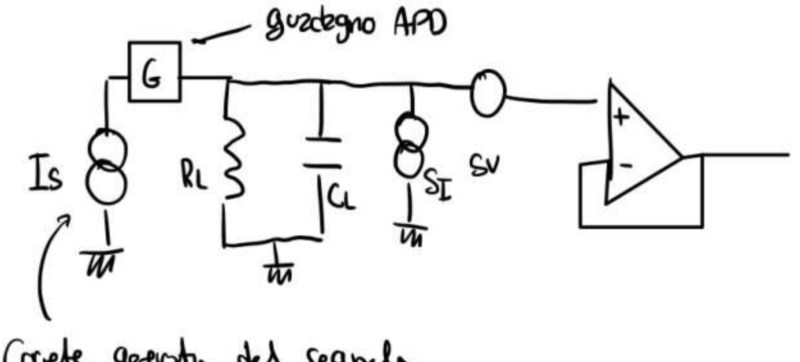
> Guadagno, scegliamo 100 che è un valore ragionevole

> Dark current $I_D = 10pA$ ← scelto ragionevolmente

> Noise factor 2,5 ← Numero ragionevole scelto.

Punto b)

Supponiamo $I_D = 1pA$, dato il preamp trovare il filtro adatto per calcolare la potenza di un impulso.



Sappiamo che abbiamo $\eta = 70\%$, $G = 100$, $F = 2{,}5$, $I_D = 1pA$, $S_D = 0{,}29$ A/W.

Dobbiamo capire l'effetto della load network sul segnale

$$\tau_L = R_L \cdot C_L = 2nS$$

Ha un effetto trascurabile su un segnale che dura $1\mu S$. (Capire bene sta roba, credo lavori sulle bande).

- NOISE CONTRIBUTION

$R_L \rightarrow \frac{4KT}{R_L} = 4pA/\sqrt{Hz}$ $\quad S_I = 1pA/\sqrt{Hz}$ $\quad S_{V,I} = \frac{S_V}{R_L^2} = \frac{1pA}{\sqrt{Hz}}$ ← Tutti contributi in DC poi vediamo i poli

$I_D = 2qI_D$ $\qquad I_S = 2qI_S$ ← rumore del segnale.

Il rumore del resistore e di S_I sono limitati da un polo τ_L a $2nS$ cioè a 80MHz. Le componenti di tensione sono solo limitate dal polo del preamp.
La dark current e il rumore del segnale vanno moltiplicati per il Guadagno e l'excess noise

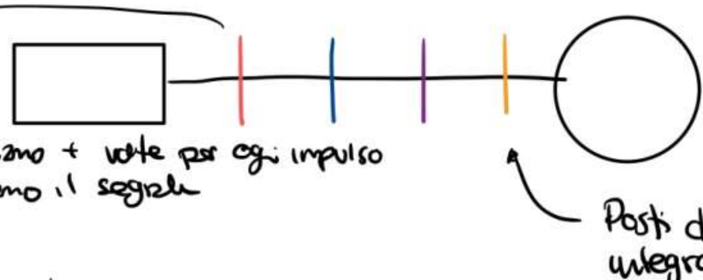
$I_D = \sqrt{2qI_D \cdot G^2 F} = 0{,}09pA$ ← Molto piccolo

$I_S = \sqrt{2qI_S G^2 \cdot F} =$ Non sappiamo I_S (2 vie considerarla nell' SNR oppure ipotizzare che sia trascurabile se confrontata con il rumore dell'elettronica, ipotesi che è da verificare).

Che filtro scegliamo?

Ci verrebbe da dire un GI ma non abbiamo il sinc per sincronizzarlo, sappiamo solo quando mandiamo il segnale non quando lo riceviamo.
e poi con un GI vediamo soltanto ad una certa distanza. Se la vediamo così possiamo aprire diversi GI per diverse distanze e vedere se lì c'è il segnale

partiamo da un punto casuale per $1\mu s$ e lo facciamo + volte per ogni impulso finchè non perdiamo il segnale



Posti dove posso aprire finestre di integrazione.

Queste finestre d'integrazione le apro considerando un segnale a diversi tempi da quando lancio il segnale.

Decido di usare un GI con $T_G = 1\mu s$ ← come il segnale

$\sqrt{S_{I,TOT}} = 1{,}2pA/\sqrt{Hz}$ $\qquad$ Abbiamo deciso di usare I_S trascurabile

$$\sigma_i = \sqrt{S_{I,TOT} \cdot \frac{1}{2T_G}} = 3nA$$

SE VOGLIAMO SNR = 1 $\qquad I_{S\,MIN} = \frac{\sigma_i}{G_{APD}} = 30pA$

Possiamo verificare che il rumore associato alla corrente è trascurabile

$$P_{MIN} = \frac{I_{S\,MIN}}{S_D} = 103pW$$

Punto c)

il satellite si muove → il massimo tempo di misura è 1s. ma prima facevamo misure a 1μs.
Possiamo perciò usare + impulsi. Visto che il satellite si muove lui cambia lentamente cosa stai puntando con il laser e così capiamo che possiamo usare un boxcar integrator in modo che dia più peso a roba recente e meno a roba passata.

La frequenza da usare DOVRÀ essere uguale a quella di prima.

Qui ogni volta prendiamo le finestre alla stessa distanza dell'impulso iniziale

Devo fermi tutto il periodo di 1s per ogni diversa distanza della finestra d'integrazione perché perché il boxcar funzioni e quindi avere il segnale minimo devo considerare tutti i campioni.

L'improvement factor del BOXCAR è $\qquad IF_{BOXCAR} = \sqrt{2 \cdot \frac{T_{BOXCAR}}{T_G}}$

Come dimensiono il boxcar?

Sappiamo che il massimo periodo di integrazione è 1s e sappiamo che apriamo una finestra d'integrazione lunga T_G sul periodo T_{LASER}

$$T_{BOXCAR} = \frac{1s}{5} \cdot \frac{T_G}{T_{LASER}}$$

perciò $IF_{BOXCAR} = 16{,}7$

e quindi la potenza minima rilevabile viene

$P_{MIN} = 6pW \qquad$ (16,7 + piccola di quella di prima)

Punto d)
Al posto dell'APD usiamo uno SPAD con

$\eta = 50\%$ $\qquad n_D = 10cps$

Cosa cambia quando andiamo da un APD a uno SPAD, con l'APD usiamo un approccio analogico, con lo SPAD possiamo farlo digitale contando i singoli eventi

$$SNR = \frac{N_S}{\sqrt{N_S + N_D}}$$ Non consideriamo il rumore dell'elettronica perchè con lo SPAD questo è trascurabile

$N_D = n_D \cdot 1\mu s = 10cps \cdot 10^{-6}$ $\qquad$ perciò il numero di fotoni è 10^{-5} ed è trascurabile rispetto N_S

allora $\quad SNR = \frac{N_S}{\sqrt{N_S}} = 1 \quad$ (sempre) $\quad$ Possiamo rilevare il singolo fotone

Calcoliamo la potenza minima, è l'energia del singolo fotone/tempo e efficienza oppure calcoliamo SD dello SPAD

$$S_D = \frac{1{,}24 \cdot 0{,}5}{0{,}5} = 1{,}24\ A/W$$

visto che abbiamo un singolo fotone

$$P_{MIN} = \underbrace{\frac{q}{1\mu s}}_{\text{è la corrente nel segnale}} \cdot \frac{1}{S_D} = 0{,}8pW$$

Exam Text of 24/02/2005

Problem 1

The temperature of a biochemical reaction in a test tube varies from 30°C to 40°C and we want to measure the temperature variation with high precision once per second. A Platinum RTD (Resistive Temperature Detector) featuring R_{T0}=100Ω at the reference temperature of 20°C is exploited. A Wheatstone bridge readout configuration with 3 resistors and the RTD is exploited. The power dissipation on the sensor has to be kept below 1μW. The power supply of the bridge V_A is a pulsed periodical voltage with a duration T_A=100ms and period Tr=1s. The signal is readout by means of a voltage preamplifier featuring a bandwidth limited by a single pole fp=100kHz. The noise referred to the input of the preamp is given by the following contributions, expressed in terms of unilateral noise spectral densities: current white noise $\sqrt{S_I} = 1pA/\sqrt{Hz}$, voltage noise $\sqrt{S_V} = S_W + K/f$ with $\sqrt{S_W} = 10nV/\sqrt{Hz}$ and corner frequency f_C=5kHz.

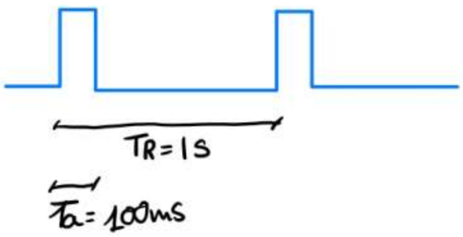
First of all, sketch and describe the configuration of the setup. Then:

a) Select a simple filtering stage that limits the 1/f noise contribution and considering only this filter and the preamp evaluate the noise affecting this measurement.
b) Evaluate the precision that can be achieved with the setup of point a in terms of minimum temperature that can be measured.
c) Select an additional filtering stage to improve the sensitivity of the system. Repeat the evaluations of point a) and b).

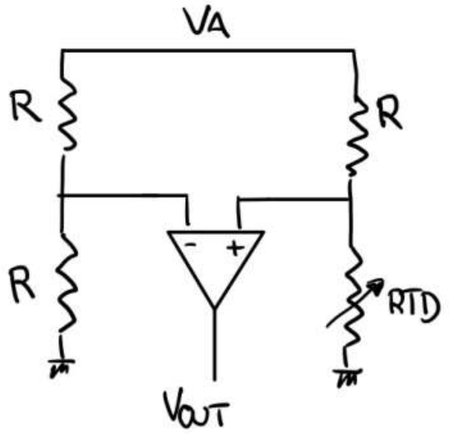
$T \in [30°C, 40°C]$

... once per second: Allora la temperatura varia lentamente
Poi visto che sappiamo che samplamo il segnale a 1Hz allora da Shannon sappiamo che la banda del segnale è $BW \leq 0{,}5Hz$

Va



Sketch del sistema



$R_T = R_{T0}(1+\alpha\Delta T)$

Quanto vale α?
Non ci è stato detto, dobbiamo trovare un info nel testo che ci dia una che.
Sappiamo che RTD è Platino quindi $\alpha = 4 \cdot 10^{-3}\ 1/°C$

Noi scegliamo $R = R_{T0} = 100\,\Omega$, in questo modo abbiamo uscita nulla a 20°. (Fuori dal nostro intervallo 30-40°). Possiamo anche fare $R = R_{T0}(1+\alpha 10°)$ per avere R a 30° in modo da avere $\varnothing$ a 30° e non avere offset.
Nella realtà R tra 20° e 30° non cambia molto perciò lasciamo con quello di 20°

Allora la tensione V_{OUT} è:

$$\Delta V_{OUT} = \frac{V_A}{4} \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

← è la variazione della tensione d'uscita data una variazione di temperatura.

Dobbiamo dimensionare V_A con R_{T0} per avere $P_{DISS,RT0} < 1\,\mu W$

$$P_{DISS,RTD} = \left(\frac{V_A}{2}\right)^2 \frac{1}{R_{T0}} \cdot \frac{T_{ON}}{T_R} \leq 1\,\mu m$$

Duty cycle

Quindi $V_A \leq 63{,}2\,mV$

Perciò $\Delta V_{OUT} = \frac{V_A}{4} \cdot \alpha \cdot \Delta T = \frac{63{,}2\,mV}{4} \cdot 4 \cdot 10^{-3} \cdot \Delta T = 63{,}2\,\mu V/°C$

Ogni grado centigrado varia la tensione di $63{,}2\,\mu V$

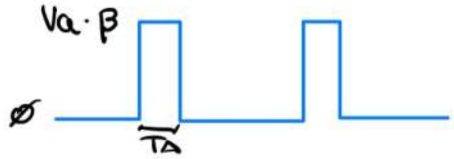
Punto a)

Trovare un modo per ridurre il rumore 1/f.
Dobbiamo comunque usare il preamp.

Questo succede perchè le code degli esponenziali si sommano ↓

ATTENZIONE!! non avevamo considerato che con il CR visto che eliminiamo la componente DC del segnale (10% del segnale visto che il Duty cycle è 10%) e quindi il segnale si abbassa del 10% e quindi il segnale massimo è 0,9 Va

- Il filtro più facile è il CR-HPF



← Segnale che abbiamo

Dobbiamo dimensionare l'HPF-CR in modo da ridurre al minimo l'impatto sul segnale

$\tau_{CR} >> T_A$

Prendiamo quindi una frequenza del polo di 0,1Hz ($\tau_{CR} = 1,59s$) [TA è 100ms]

$$\sigma_i \simeq \sqrt{S_I \cdot R^2 \cdot \frac{\pi}{2} f_{PA}} = 39,6nV$$

$$\sigma_w = \sqrt{S_w \cdot \frac{\pi}{2} \cdot f_{PA}} = 3,96\mu V$$

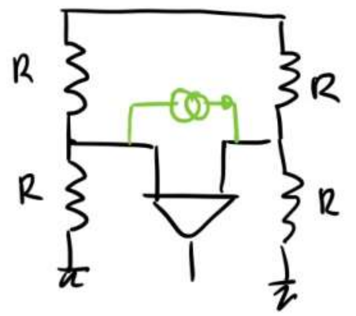
$f_{PA} - 0,1Hz \simeq f_{PA}$

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{S_w f_c \ln\left(\frac{100kHz}{0,1Hz}\right)} = 2,63\mu V$$

La dominant contribution è data comunque dalla white noise quindi possiamo ridurre ancora la costante di tempo dell'HPF

La current noise σ_i è negligible perciò $\sigma_{TOT} = 4,75\mu V$

La current noise è così perchè



$I = \frac{R}{2} \cdot 2$ ← xè sono in parallelo

Altre soluzioni: CDF, non proprio simple solution

Notiamo anche che il rumore dei resistori è trascurabile (Credo che il rumore sia uguale a quello di un singolo resistore 4KT/R).

Punto b)

$$\Delta T_{MIN} = \frac{4,95\mu V}{63,2\mu V/°C} = 0,075\ °C$$

Punto c)

Selezionare un filtro addizionale per migliorare la sensitività del sistema

Usiamo un GI sul segnale (visto che noi sappiamo il sinc visto che siamo noi a dare Va).

Possiamo usare il GI con lo stesso CR-HPF di prima oppure usare un CDF.

il CDF dovrà avere funzione peso

$$f_{PGI} = \frac{1}{2T_A} = 5Hz$$ ← Frequenza del polo di GI

Possiamo usare la frequenza del polo del CR (usiamo quello)

$f_{PCR} = 0,1\ Hz$

Allora

$\sigma_W \simeq 22,4\,nV$ il rumore bianco è trascurabile

$\sigma_{1/f} \simeq 1,4\,\mu V$

Con questi valori arriviamo a $\Delta T_{MIN} = 0,022\ °C$.

Consider the same setup of problem 1 with a sinusoidal voltage having maximum amplitude V_A and frequency f_A=500Hz applied to the Wheatstone bridge.

a) Select a simple filtering stage that limits the 1/f noise contribution. Considering only this filter and the preamp, evaluate the noise affecting this measurement and the minimum temperature that can be measured.

b) Now add a resonant filter tuned at f_A and having quality factor Q=5. Repeat the evaluations of point a).

c) In order to improve the precision of the measurement, how would you change the bias of the Wheatstone bridge and/or the filtering stage following the preamp? Paying attention to comply with the requirements of Problem 1, describe the new setup and repeat the evaluations of point a.

Va non ci è dato dobbiamo scegliere il valore sempre per avere $P_{DISS,RTD} \leq 1\mu W$

$$P_{DISS} = \left(\frac{Va}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{RTD}$$

ho $\frac{Va}{2}$ e non Va perchè sulla resistenza mi cadono solo $\frac{Va}{2}$, poi la $\sqrt{2}$ è data dalla potenza

$Va = 28,3\,mV$

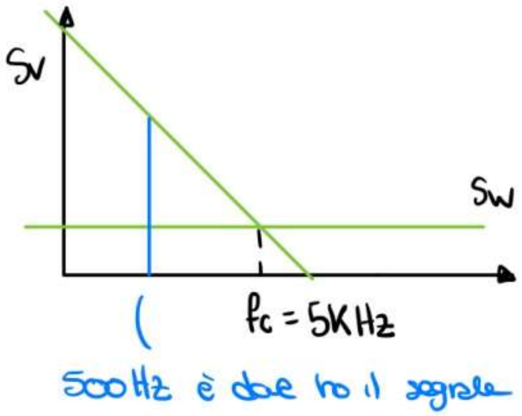
Perciò $\Delta V_{OUT\,MAX} = 28,3\,\mu V/°C$

Punto a)

Semplice filtro per zona bassa 1/f noise

$f_a = 500Hz$ $f_{P PREAMP}$ è molto maggiore di 500Hz → non modifica il segnale.

il rumore predominante è quello di tensione



Dobbiamo usare una soluzione semplice.

Possiamo usare un filtro passa alto e possiamo decidere la frequenza del polo a

$$f_{PHPF} = \frac{500}{10} Hz = 50Hz$$

per non rovinare il segnale (che è anche modulato)

Sappiamo poi che la frequenza del polo del preamp è

$$f_{PA} = 100kHz$$

Se non usiamo un LPF abbiamo che

$$\left.\begin{aligned} \sigma_w &\simeq 3{,}96\mu V \\ \sigma_{1/f} &= 1{,}95\mu V \end{aligned}\right\} \rightarrow \sigma_{TOT} = 4{,}41\mu V$$

il rumore è + piccolo di prima ma lo è anche il rumore

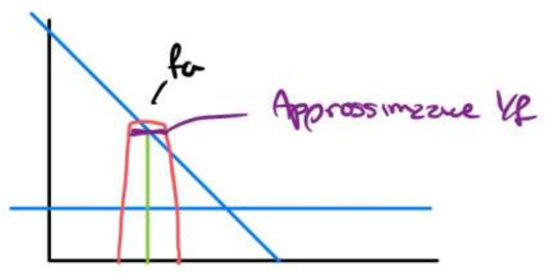
Infatti il minimo ΔT è

$$\Delta T_{MIN} = \frac{4{,}41\mu V}{28{,}3\mu V/°C} = 0{,}155°C$$

Punto B)

Filtro risonante tunato a fa e con un Q = 5 (con fa = 500Hz)

$$\Delta f_n = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f_{BP}}{Q} = 157Hz$$



per perchè questa banda abbiamo comunque rumore 1/f e rumore bianco

$$S_{1/f}(f_a) \cdot f_a = S_w \cdot f_c$$

$$S_{1/f}(f_A) = S_w \cdot \frac{f_c}{f_n} = 10 S_w$$

Abbiamo un rumore non costante nella porzione però possiamo approssimare il rumore 1/f come se fosse costante il valore nella banda, il valore costante che prendiamo è quello del rumore 1/f a fa. per calcolarlo so fc e il valore di 1/f a fc e so fa, so che la slope è -20dB/dec

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{S_{1/f}(f_A) \cdot \Delta f_n} \simeq 396nV$$

$\sigma_W = \sqrt{S_{V,u} \cdot \Delta f_n} = 125 nV$ ← All'esame dobbiamo spiegare perché.

Con questi valori $\Delta T_{MIN} = 0{,}015\ °C$

Punto c)

Possiamo usare una frequenza + alta del segnale in modo da ridurre la componente 1/f
Non posso salire di freq all'infinito perché il preamp ha un polo a 100 kHz.

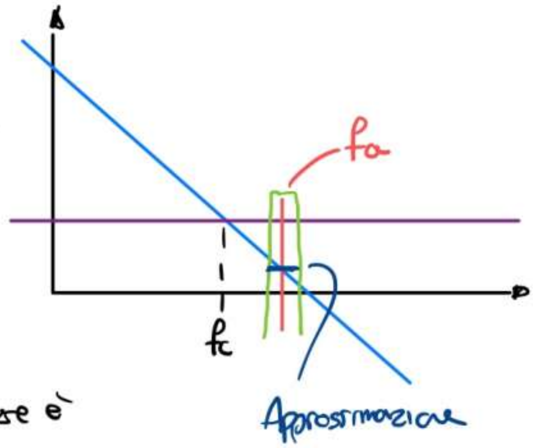
Perciò usiamo un $f_a = 10 kHz$ (che è maggiore della corner frequency così siamo felici)

Possiamo scegliere qualsiasi filtro.

Lock-in con Sin reference (uguale a quella della modulazione) e LPF con polo $f_{PLPF} \gg BW_{segnale}$ la banda del segnale è 0,5 Hz, noi prendiamo $f_{PLPF} = 10 Hz$.

Noi abbiamo la freq di modulazione del segnale molto vicino alla corner frequency, quindi non è ancora negligible. Usiamo la stessa tecnica di approssimazione vista prima

$$\sigma_{1/f} = \sqrt{2 \cdot S_{1/f}(f_a) \cdot \frac{\pi}{2} f_{PLPF}} = 39{,}6 nV$$



$$\sigma_W = \sqrt{2 S_W \cdot \frac{\pi}{2} f_{PLPF}} = 56 nV$$

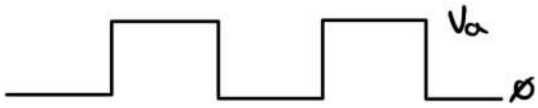
il 2 è dato dal lock-in

La minima temperatura che riusciamo a misurare è

$\Delta T_{MIN} = 0{,}002\ °C$

- Possiamo anche cambiare modulazione

SQUARE WAVE ON-OFF



Dobbiamo ricalcolare $P_{DISS} \leq P_{MAX}$

$$P_{DISS} = \left(\frac{V_a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{R_{T0}}$$

$$V_a < \sqrt{8 R_{T0} \cdot P_{MAX}}$$

il rumore è

$$N = \sqrt{S_{B,u} \cdot BW_{LPF}}$$

Ma il segnale così è è $\gamma \cdot V_a$, dove γ è un costante dato dalla temp, allora il segnale è

$$\gamma \sqrt{8 R_{TO} P_{MAX}}$$

Ma visto che usiamo il lock-in perdiamo metà del segnale

$$\frac{S}{N} = \frac{\gamma \sqrt{8 R_{TO} P_{MAX}}}{2\sqrt{S_{B,u} \cdot BW_{LPF}}}$$

Altra opzione: Modulazione $+V_a, -V_a$

$$P_{DISS} = \left(\frac{V_a}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_{TO}}$$ è come avere un valore costante

$$V_a \leq \sqrt{4 R_{TO} P_{MAX}}$$

se usiamo un VA con +/- Square wave, allora l'SNR è

$$SNR = \frac{\gamma \sqrt{4 R_{TO} P_{MAX}}}{\sqrt{S_{W,u} \cdot BW_{LPF}}}$$ che è di $\sqrt{2}$ meglio di quello precedente

Un'altra opzione ancora: Sinusoidal modulation + Lock in ampli

$$P_{DISS} = \left(\frac{V_a}{2\sqrt{2}}\right)^2 \frac{1}{R_{TO}}$$

$$V_a \leq \sqrt{8 R_{TO} P_{MAX}}$$

$$SNR = \frac{\gamma \sqrt{8 R_{TO} P_{MAX}}}{\sqrt{2 \cdot S_W \cdot BW_{LPF}}} = \frac{\gamma \sqrt{4 R_{TO} P_{max}}}{\sqrt{S_W BW_{LPF}}}$$

4·06·2021 Tutorial 3h

Preamplifier	Strain gauges
A_{pa}=200	R_S = 100 Ω
S_V^N = 4nV/Hz$^{1/2}$ white noise power density (unilateral)	Gauge Factor G = 2,5
S_I^N = 4pA/Hz$^{1/2}$ white noise power density (unilateral)	P_{MAX} =1 μW
f_{pa} = 160kHz upper band-limit (single pole)	
frequency corner 1/f on S_V = 500Hz	
frequency corner 1/f on S_I =1000Hz	

Two metal strain gauges are placed on a metal bar to measure extrusion and compression deformations and to compensate for the thermal effects on the sensors. The deformations to be measured can be both static and dynamic and you want to detect small deformations and track them over time sampling every 5ms. The maximum power dissipated on each sensor must be limited below 1 μW.

A differential preamplifier with the parameters specified above is used to pick-up the signal.

a) Select and explain the circuit configuration to be used to obtain the electrical signal that carries the deformation information. Select the parameters of the circuit to meet the requirements above reported and quantitatively evaluate the transduction factor from deformation (in microstrain) to electrical signal.

b) Select and discuss a filtering method to extract the signal with the required sensitivity. Select the filter parameters and evaluate the minimum deformation value that can be measured in this case.

The metal bar is connected to a motor rotating at about 2500 rpm and the induced vibration in the structure at the motor rotation frequency is to be measured. The minimum sensitivity required in this case is 10microstrain.

c) Select an additional filtering method that allows you to extract the vibration at the frequency of the motor from the overall deformation and measure it separately. Describe the structure and select the parameters of the apparatus to be used. Evaluate in these conditions the minimum amplitude of the deformation that can be measured.

d) discuss if and how it is possible to measure the harmonics of the signal coming from the vibrations induced by the motor with the selected acquisition chain. If it is possible, discuss and explain what is the maximum frequency of the harmonic that can be measured.

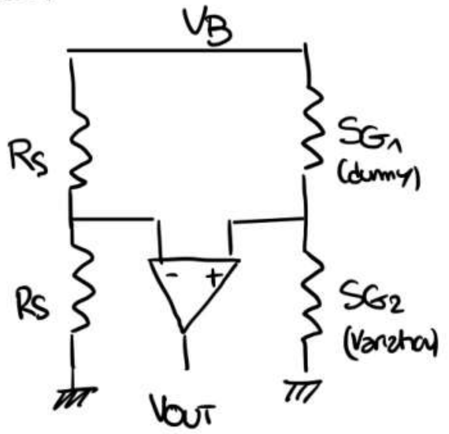
Extrusion & compession → Possiamo avere il segnale in 2 direzioni

Deformazioni statiche e dinamiche → segnali sia DC che AC

5ms → Shannon → $\frac{1}{2 \cdot 5ms}$ → 100Hz (l'informazione del segnale è dentro 100Hz)

Punto a)

Dobbiamo mettere i 2 sensori uno ortogonale all'altro e metterli tutti e 2 dallo stesso lato del ponte di Wetston in modo da eliminare la componente termica.



Se avessi potuto usare + di 2 strain gauge (4) li avrei messi dell'altro lato per doppiare il segnale

Con questo schema produciamo una tensione V_{OUT} del tipo

$$V_{OUT} = \frac{V_{BIAS}}{4} \cdot G \cdot \varepsilon$$

Noi non abbiamo nessuna info sul tipo di V_{BIAS}.

Se V_{BIAS} è costante, allora

$$P_{DISS_{SG}} = \left(\frac{V_{BIAS}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{R_S} < P_{MAX} \longrightarrow V_{BIAS_{MAX}} \leq 20mV$$

è un approccio conservativo visto che abbiamo supposto V_{BIAS} costante

INFO UTILE EXTRA
Se posso scegliere la bias voltage modulare è bene perchè togliamo il rumore, se non possiamo modulare la soluzione è usare uno zero setting

Noi sappiamo che

$$V_{OUT} = \frac{V_{BIAS}}{4} \cdot G \cdot \varepsilon$$

allora

$$F = \frac{V_{BIAS}}{4} \cdot G = \frac{20mV}{4} \cdot 2{,}5 = 12{,}5\ mV/strain$$

allora otteniamo $F = 12{,}5\ nV/\mu strain$

• Punto B

• Vogliamo una sensitività di 100 μstrain (data, ma c'è sul testo xè dimenticata)

$V_{diff} = 12,5 \text{ nV}/\mu\text{strain}$

Dobbiamo creare un metodo per fare il filtraggio.
Dato questi dati capiamo che dobbiamo cambiare la VBIAS perché con uno zero setting non riusciamo ad avere queste sensitività.

Per il rumore sappiamo che dobbiamo portare il rumore di corrente in uno di tensione allora

$S_V' = S_I \cdot R_S$ → che è comunque trascurabile rispetto al solo rumore di tensione

Poi moduliamo il segnale di Bias a $f_{MOD} \ll f_{PA}$. e maggiore di $f_{CU} = 500\text{Hz}$
Decidiamo di usare la sinusoidal modulation.

Prendiamo ad esempio una $f_{MOD} = 10\text{KHz}$ e mettiamo VBIAS sinusoidale con il picco di VBIAS

$$V_{BIASpeak} = \sqrt{2} \cdot 20\text{mV}$$

perché non siamo + in rottura e la potenza dissipata è + bassa.

Usiamo un lock in amp con demodulazione sinusoidale e usiamo un LPF con frequenza del polo a

$$f_{PLPF} = 10 \cdot BW = 1\text{KHz}$$

Allora

$$\sigma = \sqrt{2(S_V + 4kTR_S + S_I \cdot R_S^2) \cdot \frac{\pi}{2} f_{PLPF}} = 235 \text{ nV}$$

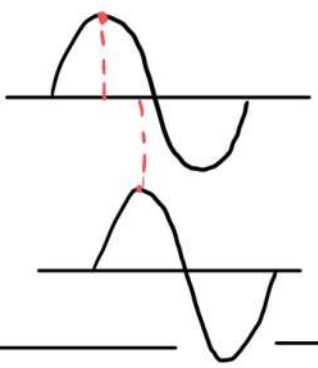
e quindi

$\varepsilon_{min} = 13,3 \ \mu\text{strain}$ (che è molto dentro la richiesta)

(Ricordiamo che abbiamo cambiato VBIAS e quindi il fattore F è cambiato)

ALTRA INFO

Se ho una differenza di fase tra modulatore e demodulatore



Non prendo più sul picco ma in un altro punto

allora posso rifasare il demodulatore per riprendere un po' del segnale

Usando un secondo lock-in

Punto C

Motore che ruota a 2500 rpm (circa a 2500 rpm)

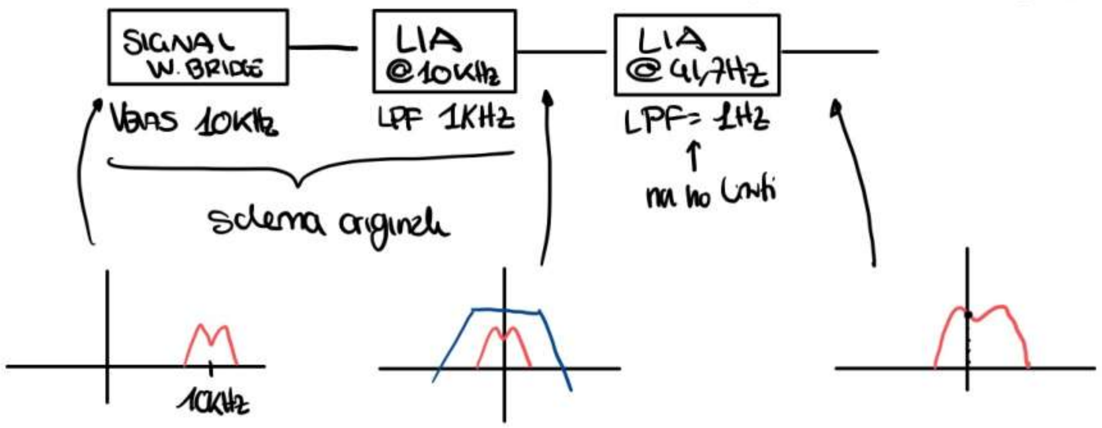
$f_{ROTOR} = 41,7\ Hz$ ← che è dentro la banda originale del segnale (che è 100 Hz)

Vogliamo misurare questo specifico segnale dal resto
Vogliamo una sensibilità di almeno 10 μstrain.

Dobbiamo modificare il nostro sistema di acquisizione per estrarre il segnale a 41,7 Hz

Come possiamo estrarre questo segnale?
Filtro RLC difficile da tunare in modo specifico
Allora usiamo un LIA ma come facciamo

in pratica aggiungiamo solo un altro demodulatore



Riportiamo in DC la frequenza 41,7 Hz

Qual'è il vantaggio di un 2° lock in amp? e quali sono gli svantaggi?
Non ho il rumore 1/f perché viene tolto dal primo lock-in. il lato negativo è che riduco l'SNR di $\sqrt{2}$ perché e modulazione e demodulazione sinusoidali

il rumore all'output del 2° lock in è

$$\sigma_{n_{OUT_2}} = \sqrt{4 \cdot S_{v,TOT} \cdot \frac{\pi}{2} f_{LPF}}$$ — del 2° LIA $\qquad \varepsilon_{MIN} = 1,14\ \mu strain$

4 perché un 2 è dato dal primo LIA e 2 del secondo LIA

NON ABBIAMO USATO UN SOLO LIA @ 41,7 Hz PERCHÈ IN QUEL CASO SE MODULAVAMO A 41,7 Hz AVREMMO AVUTO ANCHE IL RUMORE 1/f CHE SAREBBE STATO PREDOMINANTE

• Punto D

Dire se possiamo misurare tutte le armoniche del segnale dato del rumore e fino che armonica
Con l'acquisizione schema visto sopra

(in questo caso non sappiamo la forma del segnale del motore)

Noi consideriamo l'output del primo LIA, che ha uscita con un LPF a 1KHz.
Noi sappiamo che l'observation time è 5ms e quindi il segnale massimo in ingresso è 100 Hz (observation time è sulla nostra misura dopo i LIA).
Allora possiamo vedere nel primo output segnali fino a 100 Hz e quindi possiamo vedere
- La prima armonica a 41,7 Hz
- La seconda armonica a 83,4 Hz

e basta perché sono le uniche 2 armoniche nei 100 Hz

Come possiamo prendere una 3ª armonica cambiando un componente?
Se cambiamo LPF del secondo LIA abbiamo che 41,7 Hz sono stati portati a ∅Hz, 83,4 a 41,7 e 125,4 a 83,4Hz. Però possiamo prendere anche la 3ª armonica cambiando LPF.