

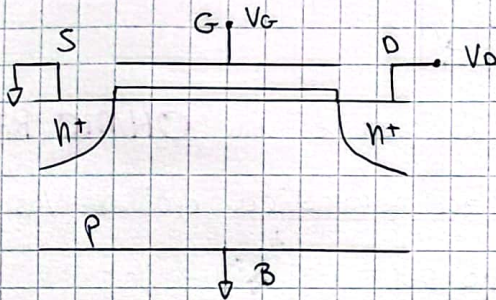
# **ANALOG CIRCUIT DESIGN**

**Prof. Lacaïta Andrea L.**  
**A.A. 2023/24**

**Burattini Michelangelo**

# MOSFET OPERATION

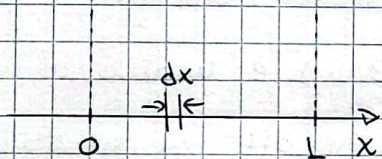
deriviamo la caratteristica I-V del MOSFET (n-type) ponendo a GND il substrate e il source



riammo nel caso in cui  $V_g > V_T$  tensione di soglia  $V_T = 0,6V$

$$V_{ov} = V_g - V_T$$

$$K = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L} \quad \text{con} \quad \frac{1}{2} \mu C_{ox} \cong 5 \frac{\mu A}{V^2}$$



L e' la lunghezza del MOSFET

il potenziale  $V_c(x)$  aumenta progressivamente lungo x; scrivendo la legge di Ohm ho che:

$$dV_c = I_{os} \cdot dR \rightarrow \text{resistenza elementare}$$

$$= I_{os} \frac{dx}{\underbrace{q n(x) W \Delta}_{\substack{\text{cross-section} \\ \text{densita' elettroni lungo il canale} \\ \text{mobilita' elettroni}}}}$$

→ densita' degli elettroni

$$Q_n(x) = q n(x) \Delta \quad \text{rappresenta le } \text{CARICHE LIBERE NEL CAVALE PER UNIT AREA}$$

$$\Rightarrow dV_c = I_{os} \frac{dx}{Q_n(x) \mu W}$$

varia lungo il canale perche' varia  $V_c$

$$\Rightarrow Q_n' \cong C_{ox}' (V_g - V_c - V_T)$$

integro

$$\int_0^{V_{os}} \mu C_{ox}' W (V_g - V_T - V_c) dV_c = \int_0^L I_{os} dx$$

↓  $0 \leq V_c \leq V_o \rightarrow$  al drain e' specifico per l'ossido

↓ CHARGE SHEET APPROX (vedi electron)

$$\mu C_{ox} \left[ (V_G - V_T) V_{DS} - \frac{V_{DS}^2}{2} \right]_0^{V_{DS}} = I_{OS} L$$

da cui esplicito la corrente  $I_{OS}(V_{OS})$ :

$$I_{OS} = \mu C_{ox} \frac{W}{L} \left[ (V_G - V_T) V_{OS} - \frac{V_{OS}^2}{2} \right]$$

questa equazione vale solo quando il mos e' in **OHMIC REGION**

in cui la corrente ha una dipendenza parabolica dalla  $V_{OS}$

il vertice che ho per  $V_{OS} = V_{OS}^{SAT}$ , ce l'ho per

$$V_{OS}^{SAT} = V_{GS} - V_T \quad \text{ed e' detta tensione di saturazione.}$$

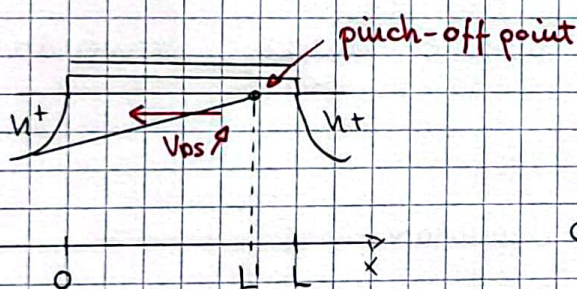
dopo tale tensione l'equazione precedente non ha piu' senso fisico

e non e' piu' valida (perche' la densita' di elettroni diventa anche negativa)

→ il canale inizia a restringersi e il transistor non e' piu' un

resistore uniforme (non possiamo usare Ohm) e mano a mano che

$V_{OS} > V_{GS} - V_T$  aumenta il punto di "pinch-off" si sposta verso il source



ho meno elettroni lungo il canale (diminuisce la densita') passando da source a drain, ma aumenta la loro velocita'

flusso costante (di carica)

il campo  $E$  aumenta lato drain

$$0 \leq L' \leq L$$

possiamo sempre applicare Ohm ai capi del resistore uniforme  $0 \rightarrow L'$

e otteniamo l'espressione della **CORRENTE DI SATURAZIONE**

$$I_{OS}^{SAT} = \frac{1}{2} \mu C_{ox} \frac{W}{L'} (V_G - V_T)^2$$

al diminuire di  $L'$ , la corrente aumenta leggermente (infatti  $L-L'$  rimane piccola)

→ la corrente e' inversamente proporzionale a  $L'$

→ posso descrivere gli effetti indotti dalla dipendenza di  $L'(V_{OS})$  con una

approssimazione del primo ordine (usando Taylor) attorno a  $\begin{cases} V_{OS} = V_{OS, SAT} \\ L' = L \end{cases}$

possiamo considerare la corrente come un flusso di cariche

$I_{os} \propto nV$  e' proporzionale alla densita' di cariche e alla loro velocita

- >  $V$  aumenta se ho meno cariche perche' e  $n$  al campo elettrico
- >  $n$  diminuisce se il canale si restringe (o scompare)
- >  $E$  aumenta perche' deve compensare l'assenza di cariche

per calcolare quindi l'aumento della  $I_{os}$  rispetto alla  $I_{os}^{SAT}$  faccio:

$$L'(V_{os}) = L'(V_{os}^{SAT}) + \left. \frac{dL'}{dV_{os}} \right|_{V_{os}=V_{os}^{SAT}} (V_{os} - V_{os}^{SAT}) + \dots \quad (\text{approx 1 ordine})$$

$$= \frac{1}{L} \left[ 1 - \frac{1}{L} \left. \frac{dL}{dV_{os}} \right|_{V_{os}=V_{os}^{SAT}} (V_{os} - V_{os}^{SAT}) \right]$$

poiu'  $\lambda = \frac{1}{L} \left. \frac{dL}{dV_{os}} \right|_{V_{os}=V_{os}^{SAT}}$  [V<sup>-1</sup>] modulation channel coeff.

e definisco CHANNEL MODULATION VOLTAGE  $V_A = \frac{1}{\lambda}$

otengo cosi' la corrente in REGIONE DI SATURAZIONE

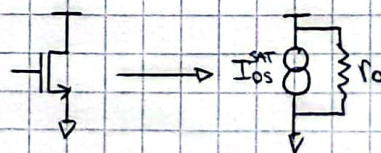
$$I_{os} = I_{os}^{SAT} [1 + \lambda (V_{os} - V_{os}^{SAT})]$$

poiche'  $\lambda$  e' un parametro che dipende solo dalla geometria del mos (da  $L$  e da  $L'$  che dipende da  $V_{os}$ ), a parita' di  $V_{os}$ :

- + e' lungo il mos e minore e' la variazione relativa della lunghezza

N.B. un mosfet che lavora in regione di saturazione puo' essere modellato come un generatore di corrente con una resistenza di out pari a  $r_o$  | (ideale)

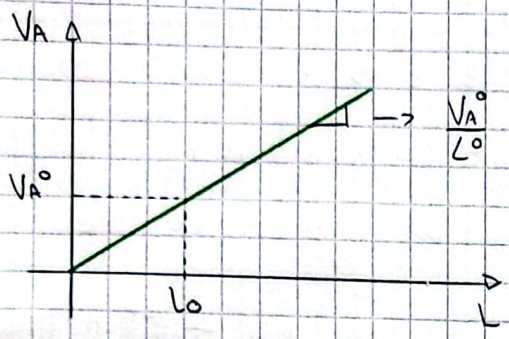
$$r_o = \left( \frac{\partial I_{os}}{\partial V_{os}} \right)^{-1} = \frac{V_A}{I_{os}^{SAT}}$$



inversamente proporzionale alla corrente di bias e direttamente proporzionale alla tensione di modulazione del canale  $V_A$

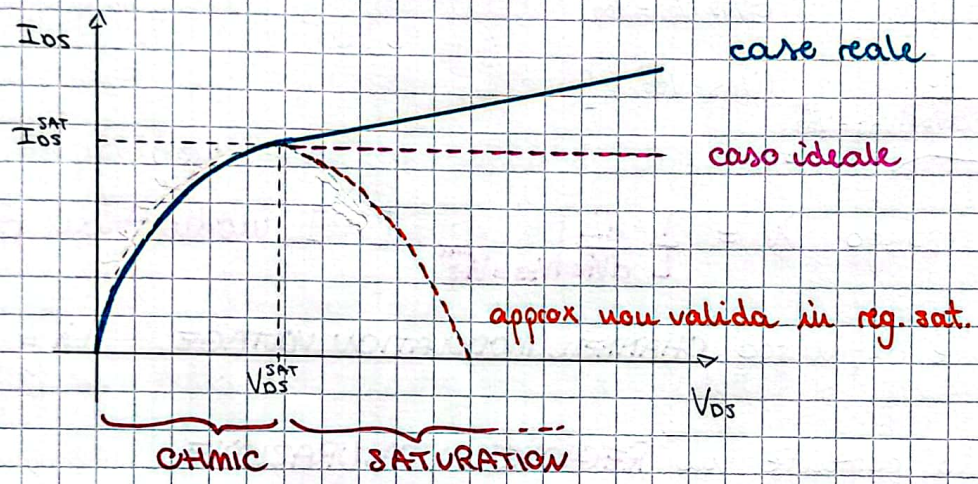
ho poi che  $V_A$  dipende linearmente da  $L$  (e può essere progettato e controllato)

$V_A = \frac{V_A^0}{L^0} L$  che per la nostra tecnologia valgono  $L_0 = 0,35 \mu m$   
 $V_A^0 = 7V$



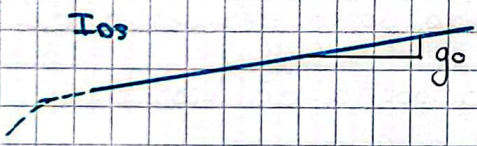
se  $L_0$  raddoppia allora  $V_A$  raddoppia.  
 se  $L$  è minore allora  $V_A$  è minore

quindi graficamente la corrente  $I_{os}(V_{DS})$  è:



consideriamo la caratteristica in regione di saturazione:

la pendenza della retta vale



$$g_0 = \frac{1}{r_0}$$

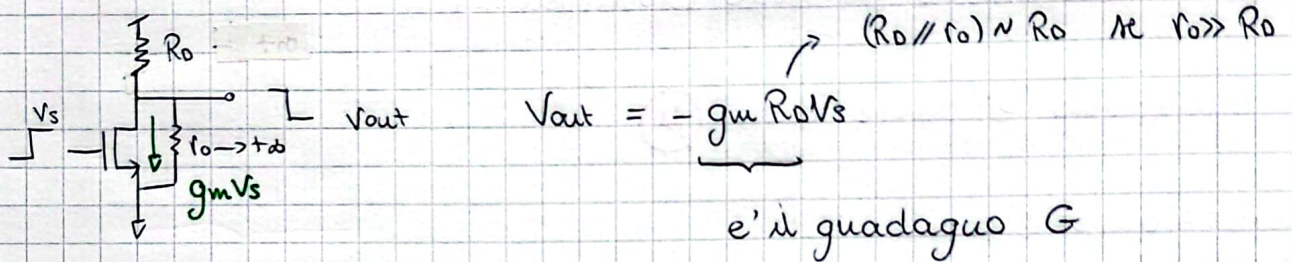
# GUADAGNO

in saturazione la **TRANSCONDUCTANZA** e' data da

$$g_m = \frac{\partial I_{DQ}}{\partial V_{GS}} = 2k(V_G - V_T) = \frac{2I_{DQ}}{V_{ov}} = 2\sqrt{kI_{DQ}}$$

dove  $V_{ov}$  e' la **tensione di overdrive**  $V_{ov} = V_G - V_T$

se considero un MOS in COMMON SOURCE ho che una perturbazione di  $V_G$  viene riportata all'uscita | :

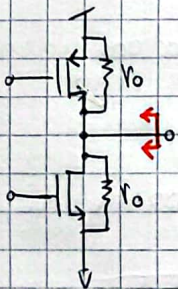


c'e' un modo per aumentare  $G$ ?

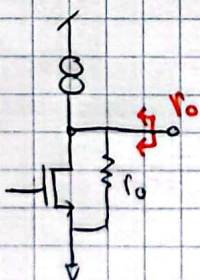
$$G = g_m R_o = \frac{2 \cdot \overbrace{I_{DQ}}^{\text{voltage drop in dc}} \cdot R_o}{V_{ov}}$$

l'unico modo e' aumentare  $R_o$ : aumenta anche il drop e per non entrare in dominico aumento il power supply  $\rightarrow$  dissipa + potenza

$\rightarrow$  altrimenti posso usare un generatore di corrente (ideale) e lo posso fare con un altro MOS (es. p-type)



$R = \frac{r_o}{2}$  e' un partitore: affinché  $R$  sia  $= r_o$  posso aumentare  $r_o$  del MOS sopra (allungando  $L$  a  $1 \mu m$ ) in modo tale che si avvicini al caso ideale:



$$\Rightarrow |G| = g_m r_o \rightarrow G = g_m r_o \text{ e' il guadagno}$$

massimo che posso avere: **MAXIMUM TRANSISTOR GAIN**

(lo ottengo quando  $R_o \rightarrow +\infty$ ), oltre non posso avere a causa della resistenza di output del MOSFET

analizziamo come cambia  $G$  in funzione di altri parametri

$$G = g_m r_o = \frac{2I_{D0}}{V_{ov}} \cdot \frac{V_A}{I_{D0}} \quad \text{il guadagno massimo non dipende da } I_{D0} \text{ (e anche da } V_A, \text{ quindi)}$$

$$= \frac{2}{V_{ov}} \frac{V_A}{L} \rightarrow \text{ma dipende dalla lunghezza}$$

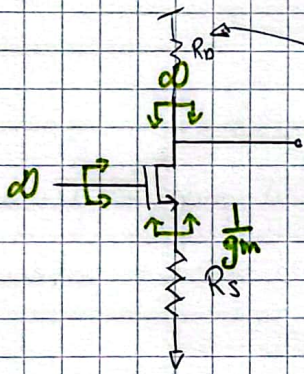
Ha senso cercare di aumentare il guadagno; non posso usare + amplificatori?

$|S_I|$  ha senso perché ogni ampl. introduce un polo che spesso non è voluto (soprattutto se sono molti poli...)

il guadagno è anche detto  $\mu$

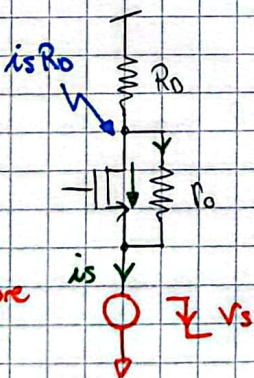
• analizziamo 2 casi:

1)



$\rightarrow$  vedo sempre  $\frac{1}{g_m}$  anche se ho  $R_o$  (è il caso ideale in cui  $r_o \rightarrow \infty$  e infatti non c'è)

2) e se ora ho anche il ponte con  $r_o$  ...? ( $r_o$  è finita ora)



generatore di test

- attraverso il transistor (generatore ideale di corrente) scorre  $g_m v_s$

- che mi abbassa il nodo di DRAIN di  $i_s R_o$

$\Rightarrow$  attraverso  $r_o$  scorre  $\frac{V_s - i_s R_o}{r_o}$

$$\Rightarrow i_s = g_m v_s + \frac{V_s - i_s R_o}{r_o}$$

$$\frac{V_s}{r_o} + g_m v_s = i_s \left( \frac{R_o}{r_o} + 1 \right) \quad \text{otengo così}$$

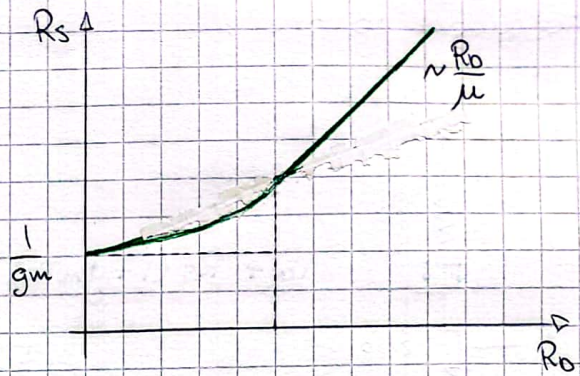
$$\frac{V_s}{i_s} = \frac{\frac{R_o}{r_o} + 1}{\frac{1}{r_o} + g_m}$$



$$R_s = \frac{R_o + r_o}{1 + g_m r_o}$$

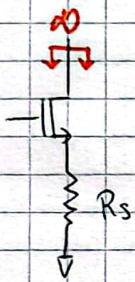
RESISTENZA VISTA DAL SOURCE

se  $R_o \rightarrow 0$ , allora  $\frac{V_s}{i_s} \approx \frac{1}{g_m}$   
 se  $R_o = r_o$  "  $\frac{V_s}{i_s} \approx \frac{2}{g_m}$   
 se  $R_o \gg r_o$  "  $\frac{V_s}{i_s} \approx \frac{R_o}{\mu}$   
 ↓  
 Max gain



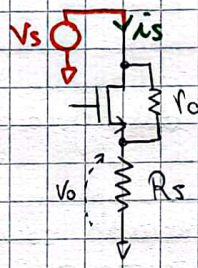
dall'altro lato ho che:

caso ideale con  $r_o \rightarrow \infty$ :



ma con  $r_o$ :

caso reale con  $r_o$  finita:



nel transistor scorre

$$g_m i_s R_s$$

in  $r_o$  scorre  $\frac{V_s - i_s R_s}{r_o}$

otengo analogamente a prima che:

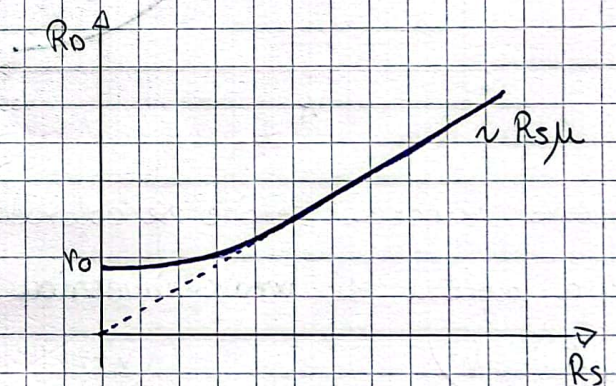
$$v_o = i_s R_s \quad i_s = \frac{V_s - v_o}{r_o} - g_m v_o$$

$$R_o = r_o + R_s (1 + g_m r_o)$$

RESISTENZA VISTA DAL DRAIN

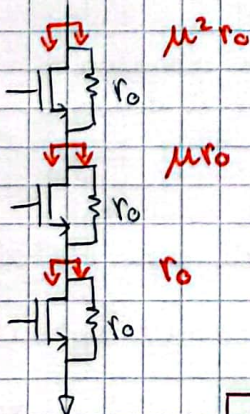
se  $R_s \rightarrow 0$ , allora  $R_o \approx r_o$

se  $R_s \gg r_o$ , allora  $R_o \approx R_s (1 + g_m r_o)$



(CASCODE)

mettendo uno sopra l'altro vari transistor ottengo una resistenza verso massa che e' data dal prodotto di  $r_o$  per il guadagno elevato al numero degli stadi che ho (massimo)

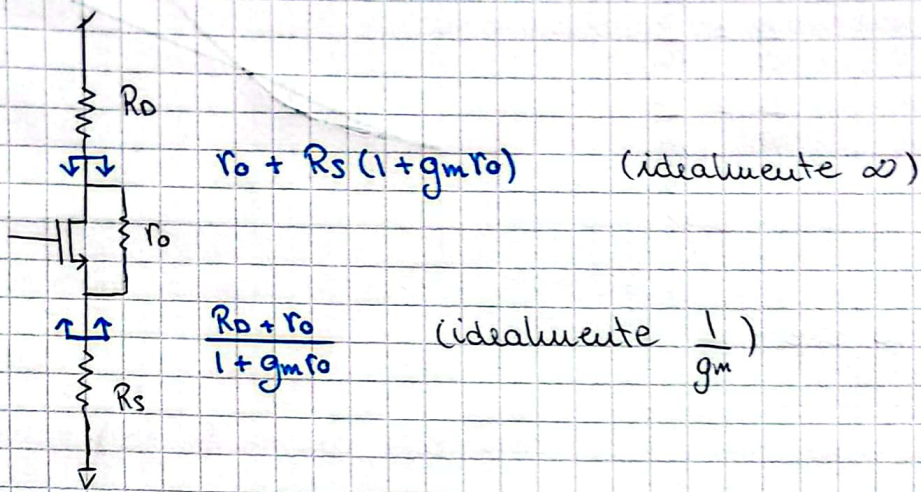


cio' ha un costo: altrimenti non riesco a fare bene il bias  
 - devo aumentare la tensione di alimentazione  
 cause | siamo in saturazione  
 => + potenza dissipata  
 => - dynamic range del segnale  
 con  $N$  transistori

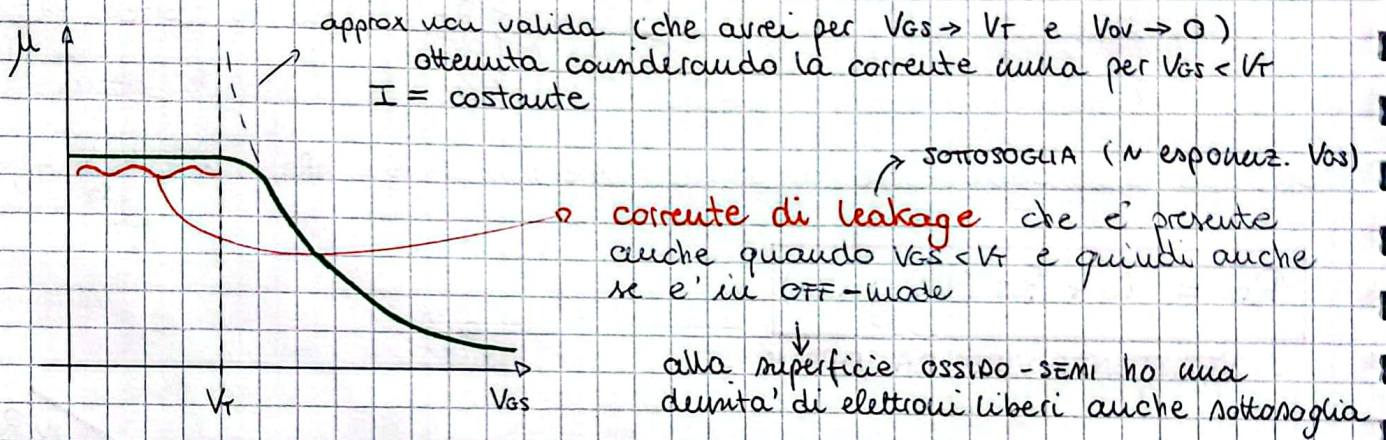
$$P_{\text{max}} = I_{\text{on}} \mu^{(n-1)}$$



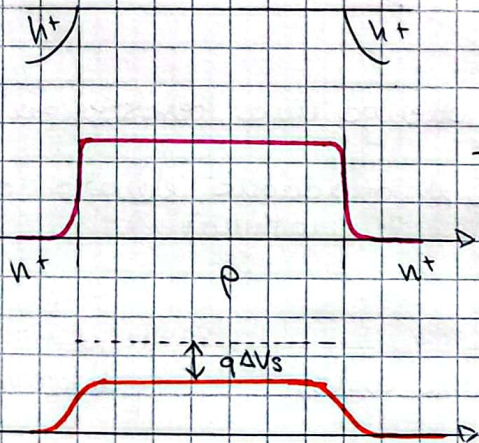
ricapitolando ho che:



se grafico l'andamento del guadagno ho una funzione del tipo:



questo succede perche' se consideriamo il gap (barriera) di potenziale nella regione di weak-inversion:

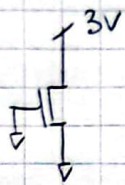


$\rightarrow$  se aumento  $V_G$  le lacune vengono respinte dal canale per l'effetto di repulsione generato dalle cariche positive

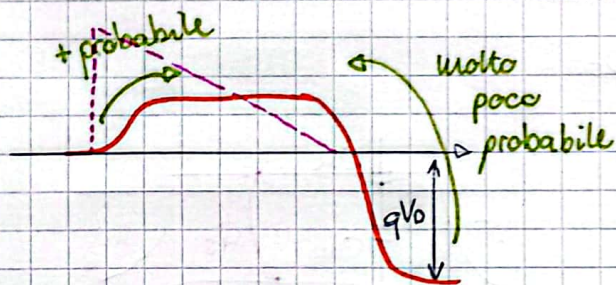
$\downarrow$   
 la barriera si abbassa anche prima che il canale sia formato

$\rightarrow$  in weak-inversion ho una corrente molto bassa e quindi non c'e' alcuna caduta ohmica significativa lungo il canale e il profilo del potenziale rimane abbastanza costante; tuttavia ho un gradiente di concentrazione degli elettroni (vedi Electron devices)

questo significa che se ho:



idealmente la corrente non dovrebbe scorrere, in realtà scorre (in piccola parte) perché:



nel drain la barriera di potenziale diventa più alta e la probabilità che una carica la superi è quasi nulla; cosa non vera per l'altro lato

e quindi si genera una corrente di cariche non dovuta al campo  $E$  ma al gradiente di concentrazione delle cariche nel canale

→ anche aumentando  $V_0$  la barriera rimane

→ lacune/elettroni passano solo grazie all'energia termica

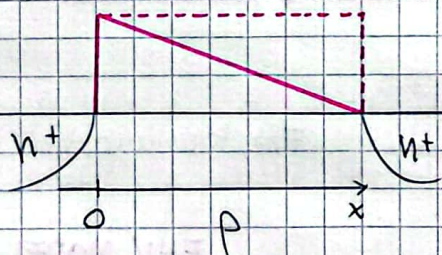
@ p-side ho: 
$$\begin{cases} n = \frac{n_i^2}{N_a} \quad (\text{senza } \phi_s) \\ n = \frac{n_i^2}{N_a} e^{\frac{q\phi_s}{kT}} \end{cases}$$

$$\frac{kT}{q} = 25 \text{ mV}$$

se abbassiamo la barriera, il numero di  $e^-$  che riesce ad attraversarla aumenta esponenzialmente

⇒ se la barriera è uguale, allora la densità è uguale da entrambi i lati perché la probabilità è la stessa

⇒ se aumento  $V_0$  la densità assume forma triangolare



$n(0) = n_0 e^{\frac{q}{kT} \phi_s}$  Max @ S-SIDE  
 $n(L) \approx 0$  @ D-SIDE

corrente dovuta all'agitazione termica delle cariche  
↑

dalla Legge di Fick ricavo la corrente 
$$I_{DS} \sim q D n \frac{n_0 e^{\frac{-q}{kT} \phi_s}}{L}$$

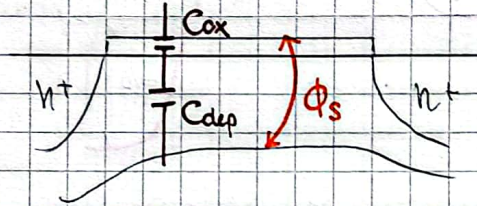
e quindi ricavo che in OFF-state ho una corrente (di leakage)

$$I_{os} = I_0 e^{\frac{q\phi_s}{kT}} \rightarrow \phi_s \text{ e' la caduta di potenziale sul canale: non e' costante e varia leggermente lungo } x \text{ ed e' una frazione di } V_g$$

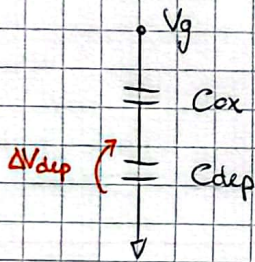
pongo  $I_0 = I^{th} e^{-\frac{q\psi_s}{kT}}$  e posso riscrivere  $I_{os}$

$$I_{os} = I^{th} e^{\frac{q}{kT}(\phi_s - \psi_s)} \quad \text{con } \psi_s > \phi_s$$

↓  
corrente alla soglia



→ posso notare poi che lo strato di ossido e di dep. reg. sono due capacita' in serie:



$$C_{ox} = \frac{\epsilon_{ox}}{t_{ox}} A$$

$$C_{dep} = \epsilon_{si} \frac{A}{W}$$

per ricavarli  $V_{dep} = V_g \frac{C_{ox}}{C_{ox} + C_{dep}} = \frac{V_g}{1 + \frac{C_{dep}}{C_{ox}}}$  dove

$$n = 1 + \frac{C_{dep}}{C_{ox}}$$

$$\Rightarrow \Delta V_s = \phi_s - \psi_s = \frac{V_g - V_T}{n} \quad \text{e quindi}$$

$$I_{os} = I_{os}^{th} e^{\frac{q}{n k T} (V_g - V_T)}$$

(e' sempre un'approx. perche' al variare di  $V_g$  anche lo spessore della dep. reg. varia)

va bene x piccolo regime!

la transconduttanza sotto la soglia vale:

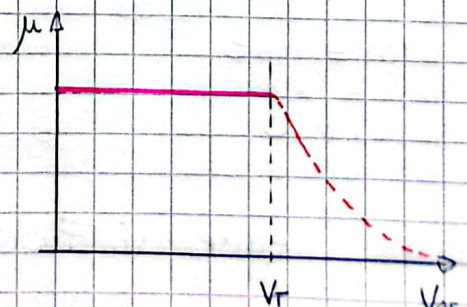
$$\frac{d \log I_{os}}{d V_g} = \frac{d}{d V_g} \left( \frac{q(V_g - V_T)}{n V_T} \right) = \frac{q}{n V_T}$$

Enz, Krummacher, Vittoz (1995)

$$\Rightarrow g_m = \frac{d I_{os}}{d V_g} = \frac{q}{n k T} I_{os}^{th} e^{\frac{q}{n k T} (V_g - V_T)}$$

EHV MODEL

$$\text{e quindi } \mu = \frac{q}{n k T} I_{os}^{th} \cdot \frac{V_A}{I_{os}} = \frac{V_A}{n V_T} \quad (\neq +\infty)$$



posso definire 3 regioni come nella seguente tabella:

	IC	$V_{ov} \rightarrow$ indica il range di Bias
WEAK INVERSION	$< 0,1$	$< -0,1V$
MODERATE INVERSION	$0,1 < IC < 10$	$-0,1 < V_{ov} < 0,1V$
STRONG INVERSION	$> 10$	$> 0,1V$

$\rightarrow$  in prossimità della soglia esiste un regime di "crossover" tra quello di inversione forte e quello di weak-inversion

$\rightarrow$  il regime intermedio è detto **moderate inversion**



nella maggior parte dei casi la polarizzazione ottimale per ottenere un ampio guadagno di tensione senza compromettere troppo la banda si trova proprio in questo regime

$\rightarrow$  nella tabella i regimi vengono classificati a seconda del valore di IC

**IC: inversion coefficient**

$$IC = \frac{I_D}{I_S} = \frac{I_D}{2n\mu C_{ox} V_T^2 \frac{W}{L}}$$

$\nearrow$  corrente di drain @ BIAS  
 $\downarrow$  corrente di saturazione

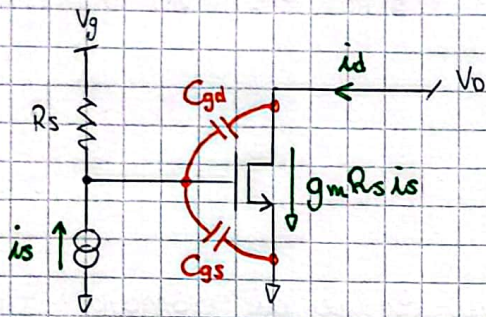
secondo il modello EKV, la transconduttanza nell'inversione moderata/debole è data dalla seguente relazione

$$g_m = \frac{I_D}{nV_T} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4IC}}$$

esame 05/09/16

# BANDA E FREQUENZA DI TAGLIO

consideriamo il seguente setup di misura:



sono presenti delle capacit , come gi  visto in precedenza (quella substrato-drain non conta visto che   connessa a due nodi equipot.)

$$C_{gs} = \frac{2}{3} C_{ox}' WL = \frac{2}{3} C_{ox}$$

x ubi vale  $5 \text{ fF } \mu\text{m}^{-2}$

per il segnale  $C_{gd}$  e  $C_{gs}$  sono in parallelo  $\Rightarrow$  generano un polo a

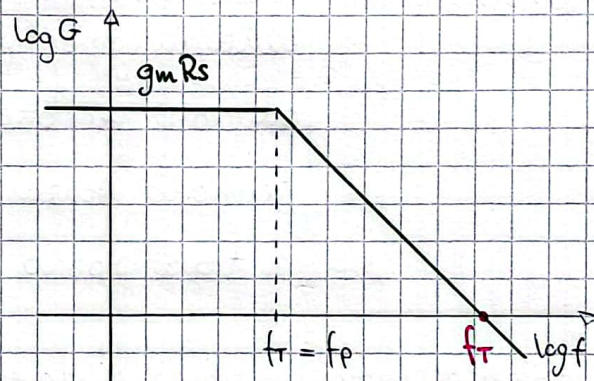
$$f_p = \frac{1}{2\pi R_G (C_{gs} + C_{gd})}$$

trasf. unitario

$$GBWP = \frac{g_m}{2\pi (C_{gs} + C_{gd})} = f_T$$

che posso riscrivere come

$$f_T = \frac{2k' \frac{W}{L} V_{ov}}{2\pi (C_{gs} + C_{gd})} \underset{C_{gs} + C_{gd} \approx C_{ox} WL}{=} \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{L^2} V_{ov} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu}{L} \frac{V_{ov}}{L} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mu E}{L} = \frac{1}{2\pi} \frac{V_{drift}}{L} = \frac{1}{2\pi \tau_E}$$



wolputa' campo medio nel chan.

transit time

$\Rightarrow$  + corto   il canale maggiore    $f_T$

$\Rightarrow$  se l'impulso (es. ret.) si spegne prima che la corrente raggiunga il

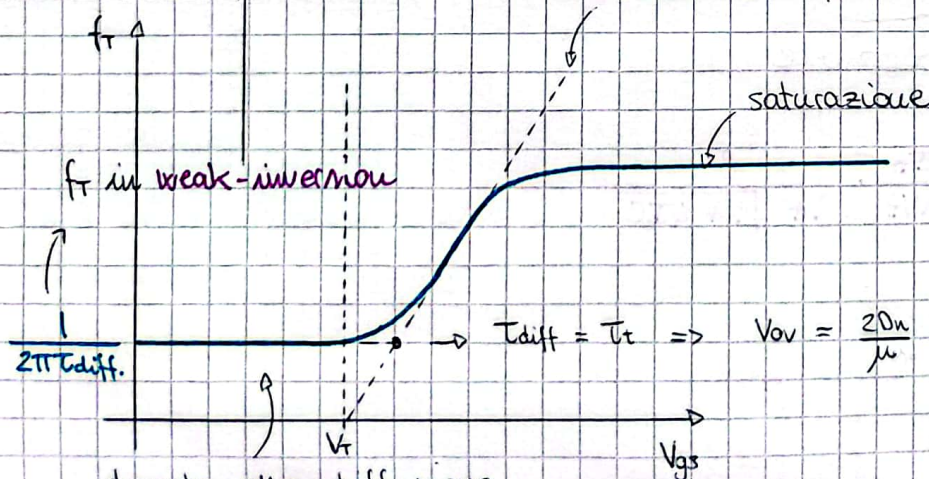
DRAIN, in un tempo  $\tau_E$ , allora essa non genera nulla in uscita

$$J_{n,diff} = qDn \frac{n(0)}{L} \rightarrow \text{corrente di diff.}$$

$$Q' = q/2 n(0) \cdot L \rightarrow \text{carica e- per unit area dovuta al drift}$$

$$\tau_{diff} = \frac{Q'}{J_{n,diff}} = \frac{L^2}{2Dn}$$

in weak-inversion



$$\tau_{diff} = \tau_E \Rightarrow V_{ov} = \frac{2Dn}{\mu} = \frac{2kT}{q} = 2V_{th}$$

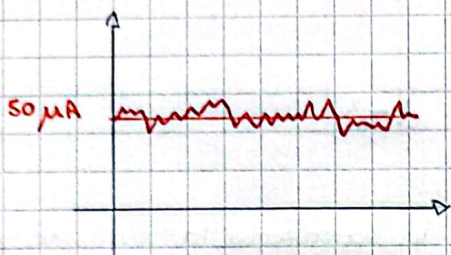
cambia il processo dominante (diffusion / drift)

# ELECTRONIC NOISE

ogni carica, sopra allo  $\phi k$ , oltre alla velocità di drift ha sempre una componente dovuta alla temperatura che genera delle oscillazioni attorno al valore atteso di corrente o tensione

no anche un disturbo che però posso eliminare (dct)

per cui vale la sovrapposizione degli effetti:

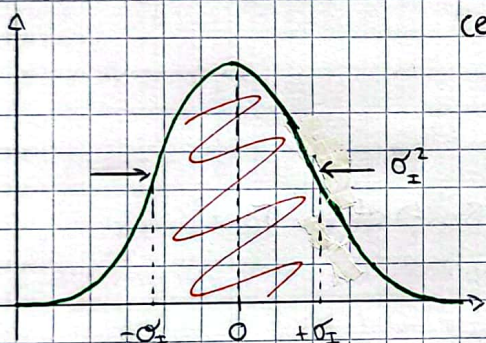


$$i_d(t) + n(t)$$

x definizione

è imprevedibile perché è dato da fluttuazioni statistiche (rumore che ha  $\langle n(t) \rangle = 0$ )

il rumore può essere analizzato con un approccio statistico: le ampiezze delle oscillazioni hanno una distribuzione gaussiana a valore medio nullo (e con parametri non dipendenti dal tempo)

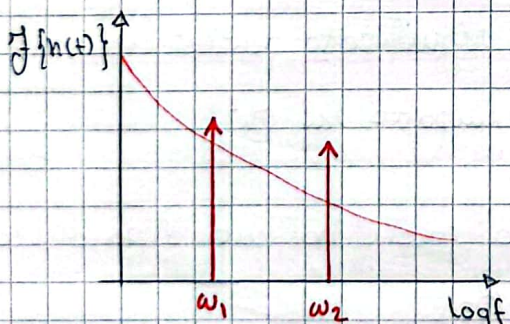


68% dei campioni (cade dentro)

$$\sigma_I^2 = \langle n(t)^2 \rangle \quad [A^2 \text{ oppure } V^2]$$

$$\left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}} \right)$$

lo spettro di tale rumore è dato da:



analisi due componenti  $\omega_1$  e  $\omega_2$

$$A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

$$\langle [\dots]^2 \rangle$$

$$\langle A_1^2 \sin^2(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2^2 \sin^2(\omega_2 t + \varphi_2) + 2A_1 A_2 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \rangle$$

$$= \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + 0$$

**potenza rumore**

↳ le armoniche a freq. diverse sono ortogonali  $\Rightarrow$  valore medio nullo

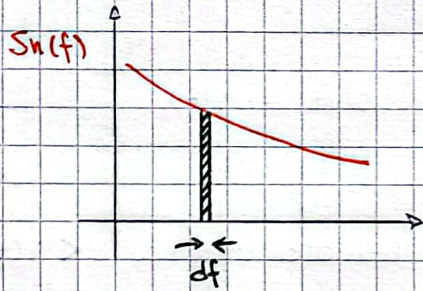
$\Rightarrow$  la potenza del rumore è data dalla somma delle potenze delle singole componenti ad ogni frequenza

che nel caso di uno spettro continuo sono:

$$\sigma_n^2 = \langle N^2(t) \rangle = \langle X_1^2 \rangle + \langle X_2^2 \rangle + \dots = \int_0^{+\infty} S_n(f) df$$

dove  $S_n(f)$  e' definito come **POWER SPECTRAL DENSITY (PSD)**  $[A^2 Hz^{-1}] \cdot [V^2 Hz^{-1}]$

$\Rightarrow S_n(f) df$  e' il contributo elementare di quella componente (infinitesima) al rumore:



$$S_n(f) df = d\sigma_n^2$$

↓  
rappresenta il rapporto tra la varianza dovuta alle componenti di rumore all'interno della larghezza di banda elementare  $df$  e la banda stessa

posso modellare il PSD come un generatore ideale (di corrente o tensione) considerando sempre il  $\sigma_n^2$  (QUADRATO!) perche  $\sigma_n = 0$  e poi devo riferirmi alla potenza

A block diagram showing a system with a transfer function  $T(j\omega)$ . The input is a noise source represented by a circle with a plus sign, labeled  $S_n(f) df = d\sigma_n^2$ . The output is labeled  $\int |T(j\omega)|^2 S_n(f) df = \sigma_{out}^2$ .

↓  
la FDT e' un numero complesso  $\Rightarrow$  modifica  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ampiezza} \\ \text{fase} \end{array} \right.$  del segnale in ingresso

$\rightarrow$  per quanto riguarda il rumore la fase non ha significato perche' siamo interessati alla potenza media ed essa non ha impatto su  $\sigma_n^2$

$\rightarrow$   $\sigma_n^2$  caratterizza l'ampiezza del rumore, ma poiche' ho una dipendenza anche dalla frequenza e' completo usare la PSD

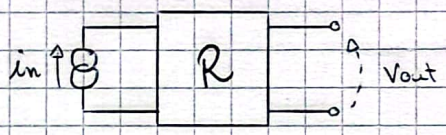
$\rightarrow$  vediamo di ricavare il rumore dei componenti elettronici e indagare la dipendenza dalla frequenza

**Δ rumore di un resistore** (e' un caso di riferimento)

molto rapide (sps) e quindi wide-band

la legge di Ohm di un resistore e'  $v(\omega) = R(\omega) i(\omega)$   
 analogamente posso ricavarmi l'equivalente per il rumore →

ho delle fluttuazioni date dal moto Browniano degli e<sup>-</sup> nel resistore



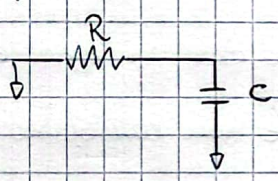
$$\langle i_{in}^2 \rangle |R(\omega)|^2 = \langle v_{out}^2 \rangle$$

$$\int_{-W}^W S_i(f) df |R(\omega)|^2 = \int_{-W}^W S_{out}(f) df$$

$$\Rightarrow \langle v_c^2 \rangle = \int_0^{+\infty} W \left| \frac{1}{1+j\omega\tau} \right|^2 df = \frac{W}{2\pi\tau} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\omega^2\tau^2} d(2\pi f\tau) = \frac{W}{2\pi\tau} \tan^{-1} x \Big|_0^{+\infty} = \frac{W}{4\tau}$$

voltage fluctuation sul resistore

se consideriamo la rete RC posta a temperatura T e se assumiamo di avere uno spettro costante nelle frequenze, allora:



→ prende energia dall'esterno e all'equilibrio

ho che la legge di Boltzmann mi fornisce

l'energia media immagazzinata:

→ dipende solo da V che nel caso del rumore e'  $\langle v_c^2 \rangle$   
 energia condensatore  $E = \frac{1}{2} CV^2$  impongo  $\Rightarrow \langle E \rangle = \frac{kT}{2}$

$$\Rightarrow \langle \frac{1}{2} CV^2 \rangle = \frac{kT}{2} \Rightarrow \langle V^2 \rangle = \frac{kT}{C} \stackrel{\text{impiego}}{=} \frac{W}{4\tau} \quad \text{con } \tau = RC$$

ho solo 1 grado di liberta'

da cui esplicito il rumore di un resistore

$$W = S_v(f) = 4kTR$$

IPOTESI WHITE

$$\Rightarrow \text{l'ampiezza delle fluttuazioni e' } W \cdot \frac{1}{4RC} \Rightarrow \langle v_c^2 \rangle = \frac{S_v}{4\tau} = S_v \cdot ENBW$$

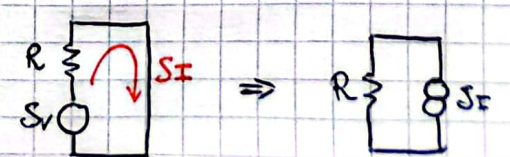
dove ENBW e' l'equivalent noise bandwidth

che nel caso di una FOT a 1 polo vale  $ENBW = \frac{\pi}{2} f_p$

Posso anche fare l'equivalente di Norton di  $S_v(f)$  che ottergo cortocircuitando i terminali

$$\Rightarrow \langle i_{in}^2 \rangle = \frac{S_v(f)}{R} = \frac{4kT}{R} [A^2 Hz^{-1}]$$

$$\parallel S_I$$





**Δ rumore in un MOSFET che ha canale resistivo**

$I_{os} = 2k \left[ (V_G - V_T) V_{os} - \frac{V_{os}^2}{2} \right] \rightarrow$  considero prima la regione ohmica in cui il canale e' uniforme con:

$G_{channel} = \frac{dI_{os}}{dV_{os}} = 2k [(V_G - V_T) - V_{os}] \quad R = \frac{1}{G_{channel}}$

nell'origine ( $V_{os} = 0$ )  $\rightarrow G_{channel}|_{V_{os}=0} = 2k (V_G - V_T) = g_m$

per cui, la conduttanza del canale e' uguale alla transconduttanza in saturazione  $\downarrow$  per lo stesso overdrive la corrente media e' 0, ma sono presenti comunque delle fluttuazioni attorno a tale valore

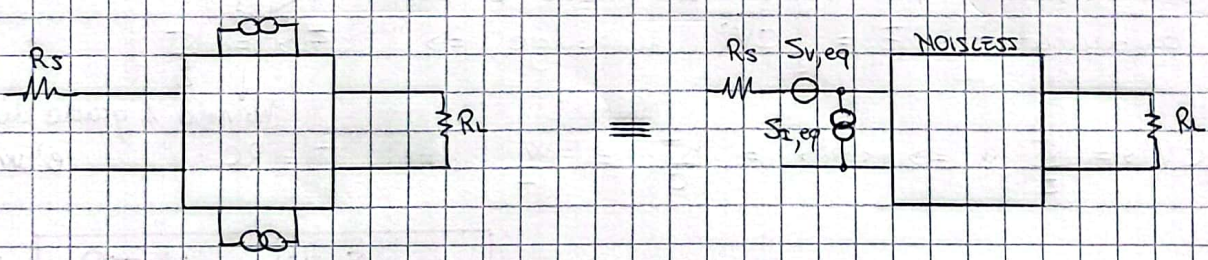
$\Rightarrow S_I(f) = 4kT g_m$  (idealmente)

nella realta' devo introdurre un coeff. correttivo  $\gamma$ :  $S_I(f) = 4kT \gamma g_m$

e per cui  $\gamma = 1$  ohmic

$\gamma = \frac{2}{3}$  saturazione  $\rightarrow$  tiene conto della resistenza del canale non uniforme in saturazione ( $L > 1 \mu m$ )  
 $\gamma = 2$  per uno SHORT-CHANNEL

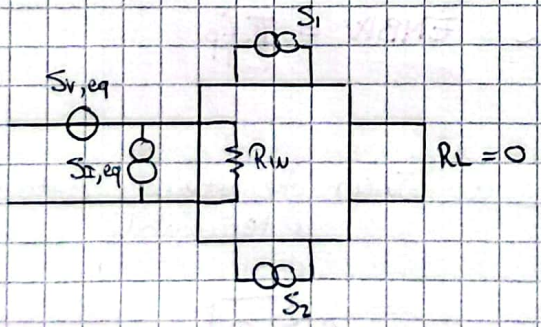
per una **2-PORTS NET** c'e' un teorema che dice che se essa e' rumorosa, allora la posso sempre modellare con una stessa rete non rumorosa e con due generatori d'ingresso, come segue:



e ho che  $S_{v,eq}$  e  $S_{i,eq}$  sono costanti  $\forall R_s, R_L$

come calcoliamo  $S_{v,eq}$  ed  $S_{i,eq}$  ?

per comodita' scelgo un carico con  $R_L = 0$  (tanto essi sono costanti)



se lascio aperto la corrente dipendera' solo da  $S_{i,eq}$

e quindi:

$$S_{I,eq} |Z_{in}(j\omega)|^2 \cdot |T(j\omega)|^2 = S_{out}^{\infty} \quad \text{con 1 generatore}$$

$$S_{I,1} |Z(j\omega)|^2 |T(j\omega)|^2 + S_{I,2} | \dots | / | \dots | = S_{out}^{\infty} \quad \text{con 2 generatori}$$

$$\Rightarrow S_{I,eq} = \frac{S_{out}^{\infty}}{|Z_{in}(j\omega)|^2 |T(j\omega)|^2}$$

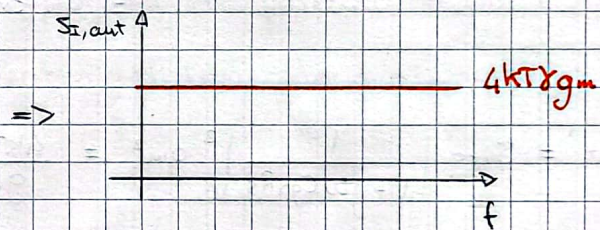
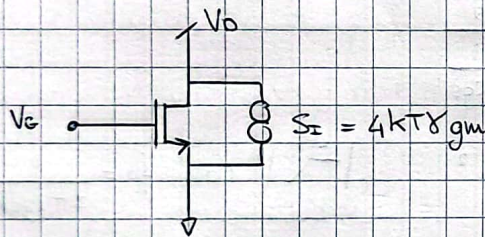
per calcolarmi  $S_{V,eq}$ , uso  $R_i = \infty$  e cortocircuito l'ingresso (prima di  $S_{V,eq}$ );

e quindi:

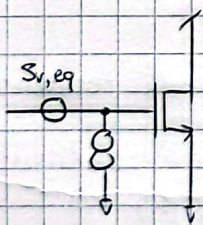
$$S_{V,eq} |T(j\omega)|^2 = S_{out}^{\infty}$$

$$\Rightarrow S_{V,eq} = \frac{S_{out}^{\infty}}{|T(j\omega)|^2}$$

applichiamo questa cosa al MOSFET:



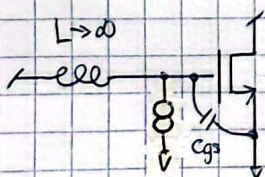
ora applico il teorema:



$$4kT\gamma g_m = S_{out}^{\circ} \quad \text{e} \quad |T(j\omega)|^2 = g_m^2$$

$$\Rightarrow S_{V,eq} = \frac{S_{out}^{\circ}}{|T(j\omega)|^2} \Rightarrow S_{V,eq} = \frac{4kT\gamma}{g_m}$$

per il current gener. dovrei tenere l'input aperto, ma così facendo non riuscirei a settare il bias correttamente  $\Rightarrow$  uso un **CHOCK INDUCTOR** per settarlo e avere **altissima impedenza** (e' analogo ad un aperto)



$\rightarrow$  devo considerare  $C_{gs}$  (per far scorrere la corrente)

$$\Rightarrow S_{out}^{\infty} = S_{I,eq} \frac{(\omega C_{gs})^2}{g_m^2} \Rightarrow S_{I,eq} = 4kT\gamma g_m \frac{\omega^2}{\omega_{t^2}}$$

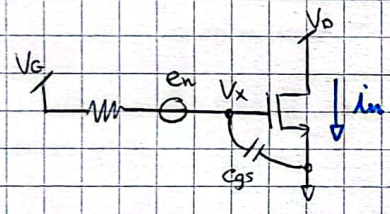
=> ho un contributo in tensione costante (perche'  $V = \text{cost}$  mi da in uscita una  $I = \text{cost}$ )

=> ho un contributo in corrente che si "integra" su  $C_{gs}$  (la cui impedenza diminuisce con la frequenza) questo perche':

- il rumore di output e' costante
- la capacita' diminuisce la propria impedenza all'aumentare di  $f$

=> il rumore di input deve **aumentare** in maniera proporzionale da annullare l'effetto di diminuzione della <sup>impedenza della</sup> capacita' tale da avere un output costante!

posso verificare il teorema:



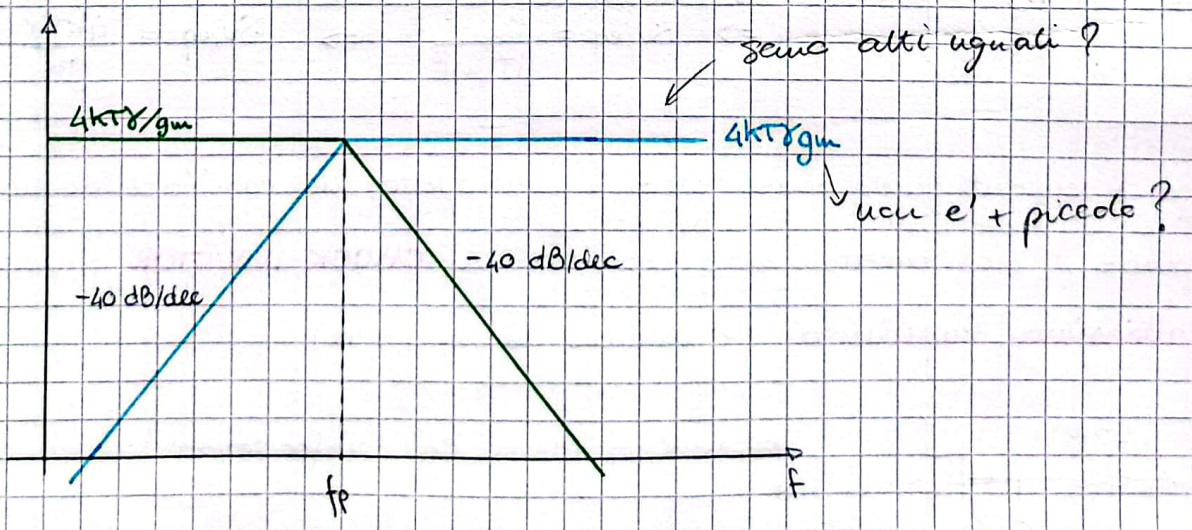
$$I_{in} = V_x g_m \quad V_x = e_n \frac{1}{R_S + \frac{1}{sC_{gs}}} \text{ partitore d'imped.}$$

$$= g_m e_n \frac{1}{R_S + \frac{1}{sC_{gs}}}$$

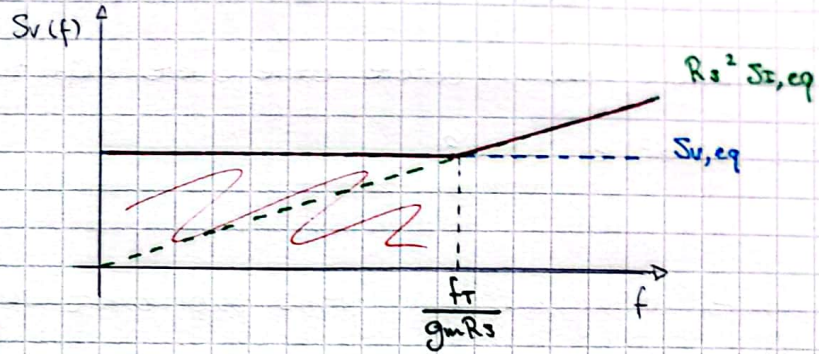
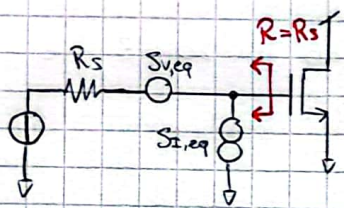
=>  $S_{out}^1 = S_{v,eq} \left| \frac{1}{1 + j\omega C_{gs} R_S} \right|^2 g_m^2 = \frac{4kT\gamma}{g_m} \cdot g_m^2 \quad \left| \text{LPT} \right| \text{ con } f_p = \frac{1}{2\pi C_{gs} R_S}$

=>  $S_{out}^2 = S_{i,eq} \left| \frac{R_S}{1 + j\omega C_{gs} R_S} \right|^2 g_m^2 = 4kT\gamma g_m \text{ per } \omega \rightarrow \infty$

=> ho un LP + HP con stessa  $f_p$  => l'output e' costante e il teorema e' valido



La maggior parte delle volte il **input-referred current noise source** e' **trascurato** perche' a frequenze medio-basse e' molto inferiore del contributo in tensione

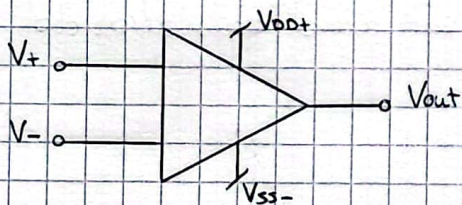


in questa zona  $R_s^2 S_{i,eq} \ll S_{v,eq}$

$\Rightarrow S_v(f) = S_{v,eq} \rightarrow$  per quasi tutte le frequenze di vostro interesse

## COPPIA DIFFERENZIALE

Gli amplificatori differenziali sono molto usati come **amplificatori** e lo scopo e' quello di amplificare la differenza di potenziale fra i due terminali d'ingresso, indipendentemente dal loro potenziale medio rispetto a



$$V_d = (V^+ - V^-) \text{ differential signal}$$

$$V_{cm} = \frac{V^+ + V^-}{2} \text{ common mode signal}$$

Come ogni amplificatori deve avere  $R_w \rightarrow \infty$  e  $R_{out} \rightarrow 0$  (idealmente)

Idealmente  $V_{cm}$  non deve essere trasferito all'output

$$\Rightarrow V_{out} = (V^+ - V^-) \cdot A$$

anche se in realta' ho sempre:

$$V_{out} = G_d V_d + G_{cm} V_{cm}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 differential gain      common mode gain

$\Rightarrow$  il rapporto tra i gain e' un fattore di qualita' chiave dell' amplificatore

tale fattore e' detto **COMMON MODE REJECTION RATIO (CMRR)** e vale:

$$CMRR = \frac{G_d}{G_{cm}}$$

un buon amplificatore deve avere  $G_d$  tra 80 dB e 120 dB, e un CMRR tra 80 dB e 120 dB.

Inoltre il segnale in ingresso puo' essere scritto come sovrapposizione tra un segnale di modo comune e uno differenziale:

$$V^+ = V_{cm} + \frac{V_d}{2}$$

$$V^- = V_{cm} - \frac{V_d}{2}$$

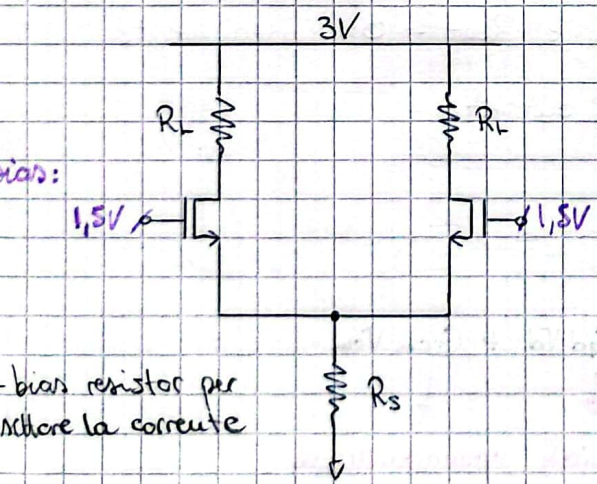
Un amplificatore differenziale e' un dispositivo a **3 porte** ( $V^+$ , GND e  $V^-$ , GND e out, GND), ma se  $V_{cm} = 0$  allora degenera in uno a **2 porte** ( $V^+$ ,  $V^-$  e out).

=> sotto l'ipotesi che CMRR sia molto grande allora e' approssimabile in un dispositivo a due porte, allora posso usare il teorema sul rumore.

Per studiare un amplificatore differenziale, partiamo considerando il

**DIFFERENTIAL STAGE**

-> e' lo stadio d'ingresso di un OTA



e vorremo un CMRR  $\approx 100$  dB  
e un  $G_d = 100\text{dB} - 80\text{dB} \approx 10^5$

se ho  $V_T = 0,6\text{V}$   
allora  $V_{gs} = V_T + V_{ov} = 0,6\text{V} + V_{ov} = 0,7\text{V}$

↓  
la scegliamo noi  
 $V_{ov} = 0,1$

se  $V_{ov} \uparrow$  abbiamo piccolo  $\mu$  e larga  $f_T$  (banda)  
se  $V_{ov} \downarrow$  " grande  $\mu$  e piccola  $f_T$  } compromesso

ricavo  $g_m = \frac{2I}{V_D}$

$R_s = 16 k\Omega$

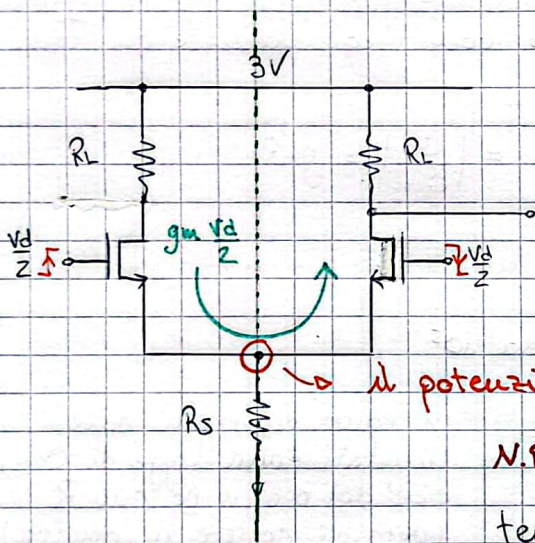
- poiché  $V_{GS} = 0,7V$  e  $V_G = 1,5V \Rightarrow V_S = 0,8V$  che è la cdp su  $R_s \Rightarrow I_{RS} = 50\mu A$

- gli stage sono simmetrici  $\Rightarrow I = 25\mu A$

- per avere un buon gain  $R_L$  deve essere larga, ma ho un vincolo perché

$V_{DS} > V_{ov} \Rightarrow \Delta V_L \approx 2V$  e quindi

$R_L = \frac{2V}{5\mu A} = 80 k\Omega$  (di più ricaderei nella ohmic region)



lo stage è simmetrico ed è guidato da due segnali simmetrici

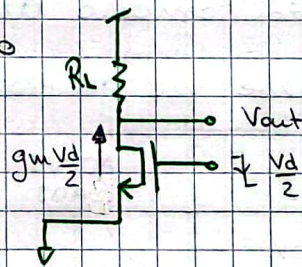
il potenziale del nodo tende a non variare (per simmetria)

N.B.: NON È MASSA VIRTUALE → è ground solo per una tensione differenziale: per il common mode non è massa virtuale (perdo la simmetria)

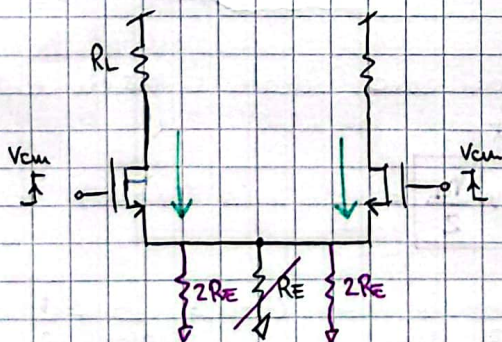
⇒ possiamo ricondurre l'analisi a solo

$\Rightarrow V_{out} = g_m \frac{V_d}{2} R_L$

$\Rightarrow G_d = \frac{V_{out}}{V_d} = \frac{g_m R_L}{2}$



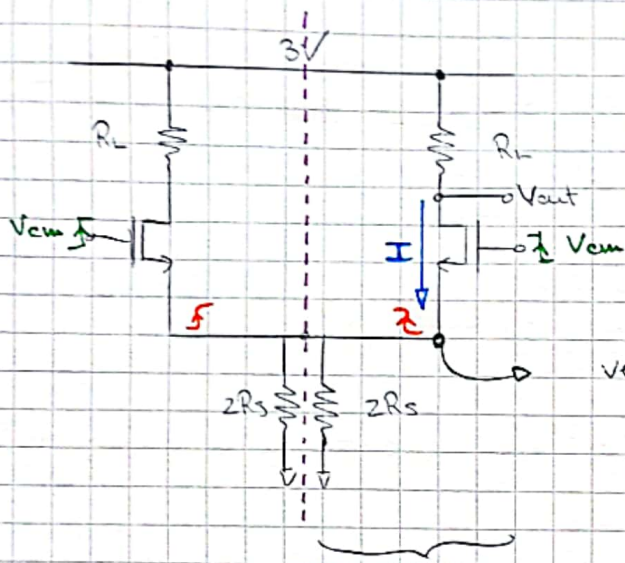
e per quanto riguarda  $G_{cm}$ ? abbiamo entrambi i nodi di input con  $V_{cm}$



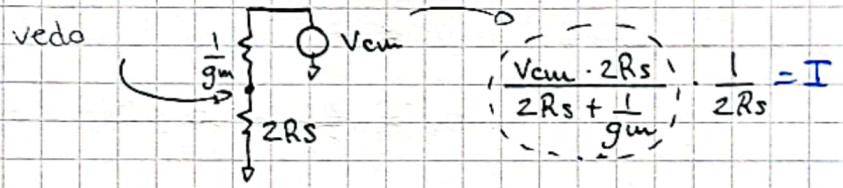
$V_{cm} (2R_E + \frac{1}{g_m})^{-1} \approx \frac{V_{cm}}{2R_E}$

(chiamo  $R_E = R_s$  d'ora in poi)

⊗ la massa virtuale ce l'ho ad un nodo, il quale tende a non variare il proprio potenziale, anche se stimolato, grazie al feedback (l'impedenza di nodo è  $\infty$ )



al nodo di source avrò  $I$   
 $\Rightarrow$  non scorie corrente e posso tagliare



vedo diretto solo questo lato con l'equivalente di Thev.

$\Rightarrow$  ottengo  $G_{cm} = -\frac{R_L}{2R_s}$   $\Rightarrow$   $CMRR = \left| \frac{G_d}{G_{cm}} \right| = g_m R_s$

calcoliamo i gain:

$G_d = \frac{g_m R_L}{2} = \frac{2I R_L}{2 \cdot 0,14} \approx 20$  molto lontano da  $10^5$

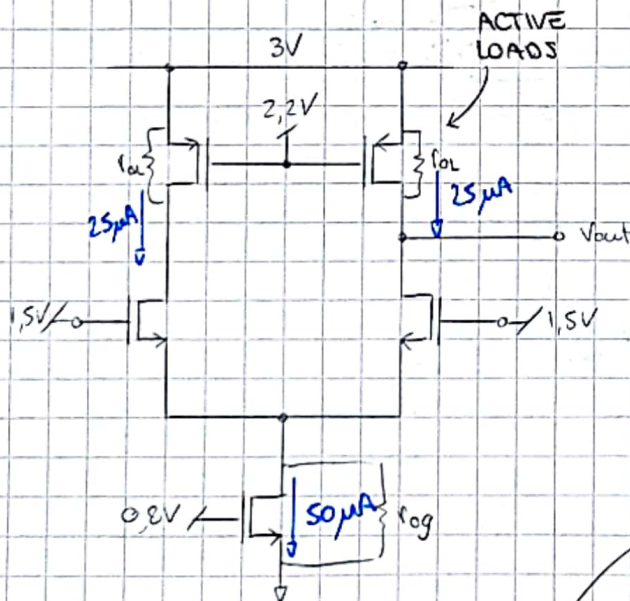
$G_{cm} \approx \frac{\Delta V_L}{\Delta V_S} = \frac{2V}{0,8V} = 2,6$

$\Rightarrow CMRR = \frac{20}{2,6} = 10 \Rightarrow$  le performance sono pessime!

i valori massimi sono limitati dalla legge di Ohm, cioè dal drop in  $oc$  sui  $R$  (per non cadere in ohmica)

per aumentare  $G_d$  possiamo aumentare  $R_L$  senza aumentare il drop di tensione  $\rightarrow$  uso un generatore di corrente, cioè un transistor

(la stessa cosa per il common drain)



nel caso il bias considerando la corrente del caso precedente

$\rightarrow$  consideriamo ideali i mos di input

$\Rightarrow G_d = g_m \frac{r_{oL}}{2} = \frac{\mu}{2}$  ( $\approx 75/100$ )

$\Rightarrow V_{out} = \frac{V_{cm}}{2} \frac{r_{oL}}{r_{oG}} \Rightarrow G_{cm} = \frac{r_{oL}}{2r_{oG}} \approx \frac{1}{2}$

per aumentare il gain devo aumentare la lunghezza del transistor

posso ancora incrementare le prestazioni aggiungendo un ulteriore MOS verso

woma  $\Rightarrow$  la  $R_s$  diventa da  $10$  a  $\mu 10$

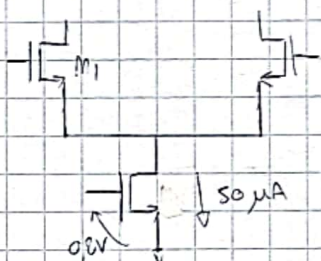
$\Rightarrow G_{cm} = \frac{v_{out}}{2 \cdot \mu V_{gs}}$   $\Rightarrow$  il CMRR aumenta usando un ACTIVE LOAD anche al posto del resistore di tail

però abbiamo anche dei problemi:

(M3)

$\Rightarrow$  ho raggiunto un buon trade-off che potrei migliorare ad esempio se  $V_g = 100\%$ , magari con una struttura a cascode (ma diminuendo + potenza...)

①



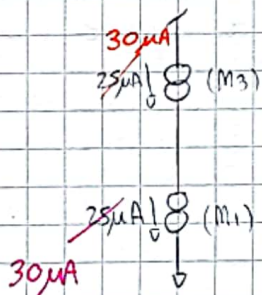
$\Rightarrow 50 \mu A = k' \left( \frac{W}{L} \right) V_{ov}^2$

$\Rightarrow 50 \mu A = k' \left( \frac{W}{L} \right) V_{ov}^2$

} e qui non ho problema (e pari alla metà di quella del tail)

$\Rightarrow$  il problema è nei due transistor di sopra (che sono p) e la corrente deve essere uguale  $\rightarrow$  è difficile avere esattamente lo stesso  $\frac{W}{L}$ : ci sono fluttuazioni, in produzione, attorno al valore nominale

$\Rightarrow$  ottengo un bias diverse per i due rami ①

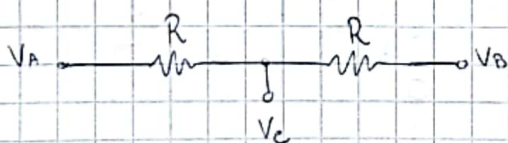


$\rightarrow$  se ho che le correnti sono uguali ok, ma se differiscono anche di poco allora il nodo aumenta di potenziale e la  $V_{ds}$  di  $M_3$  scende

$\Rightarrow$  il transistor tende a scendere in regione ohmic provvedendo meno corrente (fino ad arrivare a 25)

$\rightarrow$  ma se succede il contrario: la corrente è meno, allora il nodo scende e  $M_1$  va in ohmic per bilanciare la corrente

$\rightarrow$  per risolvere il problema devo introdurre un **FEEDBACK** che "unisce" il nodo  $V_A$  e  $V_B$  (pag. succ.) e faccia la media:

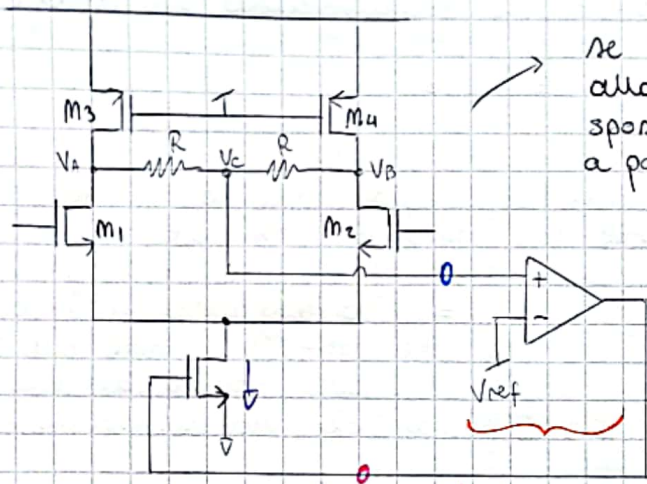


**N.B.:** questo differenziale NON È SINGLE-ENDED! (l'output è differenziale)



# COMMON MODE FEEDBACK

transcond. cala  $\Rightarrow$  degrada G

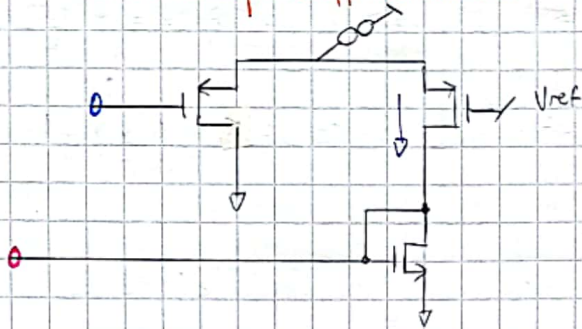


se  $I_3$  e  $I_4$  sono minori di  $25\mu A$  allora i nodi di drain scendono spostando  $M_1$  e  $M_2$  in ohmica e fino a portare anche il tail in ohmica

lo compare col valore atteso e agisce sul gate per correggere un eventuale errore

$\Rightarrow$  questa e' l'idea

e' un ampl. differenziale



$\Rightarrow$  questa struttura e' detta **FULLY DIFFERENTIAL STRUCTURE**

infatti: se  $V_A \uparrow$  e  $V_B \uparrow$  allora  $V_C \uparrow$  e diventa maggiore di  $V_{ref}$

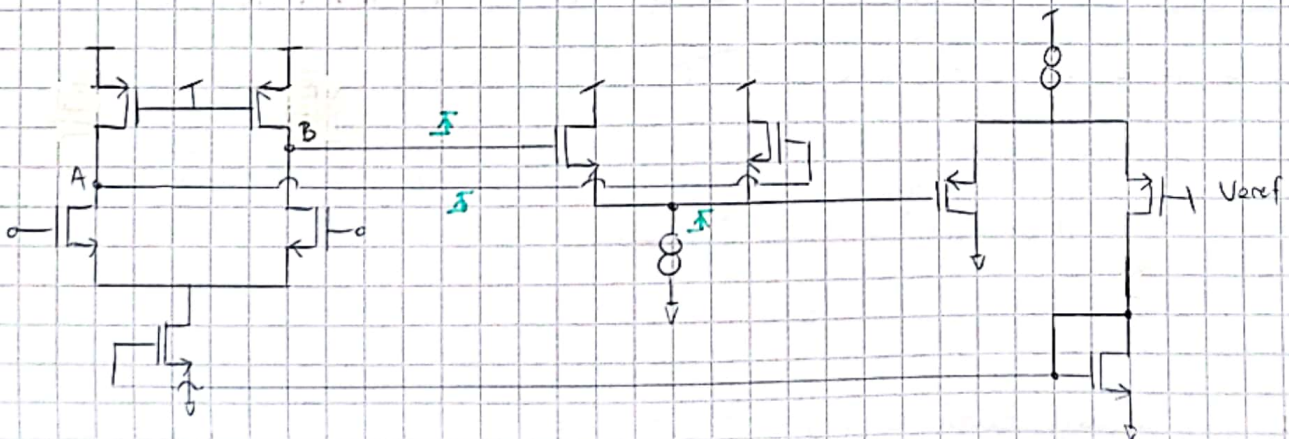
$\Rightarrow$  scorre + corrente che grazie al mirror si riflette nel mos di bias e riporta in basso  $V_A$  e  $V_B$  (grazie al feedback)

(se guidiamo il circuito con  $V_{cm}$ )

per il segnale differenziale anche  $V_C$  e' nel "centro della simmetria" e quindi  $V_C = GND$  (come visto prima per i source)

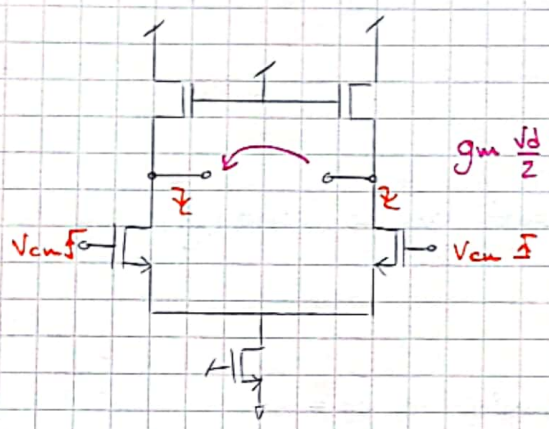
$\Rightarrow$  dall'ant vedo anche  $R$  nel parallelo  $\rightarrow$  puo' generarmi dei problemi

$\Rightarrow$  e' meglio cambiare struttura: posso fare il sense di  $V_A$  e  $V_B$  con alta impedenza, ad esempio:



ma perché devo considerare l'output solo sul secondo ramo?

In realtà puoi anche considerare:

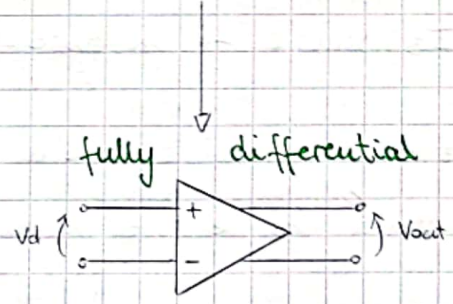


$g_m \frac{V_d}{2} \frac{V_0}{2} \cdot 2$  per il segnale differenziale ( $G_d = \frac{g_m V_0}{2}$ )

allora nel caso di  $V_{cm}$  non ho alcun output: uso la differenza  $\Rightarrow G_{cm} = 0$

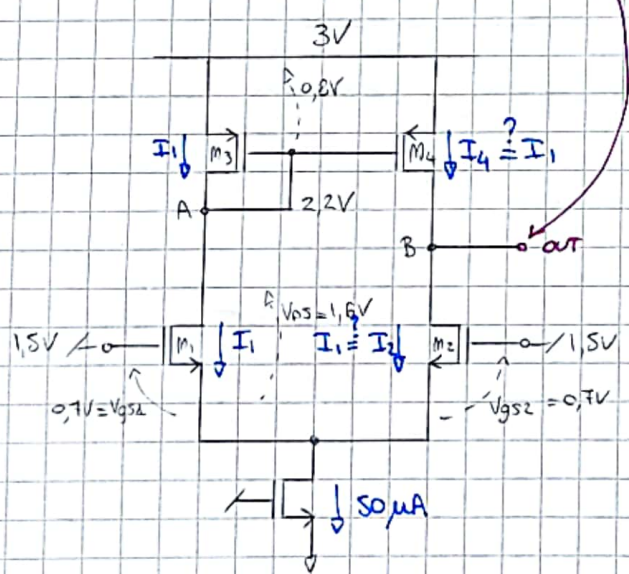
riassumendo:

	$G_d$	$G_{cm}$	CMRR
diff. active load	$\frac{\mu}{4}$	$\approx \frac{1}{2}$	$\frac{\mu}{2}$
fully diff.	$\frac{\mu}{2}$	0	$\infty$



$\Rightarrow$  tale configurazione sarà trattata nell'esame di Mixed-Signal l'anno prox.

Noi useremo il differential stage con il CURRENT MIRROR che è una configurazione SINGLE-ENDED



$$I_{os} = 2k'_p \left(\frac{W}{L}\right) (V_G - V_T)^2 (1 + \lambda (V_{os} - V_{os}^{SAT}))$$

• se  $V_B < V_A$  allora  $I_4 > I_1$  (la  $V_{os}$  è  $>$ )  
allora  $I_2 < I_1$  (la  $V_{os}$  è  $<$ )

• se  $V_B > V_A$  allora  $I_4 < I_1$   
allora  $I_2 > I_1$

$\Rightarrow$  entrambi non possono essere dei punti di lavoro perché la corrente in uno stesso ramo deve essere uguale

$\Rightarrow$  il circuito ha un solo punto di lavoro possibile che è  $V_A = V_B$

e in questo caso avrò che:

$I_4 = I_1 \rightarrow$  la stessa corrente e' spezzata dall' altra parte

$$I_2 = I_1$$

Questo e' l'unico punto di lavoro possibile...

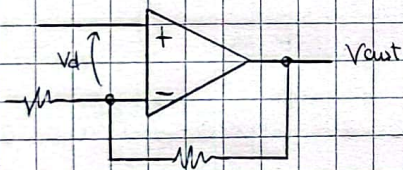
Anche in questo caso ho considerato i transistori con lo stesso  $(\frac{W}{L})$ , ma se non sono  
non forte:

$I_1 = I_3$  sempre  $\rightarrow$  si autobilanciano anche se  $M_1 \neq M_3$

ma se  $M_3 \neq M_4$  allora il nodo di out e' critico ( $I_4 \neq I_2$ ) anche se  $M_4$  e  $M_3$

hanno la stessa  $V_{gs}$  (e pure se anche  $M_1 \neq M_2$ )  $\rightarrow$  va verso  $V_{DD}$  o verso GND

ma gli amplificatori differenziali vengono SEMPRE usati con il feedback



$\rightarrow$  quando accendiamo l'amp. allora

potrei avere  $v_{out} \approx V_{DD} \Rightarrow$  anche  $-\frac{v_d}{2}$  sarà

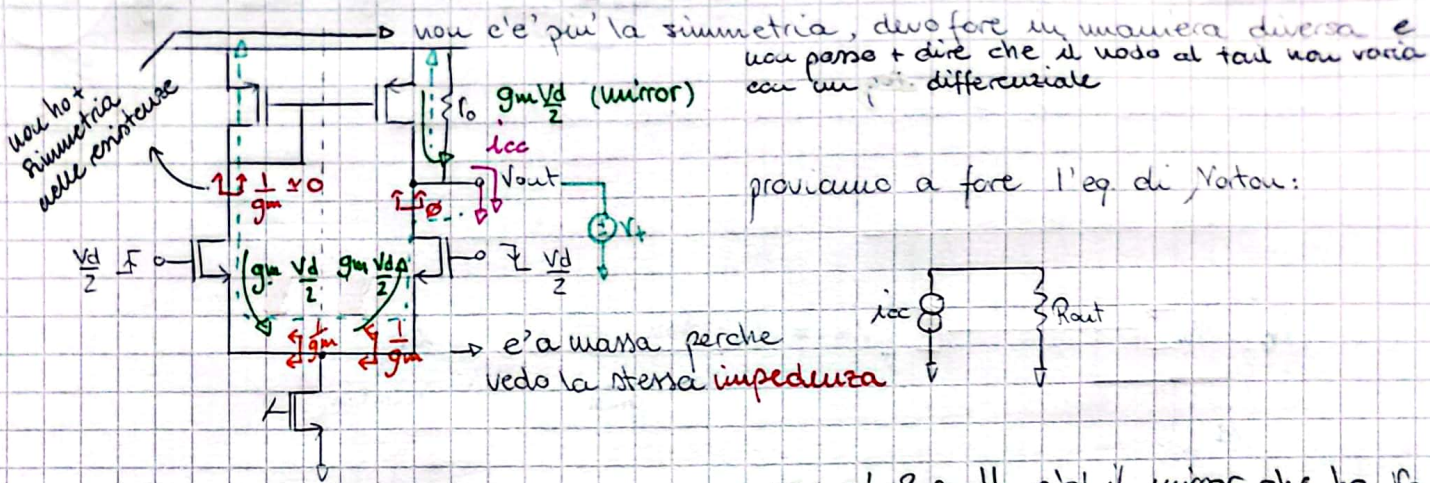
elevato  $\Rightarrow M_2$  aumenterà la corrente per

abbassare il nodo di  $v_{out}$

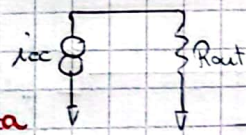
$\rightarrow$  il feedback forza sempre si che l'errore sarà trascurabile

$\rightarrow$  il feedback un genererà un **OFFSET**, causato dalla variazione del nodo  
invertente in ingresso

# Calcoliamo i gain:



proviamo a fare l'eq di Norton:



$\Rightarrow i_{cc} = g_m \frac{V_d}{2} + g_m \frac{V_d}{2} = g_m V_d$

mentre  $R_{out} = r_o (1 + g_m \cdot \frac{1}{g_m}) \approx 2r_o$   
resistenza al source di M2

non è  $\frac{2}{3} r_o \parallel \dots$  c'è il mirror che ha  $r_o$  sopra e  $2r_o$  sotto

perché non è  $2r_o \parallel r_o$

se fisso la tensione  $V_{out}$  e 'fuori dall'anello' se fisso la resistenza  $r_{out}$

quindi quando uniamo  $V_t$  su  $V_{out}$  la corrente è  $\frac{V_s}{r_o}$  che va verso il basso

ma grazie allo specchio  $V_o$  che la vera corrente è  $2 \cdot \frac{V_s}{r_o} \Rightarrow \frac{V_s}{r_o}$  che è l'equiv.

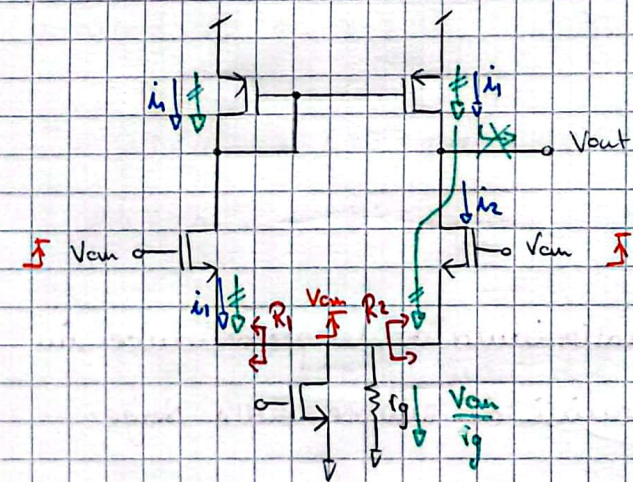
di dire che la resistenza vista è la metà (infatti  $\frac{r_o}{1 - (-1)} = \frac{r_o}{2}$ )

$\Rightarrow R_{out} = r_o$

$\Rightarrow V_{out} = g_m V_d \frac{r_o}{2} \Rightarrow G_d = g_m \frac{r_o}{2} = \frac{\mu}{2}$

per quanto riguarda il  $G_{cm}$ :

oppure (devo ricostruire l'impedenza) e considerare la variabile che influisce idealmente  $G_{cm} = 0$



la corrente si splitta secondo le  $R_1, R_2$

$i_1 = \frac{V_{cm}}{r_g} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

$i_2 = \frac{V_{cm}}{r_g} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

$\Rightarrow i_{out} = i_{cc} = i_1 - i_2 = \frac{V_{cm}}{r_g} \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2}$

$R_1 = \frac{r_o \parallel \frac{1}{g_m}}{1 + g_m r_o}$

$R_2 = \frac{r_o}{1 + g_m r_o}$

$R_2 - R_1 = \frac{r_o - r_o - \frac{1}{g_m}}{1 + g_m r_o} = \frac{-\frac{1}{g_m}}{1 + g_m r_o}$

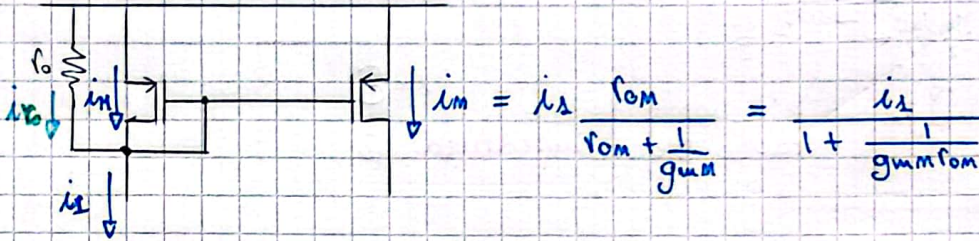
restituendo:

$$i_{cc} = \dots = -\frac{V_{cm}}{r_g} \frac{\frac{1}{g_{m1}}}{2r_{o1} + \frac{1}{g_{m1}}} = -\frac{V_{cm}}{r_g} \frac{\frac{1}{g_{m1}}}{2r_{o1}} = -\frac{V_{cm}}{2r_g} \frac{1}{g_{m1}r_{o1}}$$

trasc.

$\epsilon$   
e' veroe!

La corrente specchiata e' quella che passa nel transistor:



=> anche trascurando la asimmetria avro' una corrente che sara'

"net current" =  $i_{s1} - i_{s2} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{m1}r_{o1}}} \right)$  (che' e' opposta a  $i_{cc}$ )

$$\Rightarrow \frac{V_{cm}}{2r_g} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{m1}r_{o1}}} \right] \approx \frac{V_{cm}}{2r_g} \left[ \cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{g_{m1}r_{o1}} \right] = \frac{V_{cm}}{2r_g} \frac{1}{g_{m1}r_{o1}} \epsilon$$

adesso pougo  $R_1 = R_2$   
e quindi ho partizione  $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1+x} \approx 1-x$$

↳ errore!

=> ho un **ERRORE TOTALE**

$$\epsilon = \frac{1}{g_{m1}r_{o1}} + \frac{1}{g_{m1}r_{o1}} \approx \frac{2}{\mu}$$

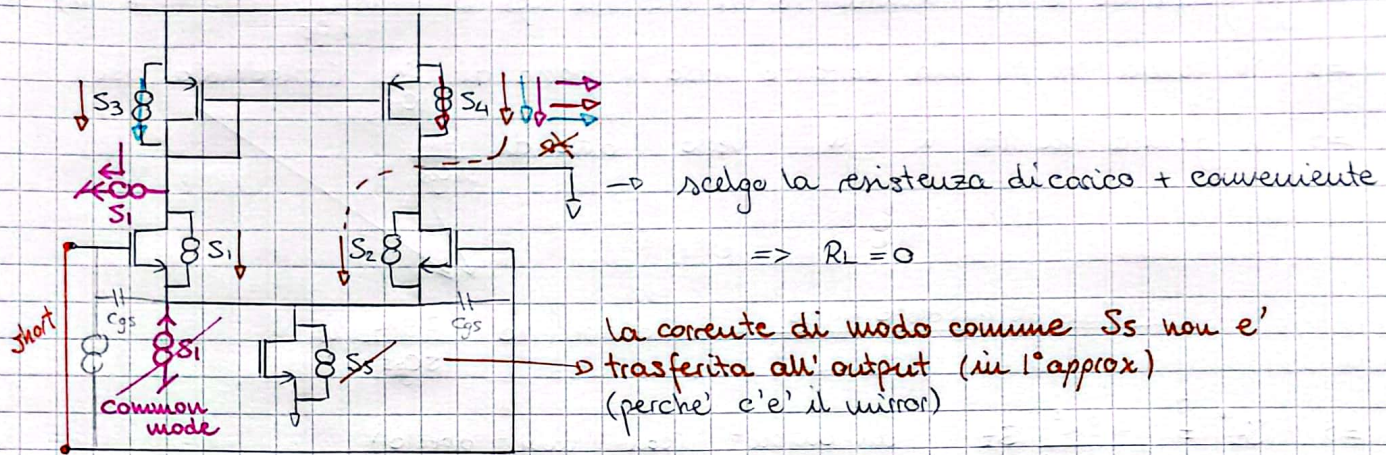
$$\Rightarrow \text{inoltre ho che } G_{cm} = \frac{i_{cc} R_{out}}{V_{cm}} = \frac{1}{2r_g} \epsilon \cdot \frac{r_{o1}}{2} = \frac{1}{2r_g} \frac{2}{\mu} \frac{r_{o1}}{2} = \frac{1}{2\mu}$$

=> **ricapitolando:**

	$G_d$	$G_{cm}$	CMRR
diff. active load	$\frac{\mu}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\mu}{2}$
fully diff.	$\frac{\mu}{2}$	0	0
diff. cur. mirror	$\frac{\mu}{2}$	$\frac{1}{2\mu}$	$\mu^2$

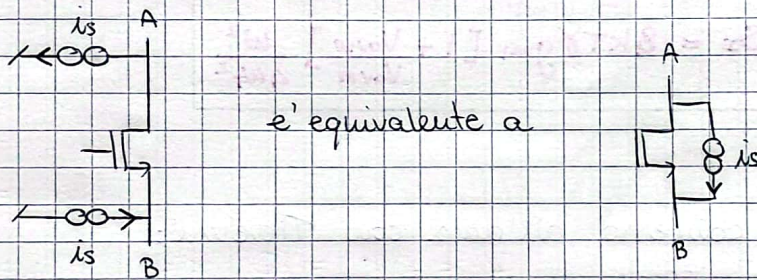
analizziamo ora le performance in termini di rumore dello stage

Calcoliamo prima il rumore all'output: (consideriamo lo stage come 2 parte)



$$S_{out} = S_3 + S_4 + S_1 + S_2$$

per  $S_1$  e  $S_2$  usiamo il teorema dello split della corrente:



e lo uso per  $S_1$  che divido in due contributi di cui uno trascurabile perche' di modo comune (come  $S_5$ ) e l'altro invece specchiato all'output (analogo vale per  $S_2$ )

$$S_i^o = 4kTYg_{m1} + 4kTYg_{m2} + 4kTYg_{m3} + 4kTYg_{m4}$$

$$= 8kTYg_{mW} + 8kTYg_{mM} = 8kTYg_{mW} \left[ 1 + \frac{g_{mM}}{g_{mW}} \right]$$

$$\Rightarrow S_v = \frac{S_i^o}{g_{m^2}} \text{ e' l' input referred voltage noise}$$

$$S_v = \frac{8kTY}{g_{mW}} \left[ 1 + \frac{g_{mM}}{g_{mW}} \right]$$

$\underbrace{\frac{g_{mM}}{g_{mW}}}_{\frac{V_{ov,W}}{V_{ov,M}}}$

per ridurre il rumore e' meglio avere  $\frac{V_{ov,W}}{V_{ov,M}} < 1$  !

ora troviamo il  $S_I$  (all'input) lasciando floating l'input

se il generatore e' is allora ho un drop su  $C_{gs}$  di  $i_s \frac{1}{sC_{gs}}$  di  $M_1$  (e  $M_2$ )

$\Rightarrow$  si genera su  $M_1$  una corrente verso il basso di  $\frac{g_m}{sC_{gs}}$  (specchiata poi)

$\Rightarrow$  si genera su  $M_2$  una corrente verso l'alto di  $\frac{g_m}{sC_{gs}}$

elvo al quadrato per  $R_{50}$  all'output ho  $\frac{2g_m}{sC_{gs}} i_s$

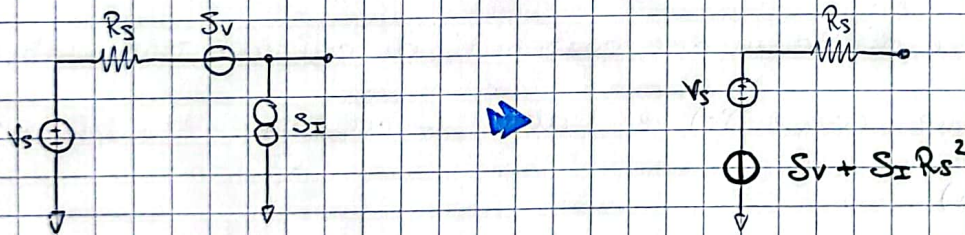
$$\Rightarrow S_I^\omega = \frac{4g_m^2}{\omega^2 C_{gs}^2} S_I \quad \text{all'output (con l'input aperto)}$$

ma l'output noise e' la stessa di prima (non cambia se ho open/short)

e quindi mi ricavo input referred current noise

$$S_I = 8kTYg_{m1} \left[ 1 + \frac{V_{ov1}}{V_{ovm}} \right] \frac{\omega^2}{4\omega_T^2}$$

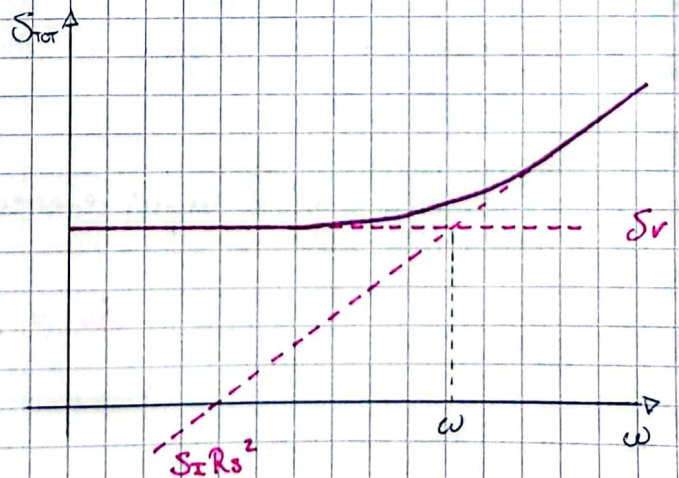
ora rappresentiamo la rete connessa all'amp. con Thevenin:



confrontando  $S_V$  e  $S_I$  ho che

$$S_I = \dots = S_V (g_{m1} R_s)^2 \frac{\omega^2}{4\omega_T^2}$$

e sono uguali se  $\omega = \frac{2\omega_T}{g_{m1} R_s}$



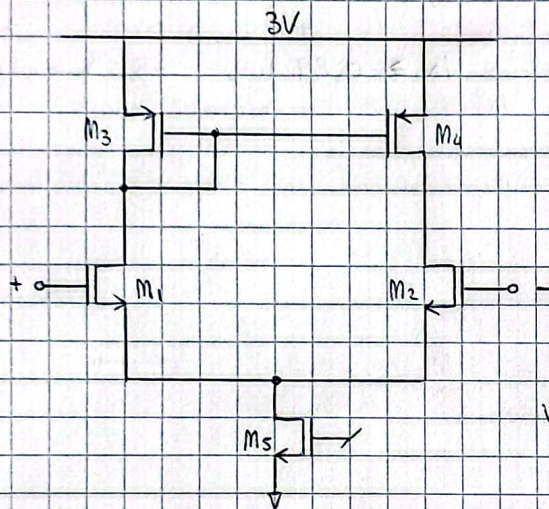
$\rightarrow$  noi non considereremo mai  $S_I$ !

# TWO STAGE CMOS AMPLIFIER

consideriamo un caso pratico di un amplificatore che abbia

$$\begin{cases} G_d = 90 \text{ dB } (\approx 3 \cdot 10^4) \\ \text{CMRR} = 90 \text{ dB (almeno)} \\ S_v \leq (5 \text{ nVHz}^{-\frac{1}{2}})^2 \end{cases}$$

⇒ per prima cosa facciamo il sizing:



impostiamo il bias tramite il rumore

$$\begin{aligned} S_v &= \frac{8kT\gamma}{g_{m1}} \left(1 + \frac{V_{ov,w}}{V_{ov,m}}\right) \\ g_{m1} &= 1 \mu\text{AV}^{-1} \\ &= (4,7 \text{ nVHz}^{-\frac{1}{2}})^2 \left(1 + \frac{V_{ov,w}}{V_{ov,m}}\right) \end{aligned}$$

ma se scelgo  $V_{ov,w} = 0,1 \text{ V}$  e  $V_{ov,m} = 0,2 \text{ V}$  allora

$$\left(1 + \frac{V_{ov,w}}{V_{ov,m}}\right) = 1,5 \Rightarrow \text{mi conviene scegliere } g_{m1}$$

$$g_{m1} = 1,5 \mu\text{AV}^{-1} \text{ così semplifico la parantezi}$$

$$\Rightarrow S_v = \frac{8kT\gamma}{1,5 \mu\text{AV}^{-1}} \cdot 1,5 = (4,7 \text{ nVHz}^{-\frac{1}{2}})^2 \ll (5 \text{ nVHz}^{-\frac{1}{2}})^2 !$$

$$\text{ricavo il bias da } g_{m1} = g_{m2} = \frac{2I}{V_{ov}} \Rightarrow I = 75 \mu\text{A} = I_1 = I_2$$

$$\Rightarrow I_5 = 2I = 150 \mu\text{A}$$

$$\text{(per } M_5 \text{ uso } V_{ov5} = 0,2 \text{ V)}$$

$$\text{sapendo che } k'_n = \mu_n C_{ox} = 50 \mu\text{AV}^{-2}$$

$$k'_p = \mu_p C_{ox} = 25 \mu\text{AV}^{-2}$$

posso ricavarmi i fattori di forma:

posso ricavarmi le  $R_o$ :

$$\frac{W}{L} \Big|_{\text{le2}} = \frac{I_{le2}}{k'_n V_{ov}^2} = 150$$

$$R_o \Big|_{\text{le2}} = \frac{V_A}{I} = \frac{V_A}{\frac{I_1}{0,35}} = \frac{20}{\frac{75}{0,35}} = 267 \text{ k}\Omega$$

$$\frac{W}{L} \Big|_{\text{3e4}} = \frac{I_{le2}}{k'_p V_{ov}^2} = 75$$

$$R_o \Big|_{\text{3e4}} = R_o \Big|_{\text{le2}}$$

$$\frac{W}{L} \Big|_5 = \frac{I_5}{k'_n V_{ov}^2} = 75$$

$$R_o \Big|_5 = \frac{20 \text{ V}}{I_5} = 133 \text{ k}\Omega$$



posso ricavarmi le lunghezze (quindi le  $W$ , conoscendo  $\frac{W}{L}$ ) dal  $G_d$ :

$$G_d = g_m (r_{om} \parallel r_o) \approx g_m \frac{r_o}{2} \quad (\text{perché } r_{om} = r_o)$$

$$= \frac{2I_D}{V_{ov}} \cdot \frac{1}{\mu_n} \cdot \frac{V_A}{I_D} = \frac{V_A}{V_{ov}} \geq 3 \cdot 10^4 \Rightarrow V_A \geq 3000 \text{ troppo!}$$

↑  
impingo

provo a usare la metà:  $G_d = 45 \text{ dB} \Rightarrow V_A \geq 17,8$  e' accettabile

posso ricavarmi  $L$ :  $\frac{V_A}{V_{A0}} = \frac{L}{L_0} \Rightarrow L = \frac{L_0}{V_{A0}} V_A \geq 0,89 \mu\text{m} \Rightarrow L = 1 \mu\text{m}$

$$\Rightarrow W_{1,2} = 150$$

$$\Rightarrow W_{3,4} = 75$$

per settare la lunghezza di  $M_5$  uso il CMRR:

$$\text{CMRR} = \frac{2g_{m5}r_{os}}{\epsilon} \quad \text{con } \epsilon = \frac{1}{g_{m1}r_{o1}} + \frac{1}{g_{m3}r_{o3}} = \frac{1}{200} + \frac{1}{200} = \frac{1}{100}$$

impingo  $g_{m5}r_{os} = 10^{\frac{90 \text{ dB}}{20}} = 3,16 \cdot 10^4$

e ricavo  $r_{os} = \frac{3,16 \cdot 10^4}{200 \cdot 1,5 \mu\text{AV}^{-2}} \approx 105 \text{ k}\Omega$  (almeno)

$$\Rightarrow r_{os} = \frac{V_A}{I_5} \Rightarrow V_{A5} = 15,8 \text{ V} \Rightarrow L \geq 0,78 \mu\text{m} \quad \text{scelgo } L = 1 \mu\text{m}$$

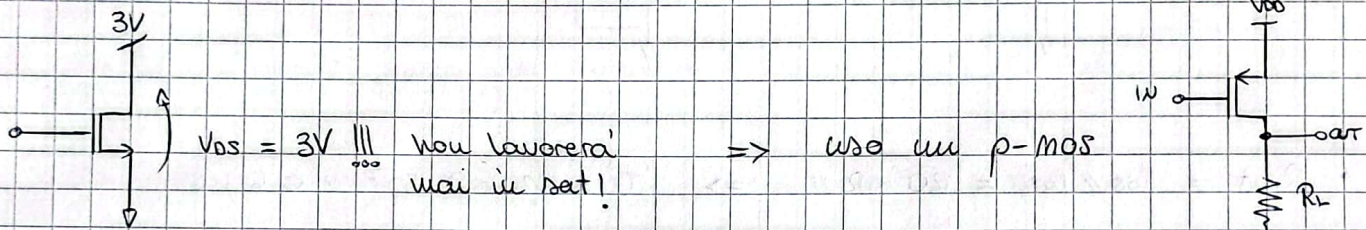
$$\Rightarrow W_5 = 75$$

	$I$ ( $\mu\text{A}$ )	$V_{ov}$	$g_m$ ( $\mu\text{AV}^{-2}$ )	$W/L$	$L$ ( $\mu\text{m}$ )	$W$ ( $\mu\text{m}$ )	$r_o$ ( $\text{k}\Omega$ )	$\mu$
$M_1 - M_2$	75	0,1	1500	150	1	150	267	400
$M_3 - M_4$	75	0,2	750	75	1	75	267	200
$M_5$	150	0,2	1500	75	1	75	133	200
$M_6$	150	0,2	1500	150	1,8		240	
$M_7$	150	0,2	1500	75	1,8		240	

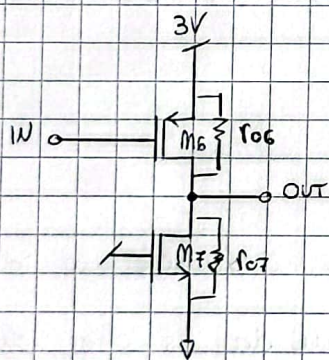
per aggiungere i rimanenti 45 dB dobbiamo avere un II stadio amplificatore: ho un out e posso scegliere fra

- COMMON DRAIN (FOLLOWER)
- COMMON SOURCE
- COMMON GATE (CURRENT FEEDER)

→ e' meglio usare il **COMMON SOURCE** perché e' l'unico che amplifica ora devo scegliere se usare un n-mos o un p-mos: e' immediata la scelta perché non ho un bias adatto ad un n-mos



come carico mi conviene usare idealmente un generatore di corrente e quindi un MOS ⇒  $M_7$ , in modo da avere un guadagno del secondo stage pari a



impedanza

$$G_2 = g_{m6} (r_{O6} // r_{O7}) = 178 \text{ (45 dB)}$$

$$\frac{2I_6}{V_{ov6}} \cdot \frac{1}{2} \frac{V_{A6}}{2I_6} = 178$$

$$\frac{V_{A6}}{V_{ov6}} = 356 \Rightarrow V_{A6} = 35,6 \text{ V (almeno)}$$

con  $V_{ov6} = 0,2 \text{ V}$

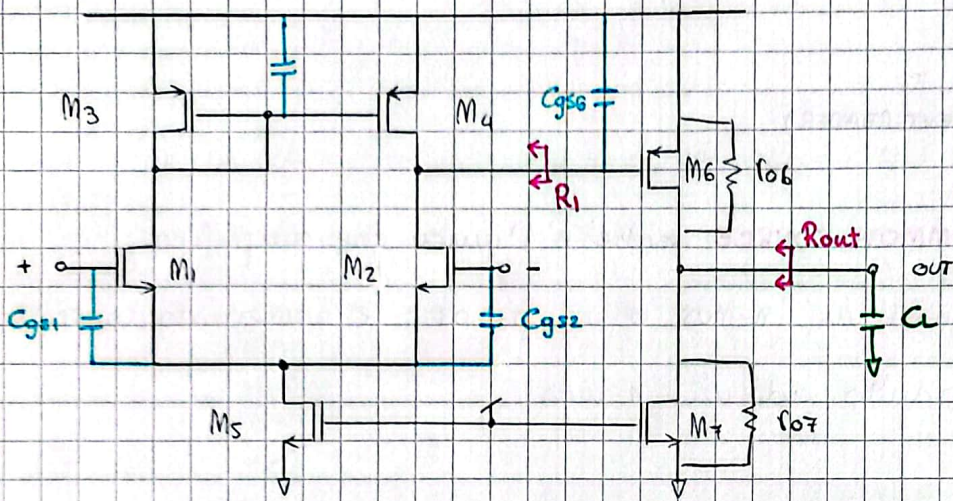
⇒ mi ricavo  $L \geq 1,78 \mu\text{m}$  e scelgo  $L = 1,8 \mu\text{m}$

⇒ per comodita' scelgo che  $I_6 = I_7 = 150 \mu\text{A}$  uguale al "ramo" precedente e quindi posso ricavarmi i restanti parametri nella tabella

⇒ abbiamo completato il sizing!

ora analizziamo le performance:

**RISPOSTA IN FREQUENZA:** ipotizzo di avere un carico di  $C = 5\text{pF}$  massimo



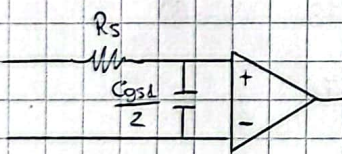
•  $R_{out} = r_{o6} \parallel r_{o7} = 120\text{ k}\Omega \Rightarrow T_L = 120\text{ k}\Omega \cdot 5\text{pF} \approx 0,6\ \mu\text{s}$

con un polo in  $f_L = \frac{1}{2\pi T_L} = 265\text{ kHz}$

•  $C_{gs6} = \frac{2}{3} W_6 L_6 C'_{ox} = 1,6\text{ pF}$  con  $C'_{ox} = 5\text{ fF}/\mu\text{m}^2$

$R_1 = r_{o4} \parallel r_{o2} = \frac{267\text{ k}\Omega}{2} = 134\text{ k}\Omega \Rightarrow T = 0,21\ \mu\text{s} \Rightarrow f = 758\text{ kHz}$

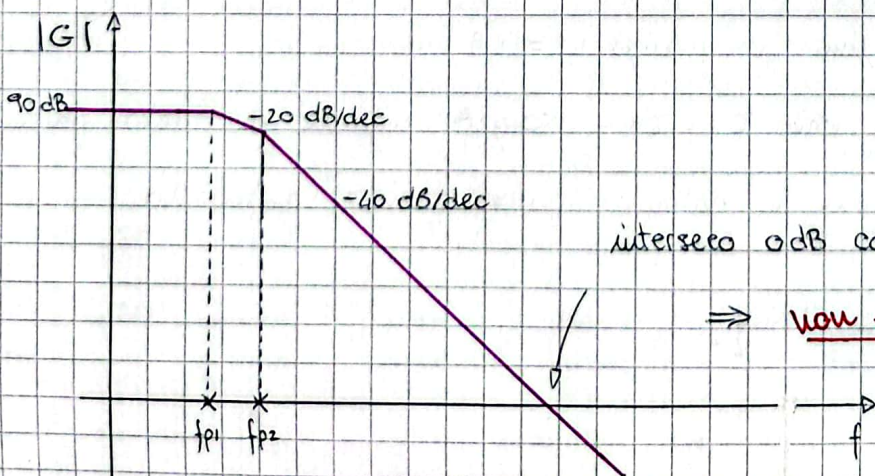
• analogo per  $C_{gs1}$  e  $C_{gs2}$ , che sono in serie:



$C_{gs} = \frac{C_{gs1}}{2}$  che mi introduce un polo a frequenza che dipende da  $R_s$  che non so!

otengo un diagramma di Bode:

ci pensa' chi usa l'OTA, non chi lo progetta!



interseco 0dB con pendenza  $-40\text{ dBdec}^{-1}$

$\Rightarrow$  non e' stabile! per il criterio di stab. di Bode

# COMPENSAZIONE DI MILLER

Nell'OTA precedente ho quindi 3 poli:

$$f_{p1} = \frac{1}{2\pi C_1 R_{out}} = 758 \text{ kHz}$$

$$f_{p2} = \frac{1}{2\pi C_{gs6} R_1} = 265 \text{ kHz}$$

$$f_{p3} = \frac{g_{m3}}{2\pi C_{gs4,3}} \approx \text{GHz} \quad \text{che prima non e' stata graficata perche' molto spostata verso destra}$$

e per avere una GBWP nel punto in cui ho pendenza  $-20 \text{ dB/dec}$  devo fare una dominant pole compensation | il primo polo sia così prima del secondo che ho il GBWP prima del secondo

→ per farlo possiamo agire solo su  $C_{gs6}$  (non tocco  $R_1$  perche' varia il gain)

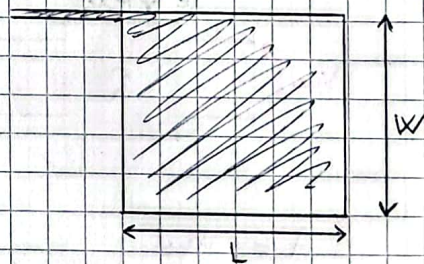
$$f_{p1}' = \frac{GBWP_{min}}{G} = \frac{265 \text{ kHz}}{3,6 \cdot 10^4} = 7,4 \text{ Hz} \quad \text{già perdo molta banda e non e' bello...}$$

$$\hookrightarrow T_2' = \frac{1}{2\pi \cdot 7,4 \text{ Hz}} = 21,6 \text{ ms} \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{T_1}{R_1} = 160 \text{ nF} \quad \text{gigantesca da integrare!}$$

integrandola nella tecnologia  $C_{ox}' = 5 \text{ fF}/\mu\text{m}^2$  devo usare un'area di

$$A = \frac{160 \text{ nF}}{5 \text{ fF}} \mu\text{m}^2 = 30 \cdot 10^6 \mu\text{m}^2 \quad \text{cioe' un}$$

$$\text{quadrato che ha lato } L = \sqrt{30 \cdot 10^6 \mu\text{m}^2} \approx 5,5 \text{ mm}$$



⇒ questa soluzione e' impraticabile

Miller propone di mettere una capacita' per accoppiare gate e drain che formando un "loop" con  $C_{gs6}$  e  $C_1$  non introduce un ulteriore polo:

3 capacita': 2 indipendenti + 1 dipendente

↓

se sotto la tensione su 2 delle 3, la terza me la ricavo come differenza... ho 2 gradi di liberta'

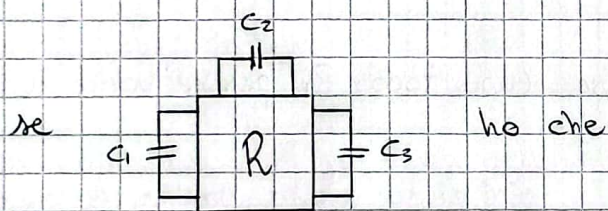
aggiungendo la capacità  $C_n$ , si dimostra che:

- 1) spostato il polo a bassa frequenza a frequenze + basse
- 2) il polo a frequenza maggiore si sposta a frequenze + alte

e quindi posso ottenere una buona compensazione con uno shift minore nelle frequenze

## digressione sulle NETWORKS ANALYSIS

in una rete resistiva  $R$  con  $n$  poli posso usare il **metodo delle costanti di tempo** per stimare il polo ad alta frequenza e quello a bassa freq.



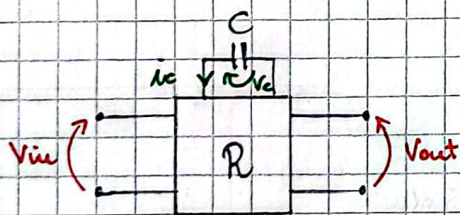
ho che

$$f_L = \frac{1}{2\pi [C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_3 R_3^{(0)}]}$$

$$f_H = \frac{1}{2\pi \left[ \frac{1}{C_1 R_1^{(2,3)}} + \frac{1}{C_2 R_2^{(1,3)}} + \frac{1}{C_3 R_3^{(1,2)}} \right]}$$

che è una conseguenza di ciò:

### Δ rete con un singolo polo (I ORDINE)



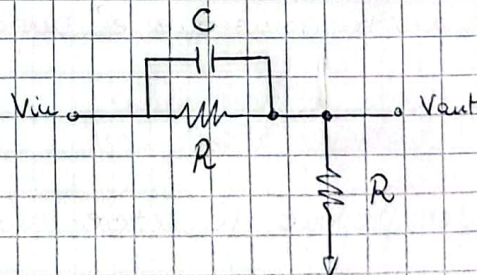
$$\begin{cases} V_{out} = A V_{in} + R_m i_c \\ V_c = B V_{in} + R_c i_c \end{cases}$$

e la matrice della rete

$$A = \frac{V_{out}}{V_{in}} \Big|_{i_c=0}$$

$$B = \frac{V_c}{V_{in}} \Big|_{i_c=0}$$

capacità aperta (OC)



$$\text{ho che } V_c = - \frac{i_c}{sC} = -sC i_c$$

$$\Rightarrow V_{out} = A V_{in} - sC R_m V_c = \dots \Rightarrow A V_{in} = \frac{1 + sC [R_c - R_m B]}{1 + sC R_c}$$

$$\Rightarrow V_c = B V_{in} - sC R_c V_c \longrightarrow V_c = \frac{B V_{in}}{1 + sC R_c}$$

se  $S=0$  (dc) il guadagno  $T(0) = A$ , altrimenti

$$T(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = A \frac{1 + sC[R_c + R_m \frac{B}{A}]}{1 + sCR_c}$$

$\Rightarrow$  la resistenza del polo e'  $R_c = \frac{V_c}{i_c} \Big|_{V_{in}=0}$  la ricavo dalla matrice ed

e' la **resistenza vista dalla capacita' C quando l'input e' corto**

$\Rightarrow$  la resistenza dello zero e'  $R_o = R_c - R_m \frac{B}{A}$  che facendo i conti:

$$\text{se } V_{out} = 0 \Rightarrow V_{in} = -\frac{R_m i_c}{A}$$

$$\Rightarrow V_c = -\frac{R_m i_c}{A} \cdot B + R_c i_c = i_c (R_c - R_m \frac{B}{A})$$

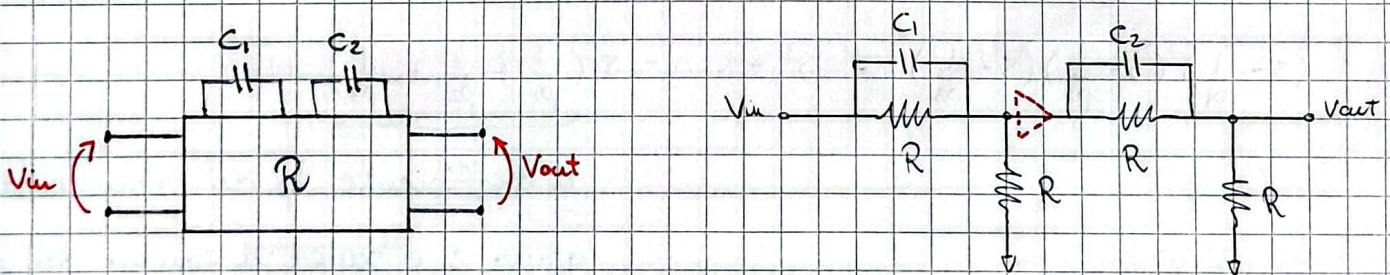
$$\Rightarrow R_c = \frac{V_c}{i_c} \Big|_{V_{out}=0} \text{ che chiamo } R_{oc}$$

e' la **resistenza vista dalla capacita' quando l'uscita vale zero per un valore  $V_{in} \neq 0$**

**non in corto!**

$\rightarrow$  posso provare ad estendere questa considerazione ad ogni rete di ogni ordine e grado

### LA RETE DEL II ORDINE



la  $T(s) = T(0) \frac{s^2 C_1 C_2 \alpha_{12} + s(C_1 \alpha_1 + C_2 \alpha_2) + 1}{s^2 C_1 C_2 \beta_{12} + s(C_1 \beta_1 + C_2 \beta_2) + 1}$  e' la forma generale

se  $C_2 = 0$  si riduce alla forma del 1° ordine:

$$T(0) \frac{sC_1 \alpha_1 + 1}{sC_1 \beta_1 + 1} = T(0) \frac{sC_1 R_{o1}^{(0)} + 1}{sC_1 R_i^{(0)} + 1} \Rightarrow \text{ricavo } \begin{cases} \alpha_1 = R_{o1}^{(0)} \\ \beta_1 = R_i^{(0)} \end{cases}$$

se  $C_1 = 0$  e' analogo e ricavo  $\begin{cases} \alpha_2 = R_{o2}^{(0)} \\ \beta_2 = R_2^{(0)} \end{cases}$

rimangono da trovare  $\alpha_{12}$  e  $\beta_{12}$ , cioè i coefficienti del II ordine:

se  $C_2 \rightarrow +\infty$  (lo cortocircuito) allora

$$T(s) = T(0) \frac{s C_1 \alpha_{12} + \alpha_{12}}{s C_1 \beta_{12} + \beta_{12}} = T(0) \frac{s C_1 \frac{\alpha_{12}}{\beta_{12}} + 1}{s C_1 \frac{\beta_{12}}{\beta_{12}} + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{\beta_{12}}{\beta_{12}} = R_1^{(2)} \quad \text{e quindi} \quad \beta_{12} = R_1^{(2)} R_2^{(0)}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{12}} = R_0^{(2)} \quad \text{e quindi} \quad \alpha_{12} = R_0^{(2)} R_0^{(0)}$$

se  $C_1 \rightarrow +\infty$  (lo cortocircuito) allora  $T(s) = T(0) \frac{s C_2 \frac{\alpha_{12}}{\alpha_1} + 1}{s C_2 \frac{\beta_{12}}{\beta_1} + 1}$

$$\Rightarrow \beta_{12} = R_1^{(0)} R_2^{(1)}$$

$$\Rightarrow \alpha_{12} = R_0^{(0)} R_0^{(1)}$$

→ quindi le due scritture sono equivalenti:  $C_1 C_2 R_0^{(2)} R_0^{(0)} = C_2 C_1 R_0^{(0)} R_0^{(1)}$   
 analogo per i poli:  $C_1 C_2 R_1^{(2)} R_2^{(0)} = C_2 C_1 R_2^{(1)} R_1^{(0)}$

Quanto detto si può estendere anche al III ordine, ... e così via

Inoltre posso scrivere, ad esempio con 3 poli, il denominatore della  $T(s)$  come prodotto tra:

$$(s - \frac{1}{p_1}) (s - \frac{1}{p_2}) (s - \frac{1}{p_3}) = s^3 - \dots - s \underbrace{\left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \right)}_{b_1} + 1$$

il coefficiente  $b_1$  del termine di grado 1 è sempre la somma dei poli cambiati di segno

se ho un **polo dominante** ( $p_1 = 2\pi f_1$  con  $f_1 \ll f_2 \ll f_3$ )

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} \approx \frac{1}{p_1} = -b_1 = C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_3 R_3^{(0)}$$

⇒ ottengo la formula del "metodo delle costanti"  $p = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_3 R_3^{(0)}}$

per stimare quello a frequenza + elevata:  $s^3 b_3 + s^2 b_2 + s b_1 + 1 = 0$

trascurabile a  $f^{\uparrow}$

$$\hookrightarrow s^3 b_3 + s^2 b_2 + s b_1 \approx 0$$

$$s^2 (s b_3 + b_2 + \frac{b_1}{s}) \approx 0$$

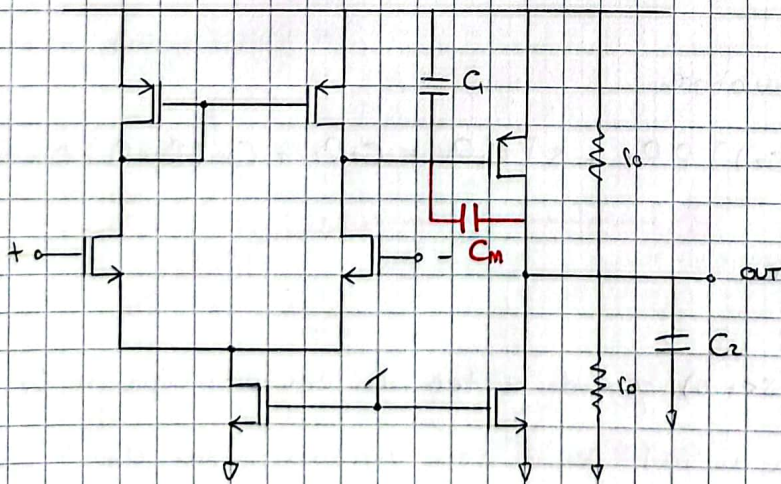
*trasc. a  $f^{\uparrow}$  elevata*

$$s \approx -\frac{b_2}{b_3}$$

$$s \approx 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2 \approx -\frac{b_2}{b_3} &= \frac{C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_3 R_3^{(0)}}{b_2} = \frac{R_1^{(0)}}{C_2 C_3 R_1^{(0)} R_2^{(0)} R_3^{(0)}} + \frac{R_2^{(0)}}{C_2 C_3 R_1^{(0)} R_2^{(0)} R_3^{(0)}} + \frac{C_3 R_3^{(0)}}{C_1 C_2 C_3 R_1^{(0)} R_2^{(0)} R_3^{(0)}} \\ &= \frac{1}{C_1 R_1^{(1,2)}} + \frac{1}{C_2 R_2^{(1,1)}} + \frac{1}{C_3 R_3^{(1,2)}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\tau_3^{00}} + \frac{1}{\tau_2^{00}} + \frac{1}{\tau_1^{00}} \right) = -\frac{1}{2\pi \tau_0} \end{aligned}$$

Consideriamo ora il circuito con la capacita' di Miller:



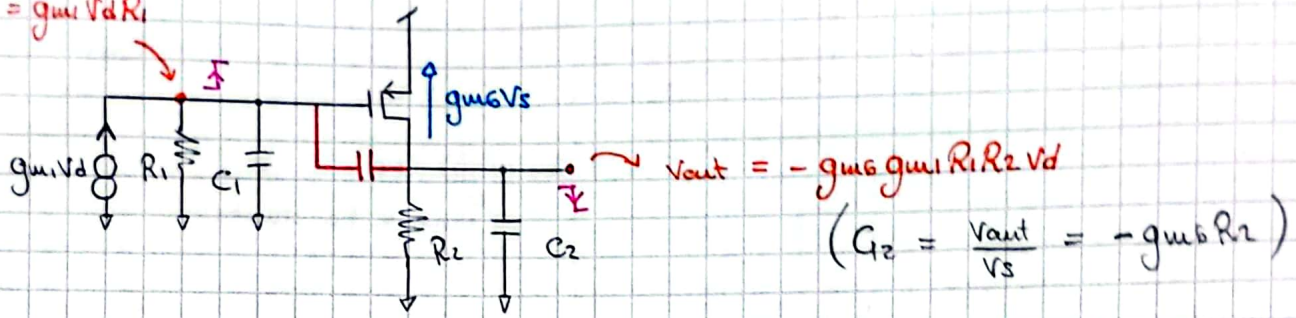
$C_m$ : capacita' di Miller o di compensazione

il numero di poli non varia perche' tra  $C_m$ ,  $C_1$  e  $C_2$  ho solo 2 gradi di liberta' e quindi sempre 2 capacita' indipendenti



per semplificare, d'ora in avanti, esprimo il primo stage con Norton

$$V_s = g_{m1} V_d R_1$$



$\Rightarrow T(0) = -g_{m1} g_{m2} R_1 R_2$  mentre la TCS) avrà la forma (II ORDINE):

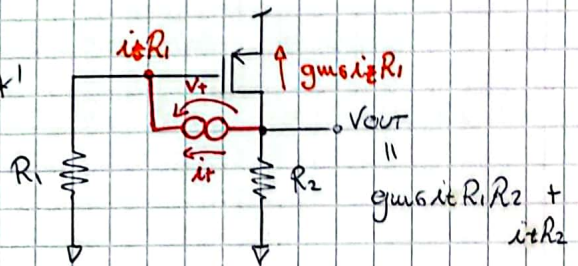
$$T(s) = T(0) \frac{s^2 a_2 + s a_1 + 1}{s^2 b_2 + s b_1 + 1}$$

$$L \rightarrow b_1 = C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_m R_m^{(0)}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$                        $\downarrow$   
 $R_1$                        $R_2$

$$\frac{V_t}{i_t} = R_m^{(0)} = i_t R_1 + (g_{m2} R_1 R_2 + R_2) i_t'$$

$$= R_1 + R_2 + g_{m2} R_1 R_2$$



però poi ricavarsi:

$$C_1 C_2 R_1^{(0)} R_2^{(1)} = C_1 C_2 R_1 R_2$$

$$C_1 C_m R_1^{(0)} R_m^{(1)} = C_1 C_m R_1 R_2$$

$$C_2 C_m R_2^{(0)} R_m^{(2)} = C_2 C_m R_2 R_1$$

$\Rightarrow$  mi sono trovato il denominatore

$$D(s) = s^2 [C_1 C_2 + C_m (C_1 + C_2)] R_1 R_2 + s [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_m (R_1 + R_2 + g_{m2} R_1 R_2)] + 1$$

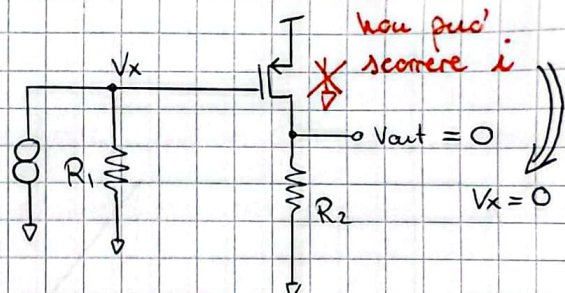
ora impostiamo il numeratore:

-  $C_2$  non introduce zeri (per  $s \rightarrow +\infty$ ) quindi i termini che presentano  $C_2$  li posso eliminare (tra quelli di  $b_2$ ) perché non saranno in  $a_2$

$$C_1 C_2 R_{o1}^{(0)} R_{o1}^{(1)} = 0 \quad (c'e' C_2)$$

$$C_2 C_m R_{o2}^{(0)} R_{om}^{(2)} = 0 \quad (c'e' C_2)$$

$$C_1 C_m R_{o1}^{(0)} R_{om}^{(1)} = 0 \quad \text{perche' } R_{o1}^{(0)} = 0 :$$



passiamo ai termini di primo grado, i.e.:

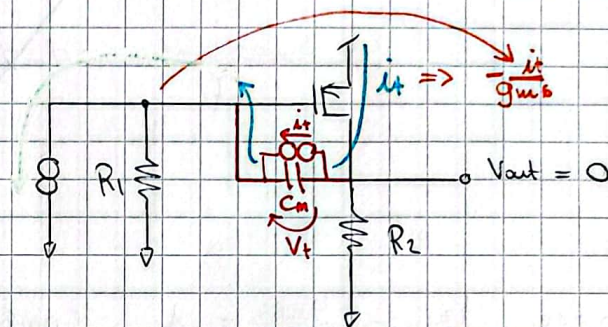
$$C_1 R_{o1}^{(0)} = 0 \quad (R_{o1}^{(0)} = 0)$$

$$C_2 R_{o2}^{(0)} = 0$$

$$C_m R_{om}^{(0)} = -C_m \cdot \frac{1}{g_{m6}}$$

ho uno zero positivo

$$V_{out} = 0 \Leftrightarrow V_x = 0 \Rightarrow R_{o1}^{(0)} = 0$$



$$\Rightarrow \text{ho trovato il numeratore } N(s) = 1 - s \frac{C_m}{g_{m6}} \Rightarrow f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_m}$$

$$\Rightarrow T(s) = -g_{m1} g_{m6} R_1 R_2 \frac{N(s)}{D(s)}$$

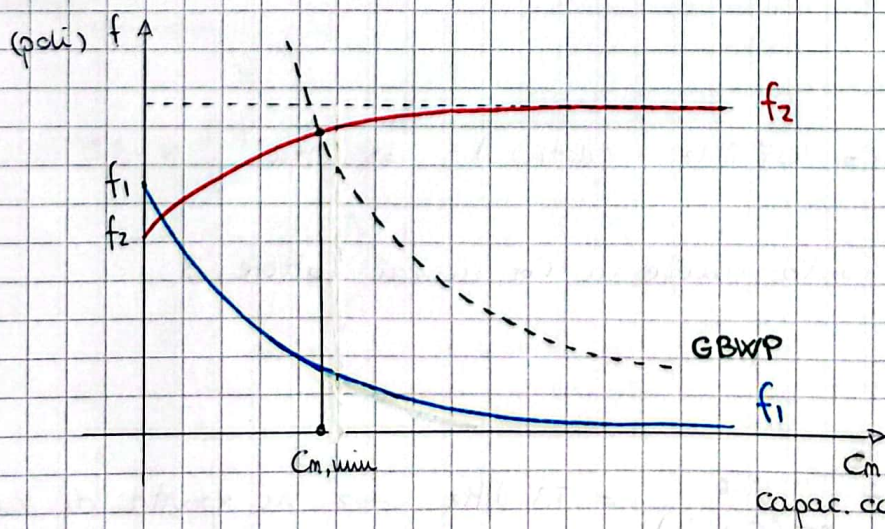
$$= -g_{m1} g_{m6} R_1 R_2 \frac{1 - s \frac{C_m}{g_{m6}}}{s^2 [C_1 C_2 + C_m (C_1 + C_2)] R_1 R_2 + s [C_1 R_1 + C_2 R_2 + C_m (R_1 + R_2 + g_{m6} R_1 R_2)] + 1}$$

trascurabili                      trascurabili

$$f_1 = \frac{-b_1}{2\pi b_1} \approx \frac{1}{2\pi C_m g_{m6} R_1 R_2}$$

$$f_2 = \frac{-b_1}{2\pi b_2} \approx \frac{C_m g_{m6} R_1 R_2}{2\pi R_1 R_2 [C_1 C_2 + C_m (C_1 + C_2)]} \xrightarrow{C_m \rightarrow +\infty} \frac{g_{m6}}{2\pi (C_1 + C_2)}$$

entrambe dipendono da  $C_m$ :

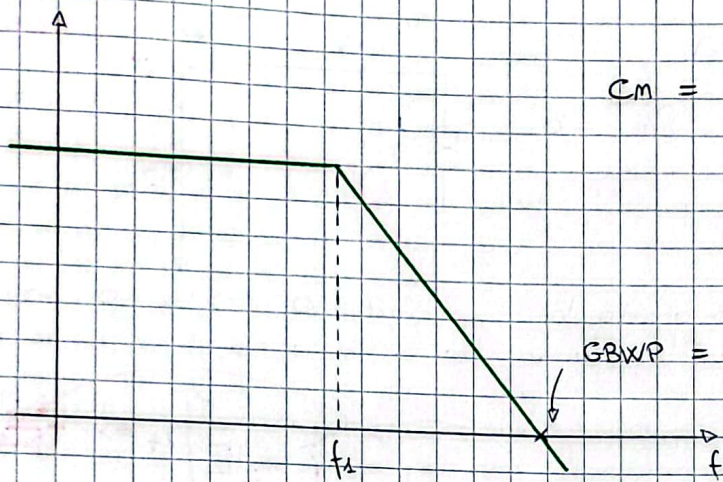


devo avere  $C_m |$

$$f_z \gg \text{GBWP}$$

$$\frac{g_{m6}}{2\pi (C_1 + C_2)} \gg \frac{g_{m1}}{2\pi C_m}$$

diagramma di Bode:



$$C_m = \frac{g_{m6}}{g_{m1}} (C_1 + C_2) \approx 6,7 \text{ pF}$$

$$GBWP = \frac{g_{m1} g_{m6} R_1 R_2}{2\pi C_m g_{m6} R_1 R_2} = \frac{g_{m1}}{2\pi C_m}$$

$$= 35,6 \text{ MHz}$$

$$C_m = 6,7 \text{ pF}$$

poiché  $\frac{f_z}{GBWP} = \frac{g_{m6}}{g_{m1}} = 1$  ( $g_{m6} = g_{m1}$ )

allora ho lo zero nella GBWP  $\rightarrow$  peccato che è uno zero positivo! infatti

$$\Delta\phi = 180^\circ - 90^\circ - \underbrace{\tan^{-1} \frac{GBWP}{f_z}}_{45^\circ} - \underbrace{\tan^{-1} \frac{GBWP}{f_z}}_{45^\circ} = 0^\circ$$

ho scelto  $C_m \mid f_z = GBWP$

lo zero è nella GBWP perché  $g_{m1} = g_{m6}$

$\Rightarrow$  posso aumentare  $g_{m6}$  per muovere lo zero e il II polo a frequenze maggiori;  
per farlo moltiplichiamo per ③ la corrente nel ramo di  $M_6, M_7$ :

$$I_{m6} = I_{m7} = 450 \mu\text{A}$$

$$\downarrow \quad \swarrow$$

$$\frac{W}{L}_6 = \frac{810}{1,8} \quad \frac{W}{L}_7 = \frac{405}{1,8}$$

in tal modo ottengo:

$$\text{zero @ } f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi C_m} = 107 \text{ MHz (il triplo)} \Rightarrow \tan^{-1} \frac{1}{3} \approx 18^\circ$$

ma aumentando  $\frac{W}{L}_{6e7}$  aumenta anche la  $C_{gs}$  di un fattore 3

$$\Rightarrow C_{gs6} = 4,86 \text{ pF}$$

$$\text{polo high-freq @ } f_z = \frac{g_{m6}}{2\pi (C_1 + C_2)} = 73 \text{ MHz} \rightarrow \text{si sposta di meno}$$

(e' aumentato anche  $C_1 + C_2$ )

e la  $\tan^{-1} \frac{GBWP}{f_z} = 26^\circ$

$\Rightarrow$  ottengo un miglioramento del margine di fase  $\Delta\phi = 45^\circ$  che in prima approssimazione può andare bene, ma non è abbastanza per ogni applicazione; devo incrementarlo

posso aumentare ancora la corrente  $\rightarrow$  ma calano le performance!  
 posso anticipare  $f_z$  così anticipo la GBWP

analizziamo il secondo caso possibile:

• aumentando  $C_m$ :

- $GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C_m} \rightarrow$  diminuisce
- $\frac{GBWP}{f_z} = \frac{g_{m1}}{g_{m5}}$   $\rightarrow$  rimane costante
- $f_1 = \frac{1}{2\pi C_m g_{m5} R_1 R_2} \rightarrow$  diminuisce
- $\frac{GBWP}{f_z} \rightarrow$  diminuisce ( $f_z$  non dipende da  $C_m$ )

quindi per avere  $\Delta\phi = 60^\circ$  impiego  $\tan^{-1} \frac{GBWP}{f_z} = 12^\circ$

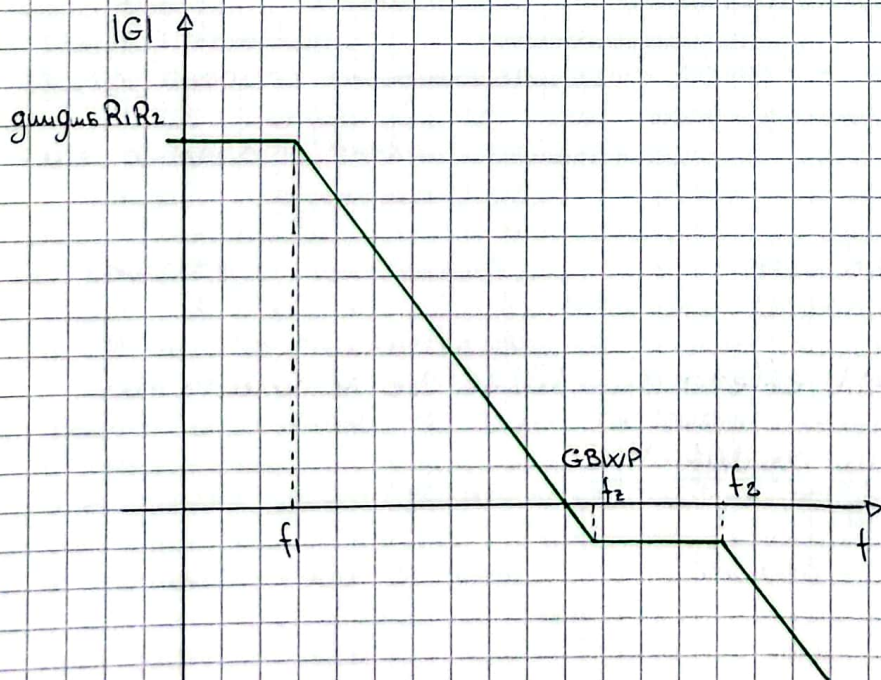
$\Rightarrow \frac{GBWP}{f_z} = \tan 12^\circ = 0,213$

$\Rightarrow$  mi ricavo  $C_m$  dalla GBWP:  $C_m = \frac{g_{m1}}{2\pi GBWP} \approx 16 \text{ pF}$

posso inoltre definire una figura di merito

$FOM = \frac{GBWP \cdot C_L}{I_{TOT}}$

[  $\frac{\text{MHz} \cdot \text{pF}}{\mu\text{A}}$  ]



ci sono altri modi per aumentare le performance?

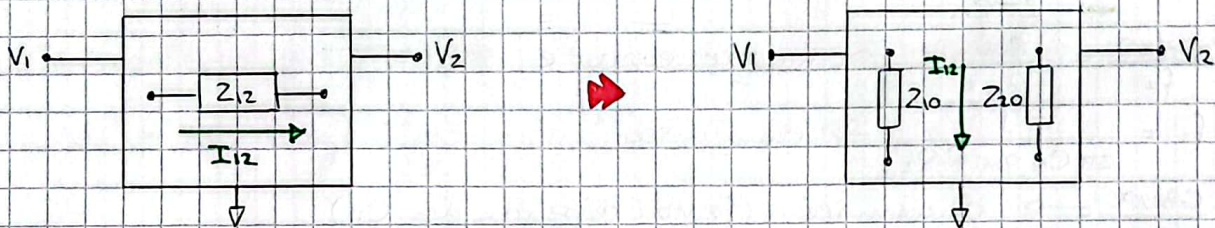
forse... ma prima introduciamo il teorema di Miller

## TEOREMA DI MILLER

Il teorema di Miller è un teorema delle **reti lineari** che consente di sostituire un bipolo a cavallo fra due sottoreti con due bipoli connessi a un nodo di riferimento (nel nostro caso massa)

Consideriamo due nodi  $V_1$  e  $V_2$  e un'impedenza  $Z_{12}$  che li collega; allora tale rete è equivalente a quella in cui sostituisco  $Z_{12}$  con due impedenze: una connessa tra  $V_1$  e GND ( $Z_{10}$ ) e l'altra connessa tra  $V_2$  e GND ( $Z_{20}$ )

Se  $k(s)$  è la FdT in tensione ( $k(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$ ) allora mi posso ricavare:



$$\frac{V_1(s)}{Z_{10}} = I_{12} = \frac{V_1 - V_2}{Z_{12}}$$



$$Z_{10} = Z_{12} \frac{V_1}{V_1 - V_2} = Z_{12} \frac{1}{1 - \frac{V_2}{V_1}}$$

$$\frac{V_2(s)}{Z_{20}} = I_{12} = \frac{V_2 - V_1}{Z_{12}}$$



$$Z_{20} = Z_{12} \frac{V_2}{V_2 - V_1} = Z_{12} \frac{\frac{V_2}{V_1}}{\frac{V_2}{V_1} - 1}$$

⇒ dobbiamo conoscere  $k(s)$  per applicare il teorema!

$$Z_{10} = Z_{12} \frac{1}{1 - k(s)}$$

$$Z_{20} = Z_{12} \frac{k(s)}{k(s) - 1}$$

Un caso particolare del teorema è l'**effetto di Miller** che si presenta nei sistemi retroazionati tramite un condensatore

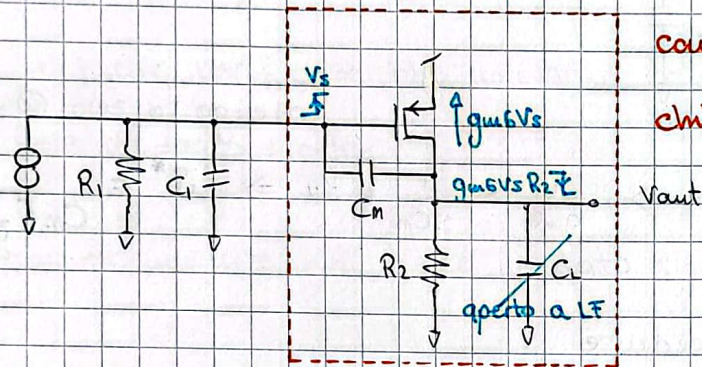
il valore di un condensatore collegato tra l'input e l'output di un amplificatore viene visto in maniera diversa dalla porta di 'in' rispetto a quella di 'out':

→ INPUT:  $C_{eq} = C(1 - A_v)$

→ OUTPUT:  $C_{eq} = C \frac{A_v - 1}{A_v} \approx C$  se  $A_v \gg 1$

N.B. invertito perché l'impedenza è  $\frac{1}{sC}$

Consideriamo questo effetto nella rete precedente:



consideriamo questa parte un box chiuso e calcoliamo la  $C_{eq}$  verso GND vista dal gate:

$\Rightarrow \Delta v_{cm} = V_s + g_{m6} R_2 V_s = (1 + g_{m6} R_2) V_s$

$\Rightarrow Q_{cm} = \Delta v_{cm} \cdot C_m = \boxed{C_m (1 + g_{m6} R_2)} V_s$  e' la capacita' equivalente  $C_{eq}$  che e' piu' grande di  $C_m$ !

→ questo e' l'effetto di Miller dimostrato in questo caso particolare per il gate di  $M_6$ , e analogo succede all'out:

• il guadagno e'  $g_{m6} R_2 \Rightarrow C_{eq, out} = C_m \frac{1 + g_{m6} R_2}{g_{m6} R_2} \approx C_m$

⇒ la capacita' di miller la posso sdoppiare in due capacita': una al gate e una al nodo d'uscita

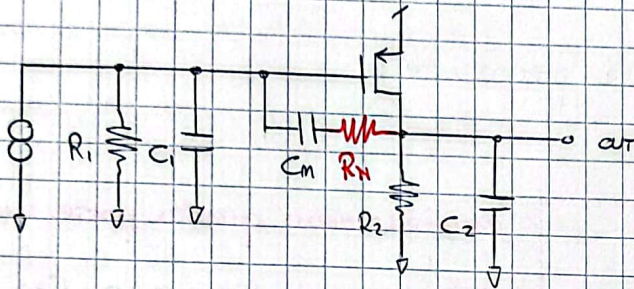
fisicamente:

Δ se guardo dall'out ho che  $v_{out} \gg v_{gate} \Rightarrow$  posso approssimare  $v_{gate} \approx GND$  e quindi la capacita' di Miller la posso modellare come  $C_{eq} \approx C_m$  tra  $v_{out}$  e GND  
 Δ se guardo dal gate, aumentando  $v_{gate} \Rightarrow v_{out}$  diminuisce (con segno  $\ominus$ ) di molto e quindi e' come se fosse + bassa di GND: "vedo" una capacita'  $C_{eq}$  che e' maggiore

La compensazione di Miller non è l'unico metodo di compensazione, e ne esistono altri che permettono di ottenere performance migliori e risolvere anche il problema dovuto allo zero positivo (RHP)

A

per provare a spostare lo zero introduciamo il cosiddetto **Nulling resistor** (resistore di azzeramento) in serie alla capacità di Miller



otengo lo zero @:

$$\text{allora; } g_{m6} V_s = \frac{V_s}{\frac{1}{sC_m} + R_N} \Rightarrow \frac{1}{g_{m6}} = \frac{1}{sC_m} + R_N \Rightarrow s^* = \frac{1}{C_m \left[ \frac{1}{g_{m6}} - R_N \right]}$$

Δ se  $R_N = 0$  ritorna al caso precedente

Δ se  $R_N = \frac{1}{g_{m6}}$  lo zero viene spostato a  $+\infty$

Δ se  $R_N > \frac{1}{g_{m6}}$  allora lo zero diventa uno **zero negativo**

riferendomi a questo terzo caso scelgo  $R_N = \frac{1}{g_{m6}} + \frac{1}{g_{m1}} \Rightarrow s^* = \frac{g_{m1}}{C_m}$

e scegliendo  $R_N = \frac{1}{g_{m6}} + \frac{1}{g_{m1}}$  sposto lo zero @  $f_z = \frac{g_{m1}}{2\pi C_m} = \text{GBWP}$

e questa volta è uno zero negativo!

$$\Rightarrow \Delta\phi = 180^\circ - 90^\circ - \underbrace{\tan^{-1} \frac{\text{GBWP}}{f_z}}_{-45^\circ} + \underbrace{\tan^{-1} \frac{\text{GBWP}}{f_z}}_{+45^\circ} \approx 90^\circ$$

ma così facendo le capacità diventano tutte e tre indipendenti e quindi questo risultato trovato è troppo approssimativo:

devo controllare che non cambino anche altre cose...

① controllo che non siano cambiate le esistenze viste dai condussettori per la stima del polo dominante

$$f_L \approx \frac{1}{2\pi [C_1 R_1^{(0)} + C_2 R_2^{(0)} + C_m R_m^{(0)}]} = \frac{1}{2\pi b_1}$$

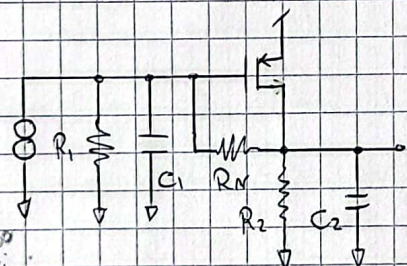
prima:  $R_m^{(0)} = R_1 + R_2 + R_2 R_1 g_{m6}$

ora:  $R_m^{(0)} = R_1 + R_2 + \underbrace{R_2 R_1 g_{m6}}_2 + \cancel{R_m}$  e' trascurabile  
 100 MΩ    kΩ

le altre e' facile verificare che non sono cambiate in quanto quando  $C_m$  e' aperto,  $R_v$  e' un ramo morto

⇒ il polo dominante non viene spostato significativamente

② stimo il secondo polo considerando una nuova rete in cui  $C_m$  e' un corto: esso sara' il polo a bassa frequenza di tale rete



$$\Rightarrow f_z = f_L' \approx \frac{1}{2\pi [R_1^{(0)} C_1 + R_2^{(0)} C_2]}$$

se testo dopo  
tornera' dopo  
molti  
cicli

$$R_1^{(0)} = \cancel{R_1} \parallel \begin{matrix} \text{trans.} \\ R_N + R_2 \\ 1 + g_{m6} R_2 \end{matrix} \approx \frac{1}{g_{m6}} \quad (R_1 \gg \frac{1}{g_{m6}})$$

$$R_2^{(0)} = \cancel{R_2} \parallel \begin{matrix} \text{trasc.} \\ R_N + R_1 \\ 1 + g_{m6} R_1 \end{matrix} \approx \frac{1}{g_{m6}} \quad (R_2 \gg \frac{1}{g_{m6}})$$

$$\} \longrightarrow = \frac{g_{m6}}{2\pi (C_1 + C_2)}$$

⇒ il secondo polo e' uguale al secondo polo della rete senza resistore di azzerramento



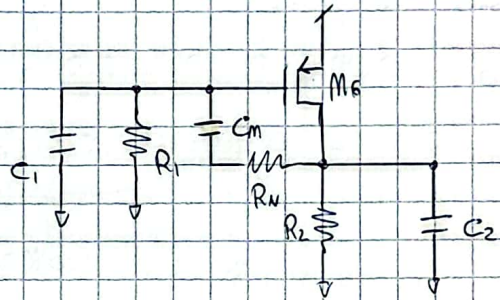
③ stimo il terzo polo, che e' quello ad alta frequenza della rete originale, con il metodo delle costanti di tempo

$$f_3 \approx \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1}{C_1 R_1^{(2,m)}} + \frac{1}{C_2 R_2^{(1,m)}} + \frac{1}{C_m R_m^{(1,2)}} \right]$$

$$R_1^{(2,m)} = R_1 \parallel R_N \approx R_N$$

$$R_2^{(1,m)} = R_2 \parallel R_N \approx R_N$$

$$R_m^{(1,2)} = R_N$$



$$\Rightarrow f_3 \approx \frac{1}{2\pi R_N} \left[ \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_m} \right] \text{ e' la serie tra i "condensatori"}$$

$\Rightarrow C_1$  domina perche di solito e' la + piccola

$$= \frac{1}{2\pi R_N C_1}$$

posso ricalcolare il nuovo margine di fase (considero  $R_N = \frac{1}{g_{m6}} + \frac{1}{g_{m1}} = 1,3 \text{ k}\Omega$ )

$$\rightarrow \text{GBWP} = 35,6 \text{ MHz}$$

$$\rightarrow f_3 = 112 \text{ MHz}$$

$$\Rightarrow \Delta\phi = 90^\circ - \tan^{-1}(\text{GBWP}) = 72^\circ \text{ questo e' quello corretto}$$

$\downarrow$   
visto prima  $\underbrace{\quad}_{f_3} \approx 18^\circ$

### implementare il resistore di azzerramento:

il modo + efficace per implementare il nulling resistor e' usare un MOS in regime ohmico in serie a  $C_m$ :

$$R_N = \frac{1}{g_{m5}} (1 + \alpha) \text{ con } \alpha = \frac{g_{m6}}{g_{m1}} \text{ e posso ricavarmi}$$

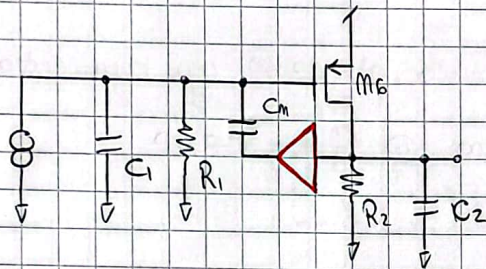
$$\Rightarrow \frac{(W/L)_5 V_{ov5}}{(W/L)_1 V_{ov1}} = 1 + \alpha$$

e di solito si usa lo stesso overdrive per i due transistor: in questo caso la tensione di bias al gate deve essere  $V_{ov} = V_{DD} - 2V_{ov5}$

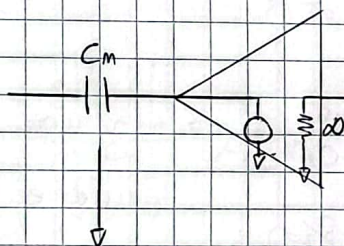
un altro metodo per rimuovere lo zero presente nella compensazione di Miller (obrettutto positivo) può essere fermare la corrente che passa nella capacità  $C_m$  e che raggiunge il nodo di out, senza però cambiare la tensione ai capi di  $C_m$

B

→ per fare ciò uso un **voltage buffer** tra l'output e  $C_m$



Ho ancora l'effetto di Miller? **Sì** perché ho il buffer (ideale) che riporta la stessa tensione dall'out ad un pin di  $C_m$



→ ho due poli

questa volta nemmeno  $C_m$  contribuisce allo zero perché se cortocircuitiamo  $C_m$  (per  $f \rightarrow \infty$ ) allora ho zero all'out avendo l'ingresso diverso da zero; quando ho zero all'out →  $C_m$  è a massa → non ho più caduta di tensione su  $R_1$  ( $C_m$  è un corto) → non ho tensione al gate!

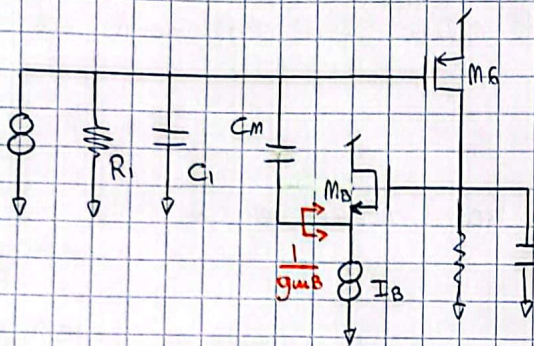
come prima posso verificare che:

- ① il primo polo, dominante, non varia significativamente
- ② nemmeno la GBWP cambia
- ③ il secondo polo invece @  $f_z = \frac{1}{2\pi [R_1^{(0)} C_1 + R_2^{(0)} C_2]}$   $\approx \frac{g_{m6}}{2\pi C_2}$

↓  
viene spostato a frequenze + alte ↳  $\frac{1}{\Delta C_m} = 0$

⇒ il secondo polo dipende dalla capacità di carico  $C_2$  e quindi ho un limite superiore di  $C_2$  imposto dalla  $GBWP < f_z$

il buffer lo implemento con un source follower



a causa della  $R_{out, BUF} \neq 0$  nel caso reale ho uno zero @

$$f_z = \frac{1}{2\pi R_{out}^{(0)} C} \approx \frac{g_{m5}}{2\pi C_m}$$

e' uno zero positivo che se sposto vicino al GBWP mi aumenta  $\Delta\phi$ ;

per comodita' scelgo di spostare lo zero @  $f_z = GBWP$

$$\Rightarrow g_{m1} = g_{m5}$$

$$\Rightarrow \text{usando } V_{ov5} = 0,7V \text{ e } I_B = 75\mu A$$

$$\text{con } C_m = 5 \text{ pF allora } f_z = GBWP = 48 \text{ MHz}$$

③ ora il secondo polo varia:

$$f_z = \frac{1}{2\pi [R_1^{(0)} C_1 + R_2^{(0)} C_2]} \approx \frac{g_{m6}}{2\pi C_2} \rightarrow \text{ma non significativamente e rimane dov'è}$$

$$R^{(0)} = \frac{1}{g_{m5}}$$

$$R^{(0)} = \frac{1/g_{m5}}{(g_{m5} R_2) \rightarrow G_{loop}}$$

$$\hookrightarrow R_2^{(0)} = R_1 \parallel \frac{1}{g_{m5} g_{m6} R_2}$$

④ controllo anche il terzo polo

$$f_3 = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{g_{m5}}{C_1} + \frac{1}{C_2 R_2} \right] \approx \frac{g_{m5}}{2\pi C_1} = 147 \text{ MHz con gli stessi valori}$$

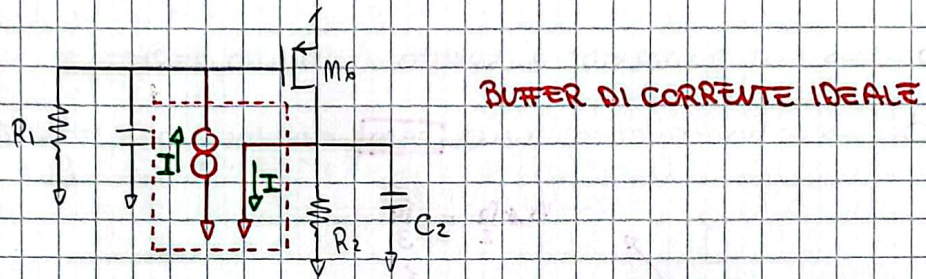
il transistor e' CFF perche'  $\tan^{-1} \left( \frac{GBWP}{f_3} \right) = 18^\circ$   
 catocircuitando  $C_1$  ho il gate e' a massa

$$\Delta\phi = 72^\circ$$

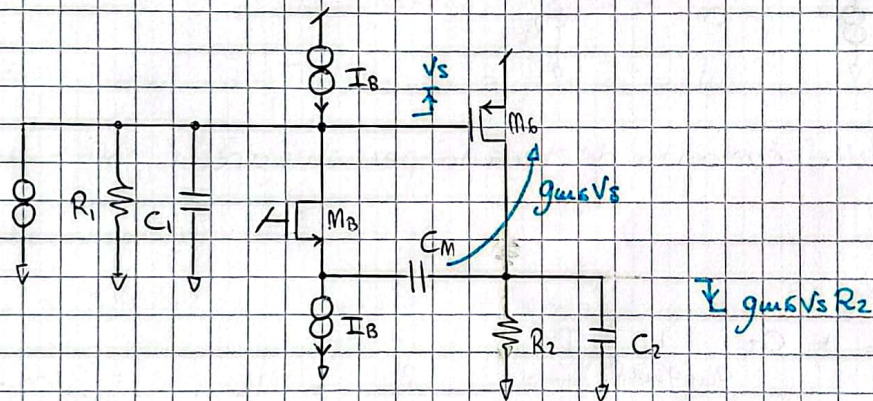
un'altra alternativa per fermare la corrente di feedforward su  $C_M$  e' usare un **buffer di corrente**



il buffer di corrente e' un dispositivo che mi legge la corrente (in questo caso attraverso  $C_M$ ) e me la riporta in uscita (in questo caso al gate di  $M_6$ )



un buffer di questo tipo lo implemento con un **CURRENT READER** (common gain)



la carica sul condensatore e'  $gm_6 R_2 V_s C_M = Q_M$

e quindi per avere uno swing di  $V_s$  la carica che preleva e'  $\frac{Q_M}{V_s}$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{Q_M}{V_s} = G_2 C_M \quad (\text{N} \text{ come l'effetto di Miller})$$

stimo il **secondo polo**  $f_2 = \frac{1}{2\pi [G_1 \cdot R_1^{(0)} + G_2 R_2^{(0)}]}$

$\frac{1}{g_{m6}}$   $\rightarrow$  il secondo polo non dipende dalla capacita' di carica  $C_2$

( $G_1$  e' aperto e  $C_M$  e' shorted)

... questo in teoria (fig. sopra)

Se guardiamo la figura del buffer reale, le cose sono diverse:

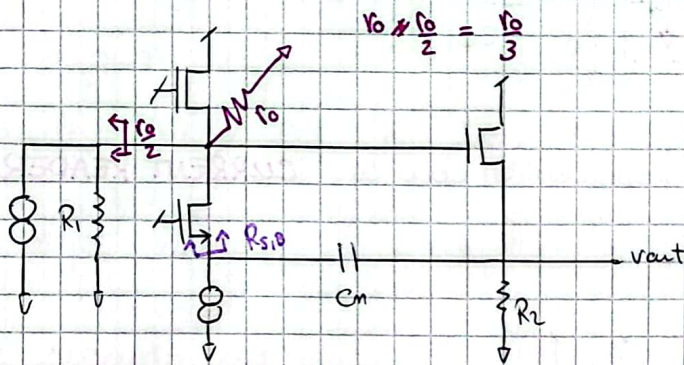
$$R_{s,B} = \frac{r_{oB} + \frac{r_o}{3}}{1 + g_{mB} r_{oB}} \approx \frac{1}{g_{mB}} \quad \text{se } r_{oB} \gg \frac{r_o}{3} \quad (\text{ma posso fare che sia così})$$

è un' approssimazione molto rude ed è valida solo in una prima analisi

se  $C_2 = 0 \rightarrow$  NON HO ZERI

se  $C_1 = 0 \rightarrow$  il transistor è spento: NON HO ZERI

se  $C_m = 0 \rightarrow$  ho ancora uno **zero** che prima era @  $s = \frac{g_{mB}}{C_m}$



$$f = \frac{g_{mB}}{2\pi C_m}$$

usiamo il metodo delle costanti di tempo per stimare i poli:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi \left[ C_1/g_{mB} + C_2 \frac{1}{g_{mB} g_{mB} R_1} \right]}$$

↳ come nel caso ideale  $\frac{R}{g_{mB}} = \frac{1}{g_{mB}} \cdot \frac{1}{g_{mB} R_2}$  (loop)

$$f_3 = \frac{1}{2\pi \left[ \frac{1}{C_1 R_1} + \frac{g_{mB}}{C_2} \right]}$$

↳ la corrente scorre tutta su  $M_2$  ( $g_{mB}$  è la resistenza vista da  $C_2$  con  $C_1$  shorted)

$C_2$  è shorted e "assorbe" tutta la corrente del MOS e ciò che passa per  $C_1$  può scorrere solo su  $R_1$

$$\approx \frac{g_{mB}}{2\pi C_2}$$

ma  $g_{mB} \approx g_{m1}$  e  $C_2 > C_1 \Rightarrow f_2 > f_3$

⇒ il risultato non è consistente!

per calcolare i poli dobbiamo fare riferimento alla FdT:

$$s^2 b_2 + b_1 s + 1 = 0$$

dove  $b_1 = \left[ C_1 \cdot \frac{1}{g_{m6}} + C_2 \frac{1}{g_{m6} g_{m8} R_1} \right]$

e  $b_2 = \left[ C_1 C_2 R_1 R_2 \right] = \left[ C_1 C_2 \frac{1}{g_{m6}} \frac{1}{g_{m8}} \right]$

un polinomio del II ordine di quel tipo puo' essere scritto come:

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1 \Rightarrow s^2 + \underline{2s \operatorname{Re}\{p\}} + \underline{|p|^2} = 0$$

perche'?

un polinomio  $(x-x_1)(x-x_2) = 0$   
 $x^2 - \underbrace{(x_1+x_2)}_{\text{somma radici}} x + \underbrace{x_1 x_2}_{\text{prodotto radici}} = 0$   
prodotto  $\Rightarrow (\bar{\alpha} + j\bar{\omega})(\bar{\alpha} - j\bar{\omega}) = \bar{\alpha}^2 + \bar{\omega}^2 = |p|^2$   
somma  $\Rightarrow (\bar{\alpha} + j\bar{\omega}) + (\bar{\alpha} - j\bar{\omega}) = -2\alpha = -2 \operatorname{Re}\{p\}$

$$\Rightarrow \frac{s^2}{|p|^2} + s \frac{2 \operatorname{Re}\{p\}}{|p|^2} + 1 = 0 \quad \text{pongo } \xi = \frac{\operatorname{Re}\{p\}}{|p|}$$

$$\frac{s^2}{|p|^2} + s \frac{2\xi}{|p|} + 1 = 0 = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1$$

$$\omega_0^2 = |p|^2 \quad Q = \frac{1}{2\xi}$$

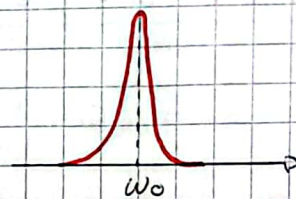
paragonando  $b^2 s^2 + b_1 s + 1 = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1$  ricavo che

$$b_2 = \frac{1}{\omega_0^2} = C_1 C_2 \frac{1}{g_{m6} g_{m8}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g_{m6} g_{m8}}{C_1 C_2}}$$
$$b_1 = \frac{1}{\omega_0 Q} = \frac{C_1}{g_{m6}} \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{g_{m6} C_2}{g_{m8} C_1}}$$

nel nostro caso  $\omega_0 = 2\pi \cdot 80 \text{ MHz}$  e  $Q = 1,75$  (4,9 dB)

La stima veniva inconsistente perché i poli non sono reali mentre tale stima vale solo per poli reali

→ in  $\omega_0$  abbiamo un picco di risonanza

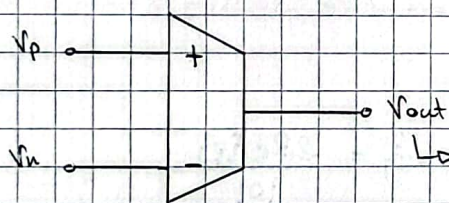


che devo decidere dove posizionare considerando che:

- ho due poli che danno un contributo in fase di  $-90^\circ - 90^\circ = -180^\circ$   
molto veloci → varia molto velocemente e può rendere instabile

⇒ scelgo di spostare il picco oltre la GBWP aumentando  $g_{mB}$  e così facendo ottengo un miglioramento in stabilità senza perdere troppe in performance

Quello che ho progettato è detto **OPERATIONAL TRANSCONDUCTANCE AMPLIFIER (OTA)**



↳ l'out è ad **alta impedenza** e per trasformarlo in OPAMP devo aggiungere un buffer

per fare questo OTA ho usato la cascata fra due stadi  $G_1$  e  $G_2$  che mi hanno introdotto 2 poli

... esiste un modo per avere un solo stage?

## TABELLA DI CONFRONTO

	GBWP	$I_{tot}$	C	$\Delta\phi$	F <sub>oM</sub>
MILLER	15 MHz	600 $\mu$ A	16 pF	60°	125 MHz $\frac{pF}{\mu A}$
NULLING	36 MHz	300 $\mu$ A	6,7 pF	72°	600 MHz $\frac{pF}{\mu A}$
VOLTAGE	48 MHz	375 $\mu$ A	5 pF	72°	640 MHz $\frac{pF}{\mu A}$
CURRENT	72 MHz	420 $\mu$ A	3,2 pF	72°	860 MHz $\frac{pF}{\mu A}$

utilizzando due stage CMOS

ora provo a sintetizzare tutto in un singolo stage con guadagno di 90 dB...  
in tal caso ho che

$$G_v = g_m \frac{r_o}{2} = 90 \text{ dB} = 32000$$

↑  
impiego

$$= \frac{2I}{V_{ov}} \cdot \frac{V_A}{2I} = \frac{V_A}{V_{ov}} \Rightarrow \text{con } V_{ov} = 0,1 \Rightarrow V_A = 3200 \text{ V}$$

$$\Rightarrow L = \frac{L_0}{V_A^0} V_A = 180 \mu\text{m}$$

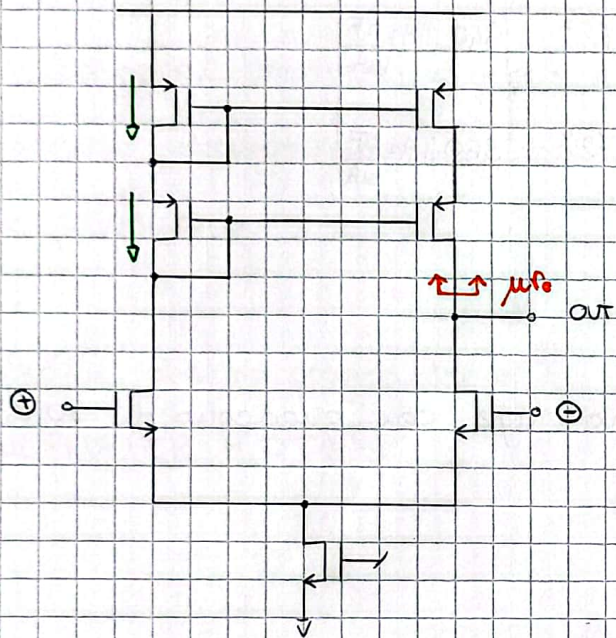
$$\Rightarrow W = L \cdot 150 = \underline{\underline{24 \text{ mm} !!!}}$$

ho un transistor troppo grande, che non può essere integrato... questa non è la strada giusta; posso arrivare a un buon risultato usando una diversa tipologia di amplificatore, detta telescopic cascode amplifier



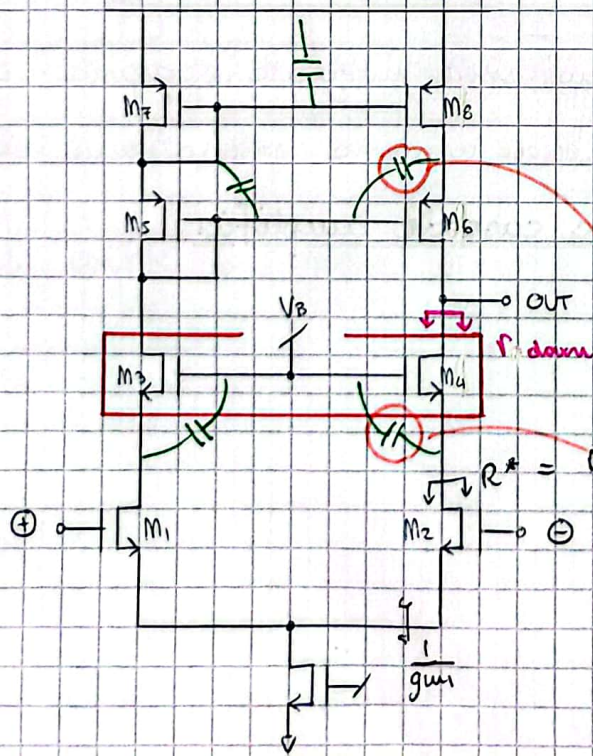
# TELESCOPIC CASCODE AMPLIFIER

alla base del dispositivo c'è la volontà di aumentare il gain aumentando  $\frac{r_o}{2}$ , la resistenza d'uscita; per farlo usiamo la cascata di **due mirror** che prende il nome di: **CASCODE STRUCTURE**



le due correnti sono uguali perché il mos sopra tende ad evitare che il suo drain scenda a causa della corrente del mos sotto: eroga la stessa  $I$

- ⇒ ancora, il gain è limitato perché rimane sempre nell'ordine di  $g_m r_o$
- ⇒ devo aumentare la resistenza vista all'output della parte bassa...



ora la resistenza vista è:

$$r_{dam}^0 = r_{o4} + r_{o2} \cdot 2 + 2g_{m4} r_{o4} r_{o2}$$

$$\downarrow 2g_m r_o^2$$

senza considerare il mirror (feedback)

$$r_{dam} = \frac{1}{2} \cdot 2g_m r_o^2 = g_m r_o^2$$

$$R^* = r_{o2} + \frac{1}{g_{m1}} (1 + g_{m2} r_{o2}) \approx r_{o2} + r_{o2} = \underline{2r_{o2}}$$

potrebbero aggiungere poli perché vedono  $\approx r_o$

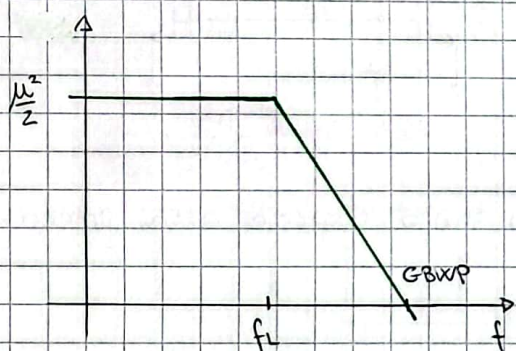
$$\Rightarrow \text{ho una } R_{out} = \frac{1}{2} g_m r_o^2$$

$$\Rightarrow \text{la corrente rimane la stessa } \frac{g_m v_d}{2} + \frac{g_m v_d}{2} = g_m v_d$$

$$\text{e quindi ho un gain pari a } G_{id} = \mu g_m \frac{r_o}{2} \approx \boxed{\frac{\mu^2}{2}}$$

in questo caso:

- non ho più il problema della compensazione
- l'errore relativo al mirror e' ancora presente (parte della corrente, che passa su  $r_o$ , non viene specchiata)
- un aspetto di avere un CMRR migliore perche' il bilanciamento e'  $\mu$  volte più basso
- la risposta in frequenza e' la seguente:



$$f_L = \frac{1}{2\pi C_2 \mu \frac{r_o}{2}}$$

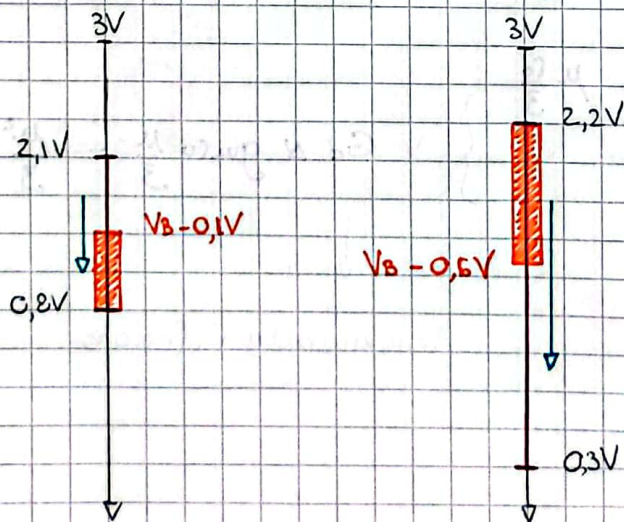
$$GBWP = \frac{g_m^2 r_o^2}{2} \cdot \frac{1}{2\pi C_2 g_m \frac{r_o}{2}} = \frac{g_m}{2\pi C_2}$$

↳ pari all'altra configurazione

le due capacita' che potevano aggiungere poli non modificano  $f_L$  perche'

danno contributo trascurabile:  $C_2 \mu \frac{r_o}{2} + \frac{C_4}{g_m} + C_6 r_o + C_5 r_o$  trascurabile...

- abbiamo un problema di swing



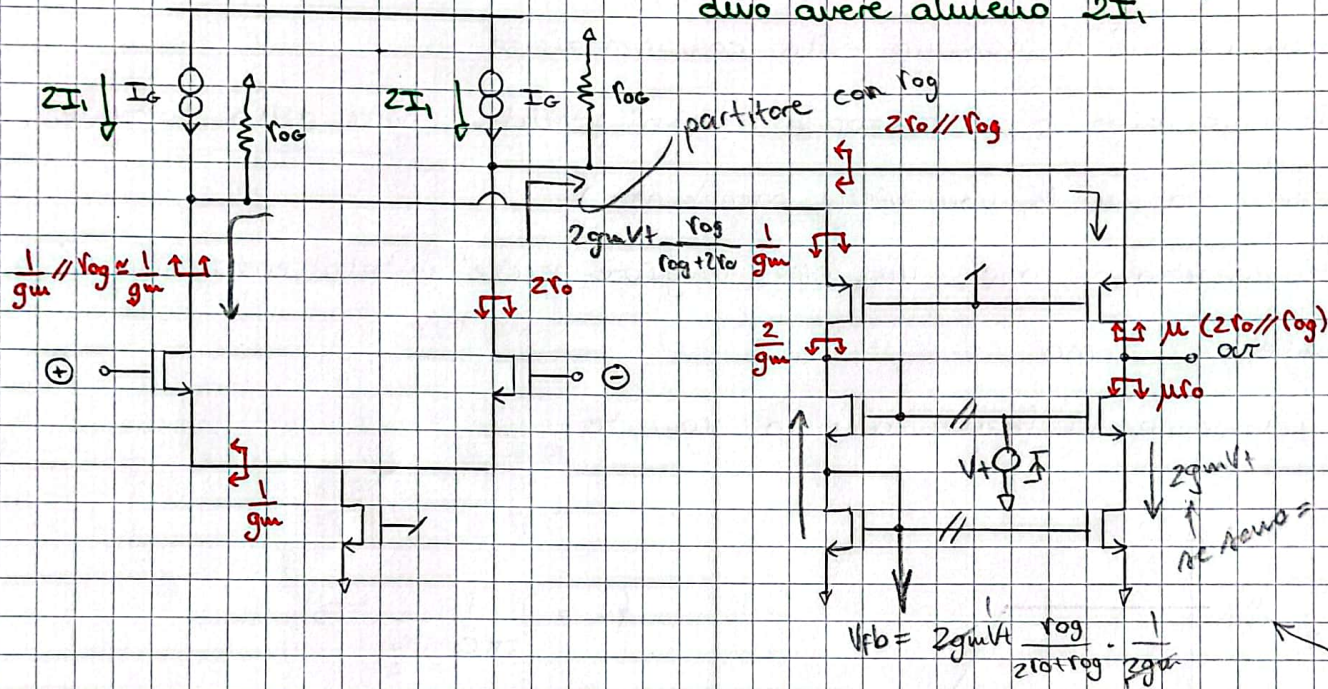
devo scegliere se aumentare lo swing in in/out, diminuendo l'altro...

→ in buffer non va bene!

per mitigare tale limitazione nello sving, dovuta alla lunga serie di transistor posso usare una **FOLDED CASCODE**

implemento il mirror con degli nmos

affinché non sia OFF la parte folded devo avere almeno  $2I_1$



controlliamo che il gain non sia variato troppo rispetto alla precedente struttura:

$$r_{down} = \mu r_O$$

$$r_{up} = \frac{g_m \mu r_O (2r_O // r_O)}{1 - G_{loop}} = \mu (r_O // r_O)$$

testo tagliando i due mirror (due in serie  $\Rightarrow g_m = g_{m1} + g_{m2}$ )

$$G_{loop} = - \frac{r_O}{r_O + 2r_{O2}}$$

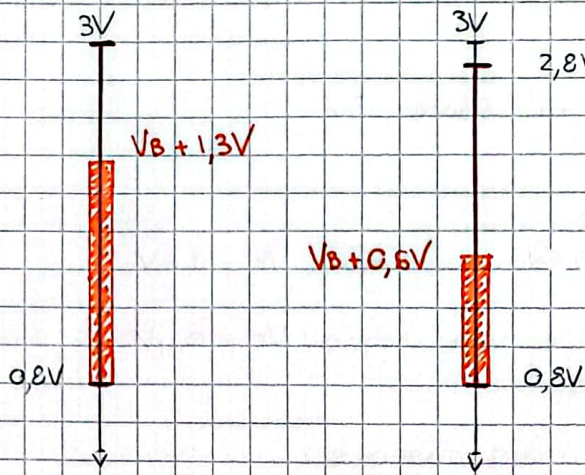
$$\Rightarrow R_{out} = \mu r_O // \mu (r_O // r_O) = \dots \approx \mu \frac{r_O}{3}$$

la corrente  $i_{cc} = g_m v_d$

$$G_d \approx g_m r_O \frac{\mu}{3} = \frac{\mu^2}{3}$$

leggermente inferiore

Ma ho uno swing notevolmente aumentato:



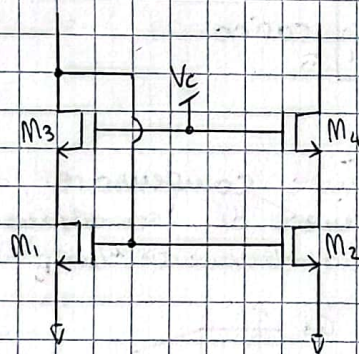
2,8V → se ho  $V_B = 1,7V$  ?  
 all'input ho uno swing 0,8 →  $V_{DD}$   
 all'output ho " " 0,8 → 2,8

→ e' nettamente superiore rispetto a prima

posso incrementare ulteriormente lo swing in uscita usando un

**ENHANCED MIRROR**

↳ pongo il gate del mirror in alto @  $V_C$   
 ↳ collego il gate del mirror di sotto al drain di quello sopra



↳ posso "prelevare"  $V_C$  dal drain di  $M_3$  con un resistore interposto:



tale configurazione abbassa notevolmente il potenziale del nodo di source di  $M_3$  (e di  $M_4$ ) e infatti se ho

$$V_C = 0,8V$$

$$V_{D,S,2} = 0,1V \quad V_{D,S,4} = 0,1V \quad \Rightarrow \quad \text{ho un } V_{OUT,min} = 0,2V$$

↓  
 viene ridotto di molto  
 (prima era 0,8V)

# NESTED MILLER COMPENSATION

scalando la tecnologia non posso più usare 3V

@ 0,35  $\mu\text{m}$   $\Rightarrow V_{DD} = 3,3V$  e una soglia  $V_T = 0,6V$

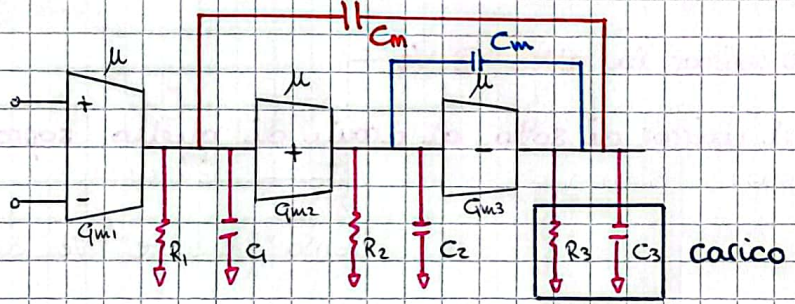
@ 65 nm  $\Rightarrow V_{DD} = 0,9V$  e una soglia  $V_T = 0,4V$

$\Rightarrow$  la soglia cala meno rispetto all'alimentazione

$\Rightarrow$  non riesco a mettere molti transistor uno sopra l'altro ...

... le cascode sono difficili da implementare

$\Rightarrow$  molte volte sono obbligato ad usare 3 stadi



$\mu^3 \approx 100-110 \text{ dB}$

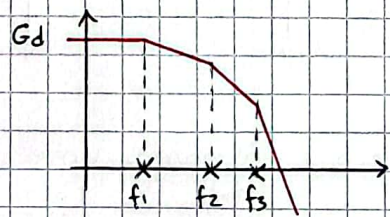
$\Rightarrow$  ho 3 poli e quindi devo assolutamente compensare, e lo facciamo in

$\hookrightarrow$  incontro l'axe 0dB con pendenza di  $-60 \text{ dB/dec}$

$\Rightarrow$  sono altamente instabile

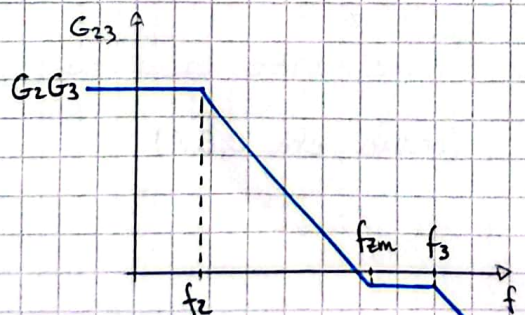
3 step:

- approccio intuitivo
- sizing
- calcoli



e quello che voglio ottenere e' un singolo polo dominante:

dividiamo gli stage, raggruppando i secondi due e facciamo una compensazione di Miller, in questo modo otteniamo una FdT:



$\rightarrow$  ho un polo dominante (Miller) e sposto le altre singolarita' a freq. + alta

in questo caso ho un  $C_{fz}(0) = G_{m2} R_2 G_{m3} R_3$

$$f_z = \frac{1}{2\pi R_2 G_{m3} R_3 C_m} \quad \left. \vphantom{f_z} \right\} \text{GBWP}_{2,3} = \frac{G_{m2}}{2\pi C_m}$$

ho poi uno zero  $f_z = \frac{G_{m3}}{2\pi C_m}$  ( $\rightarrow$  GBWP<sub>2,3</sub>)

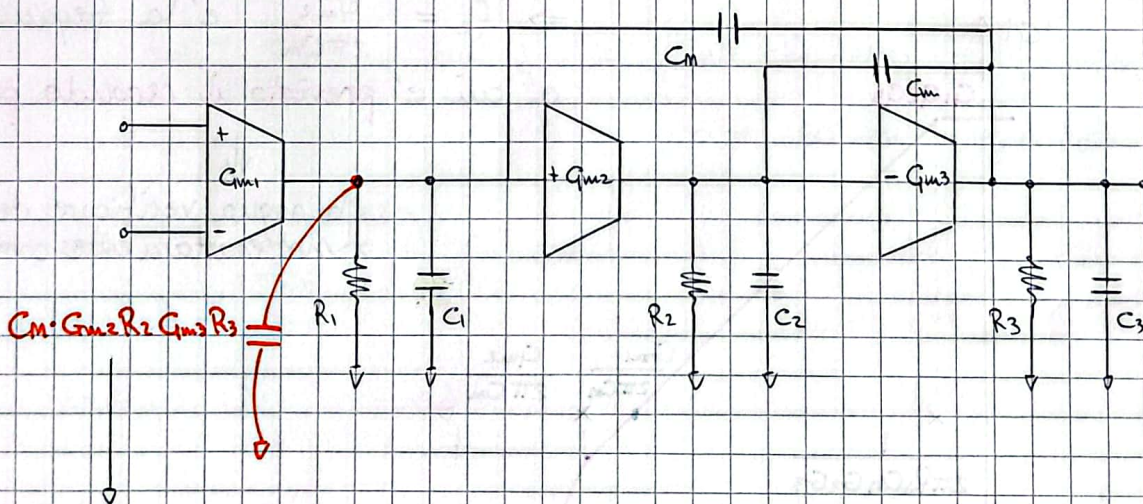
e un terzo polo  $f_3 = \frac{G_{m3}}{2\pi (C_3 + C_2)}$  (lo stimo considerando  $C_m$  shorted)

... come una classica compensazione di Miller. Abbiamo ottenuto un singolo polo dominante  $\Rightarrow$  il sizing deve rispettare le ipotesi della pag succ.

... rifacciamo una **seconda compensazione di Miller** per allontanare i poli del primo stage e del **secondo/terzo stage** (quello dominante)

$\Rightarrow$  **NESTED MILLER COMP.**: una dentro l'altra

affinche valga l'effetto di Miller, tra il nodo 1 e il nodo 3 deve avere un guadagno invertente: **ecco perche' uso un  $\oplus$  e un  $\ominus$**

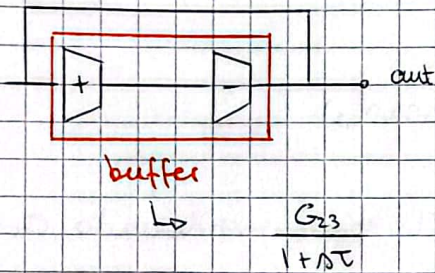


mi genera un polo dominante @  $f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_m \underbrace{G_{m2} R_2}_{G_2} \underbrace{G_{m3} R_3}_{G_3}}$

e quindi una  $\text{GBWP} = \frac{G_{m1}}{2\pi C_m}$

per stimare il secondo polo (quello dominante per  $C_m$ ) cortocircuito  $C_m$

quello che ottengo e' un buffer

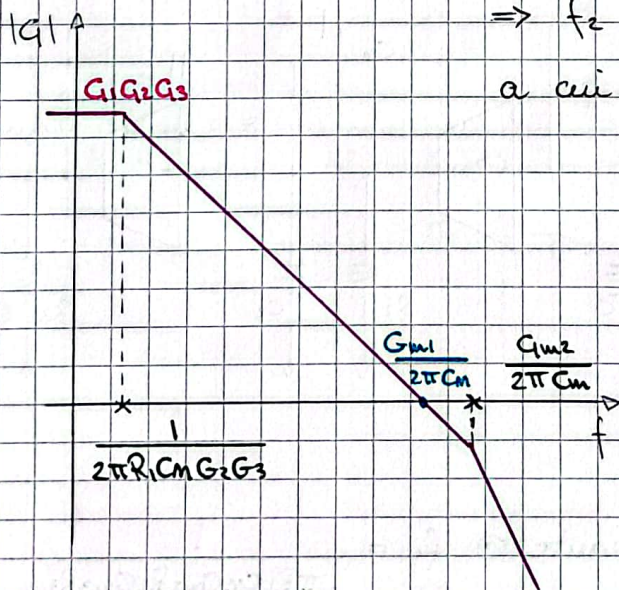


closed-loop:  $\frac{1}{1 + sT_H}$  dove  $T_H = \frac{T}{G_{23}}$

dove  $\frac{1}{2\pi T_H} = \frac{G_{23}}{2\pi T} = GBWP_{2,3}$

e quindi un amplificatore con un singolo polo e' in configurazione buffer, allora il polo e' spostato alla GBWP

e quindi un aspetto che il secondo polo (quello che stavo cercando) sia alla  $GBWP_{2,3} = \frac{G_{m2}}{2\pi C_m}$  come calcolata precedentemente



$\Rightarrow f_2 = \frac{G_{m2}}{2\pi C_m}$  e' la frequenza a cui e' previsto il secondo polo

↓  
bisogna verificare che sia esattamente così!!!

affinche' cio' valga devono valere alcune "ipotesi"

① il terzo polo (rettato da  $C_3$ ) deve essere  $\gg GBWP_{2,3}$

$$\frac{G_{m2}}{2\pi C_m} \ll \frac{G_{m3}}{2\pi C_3}$$

② la GBWP dell'intero  $<$  GBWP del secondo/terzo stadio

riassumendo:

$$\frac{g_{m1}}{2\pi C_m} \ll \frac{g_{m2}}{2\pi C_m} \ll \frac{g_{m3}}{2\pi C_3}$$

## IMPLEMENTAZIONE CIRCUITALE

facciamo un **sizing** considerando  $C_3 = 5pF \wedge GBWP = 5MHz \dots$   
per farlo recuperiamo alcuni dei risultati già ottenuti precedentemente

$$\frac{g_{m3}}{g_{m2}} \approx 3 \Rightarrow S GBWP_{2,3} \approx f_z \quad (\text{ricavato numericamente in precedenza})$$

per dividere GBWP e  $f_{zero} \mid f_z > GBWP$

(questo mi permetteva di avere  $+18^\circ$  di margine)

poiché tra  $\frac{g_{m2}}{2\pi C_m} \overset{\times 5}{\ll} \frac{g_{m3}}{2\pi C_3}$  c'è un fattore 5, potrei pensare di fare uguale

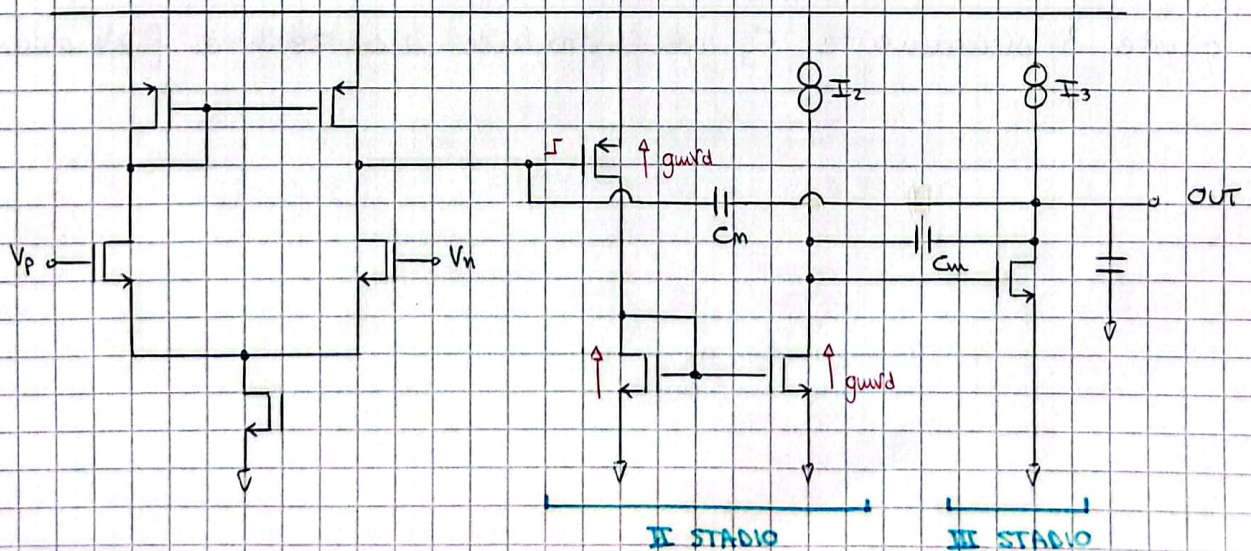
anche nella prima equazione, ma è troppo... basta un fattore 2

se mettiamo il secondo polo a  $2 GBWP$

$$\tan^{-1} \frac{GBWP}{f_z} = \tan^{-1} \frac{1}{2} = 30^\circ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ho che esso contribuisce per solo } 30^\circ; \\ \text{cioè } 60^\circ \text{ di margine che sono sufficienti} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$  scelgo  $\frac{g_{m1}}{2\pi C_m} \overset{\times 2}{\ll} \frac{g_{m2}}{2\pi C_m}$

la struttura è la seguente:





$$\text{se } \frac{G_{m3}}{2\pi C_3} = 50 \text{ MHz} \Rightarrow G_{m3} = 2\pi C_3 \cdot 50 \text{ MHz} = 1,6 \text{ uAV}^{-1}$$

$$\text{e quindi } G_{m2} \approx \frac{1}{3} G_{m3} = 0,5 \text{ uAV}^{-1}$$

$$\text{se } \frac{G_{m2}}{2\pi C_m} = 10 \text{ MHz} \Rightarrow C_m = \frac{G_{m2}}{2\pi \cdot 10 \text{ MHz}} = 8,3 \text{ pF}$$

per quanto riguarda la seconda parte; per la prima:

$$\frac{G_{m1}}{2\pi C_m} = 5 \text{ MHz}$$

2 gradi di liberta'



ma devo rispettare le condizioni sul rumore,

da cui ricavo  $G_{m1} \mid G_{m1} = 1,5 \text{ uAV}^{-1}$

$$\Rightarrow C_m = 48 \text{ pF}$$

ho poi che le correnti sono  $I_3 = \frac{G_{m3} V_{ov3}^{0,1V}}{2} = 80 \text{ uA}$

$$I_2 = \frac{G_{m2} V_{ov2}^{0,2V}}{2} = 50 \text{ uA} \quad \text{Vramo} \quad \rightarrow \text{perche' volevo } 0,8V \text{ al mirror...}$$

$$\Rightarrow I_{2, \text{TOT}} = 100 \text{ uA}$$

e quindi l'assorbimento totale e'  $I_{\text{TOT}} = 330 \text{ uA}$

Ora dobbiamo verificare che tutto sia rispettato e ... siamo nelle

posizioni attese ... per farlo passiamo dalla funzione di trasferimento

dell'OTA di Nested-Miller tenendo presente che:

- 5 capacita' diventano 3 per effetto di Miller

- di queste 3 sicuramente  $C_3$  non introduce uno zero a  $f \neq +\infty$

quindi,

$$G_{m1} = 1,5 \text{ mA/V}^{-1}$$

$$G_{m2} = 0,5 \text{ mA/V}^{-1}$$

$$G_{m3} = 1,6 \text{ mA/V}^{-1}$$

$$C_1 = 70$$

$$C_2 = 70$$

$$C_3 = 140$$

$$L_1 = 0,35 \mu\text{m}$$

$$L_2 = 0,7 \mu\text{m}$$

$$L_3 = 0,7 \mu\text{m}$$

$$I_1 = 150 \mu\text{A}$$

$$2I_2 = 100 \mu\text{A}$$

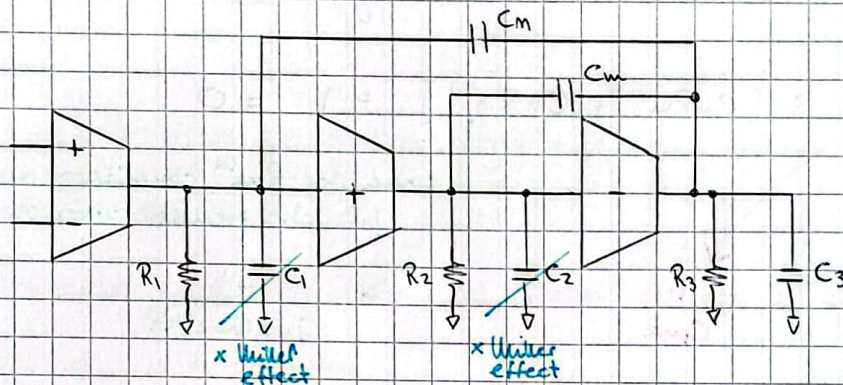
$$I_3 = 80 \mu\text{A}$$

$$G = 117 \text{ dB}$$

$$R_1 = 47 \text{ k}\Omega$$

$$R_2 = 140 \text{ k}\Omega$$

$$R_3 = 88 \text{ k}\Omega$$



ho 3 capacita' indipendenti  $\Rightarrow$  3 poli

quindi posso scrivere la FdT del circuito come:

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + 1}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1}$$

$\rightarrow$  solo  $C_m$  e  $C_m$  introducono 0  $\Rightarrow$  2° grado

$\rightarrow$  3 poli  $\Rightarrow$  3° grado

$$\underbrace{\left(1 + \frac{s}{\omega_m}\right)}_{\text{polo dominante}} (b_2 s^2 + b_1 s + 1)$$

$\omega_m = 2\pi f_1$

$\rightarrow$  quando  $C_m$  e' shorted

il calcolo delle resistenze e' uelle dispende...

$$\Rightarrow T(s) = \frac{\Delta^2 C_m C_m R_{om}^{(o)} R_{om}^{(m)} + \Delta [C_m R_{om}^{(o)} + C_m R_{om}^{(m)}] + 1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_m}\right) \left( \Delta^2 C_m C_3 R_{in}^{(o)} R_3^{(m)} + \Delta [C_m R_{in}^{(o)} + C_3 R_3^{(o)}] + 1 \right)}$$

$\frac{1}{G_{m3} - G_{m2}}$ 
**MOLTO DIFFICILE**
 $\frac{1}{G_{m3} G_{m2} R_2}$

$\frac{G_{m3} - G_{m2}}{G_{m3} G_{m2}}$

$$\Rightarrow T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + 1}{(1 + \frac{s}{\omega_m}) \left( s^2 \frac{C_m C_3}{G_{m3} G_{m2}} + s \left[ \frac{C_m (G_{m3} - G_{m2})}{G_{m3} G_{m2}} + \frac{C_3}{G_{m3} G_{m2} R_2} \right] + 1 \right)}$$

trasc... fai i conti!

otteniamo che i due poli ad alta freq. possono essere complessi coniugati:

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{\omega_0 b_1} = \frac{\sqrt{G_{m3} G_{m2}}}{G_{m3} G_{m2}} \sqrt{\frac{C_3}{C_m}} = 0,64$$

$$\Rightarrow f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{G_{m3} G_{m2}}{C_m C_3}} = 22 \text{ MHz}$$

$\Rightarrow$  questo risultato si discosta dalla previsione fatta precedentemente!

Lavoriamo ora con il numeratore e troviamo gli zeri:

$$s^2 C_m C_m R_{m1}^{(0)} R_{m2}^{(0)} + s [C_m R_{m1}^{(0)} + C_m R_{m2}^{(0)}] + 1 = 0$$

$$\frac{-1}{G_{m3}}$$

La corrente può scorrere solo attraverso  $G_{m3}$

$$\frac{1}{G_{m2}}$$

come per  $R_{m1}^{(0)}$ , considero anche che ho  $G_{m2}$  che prende corrente da  $R_2$

$$\frac{-1}{G_{m3} G_{m2} R_2}$$

trascurabile ( $G_{m2} R_2 = G_2$ )

$$-s^2 C_m C_m \frac{1}{G_{m3} G_{m2}} + s \left[ \frac{C_m}{G_{m3}} + \frac{C_m}{G_{m3} G_{m2} R_2} \right] + 1 = 0$$

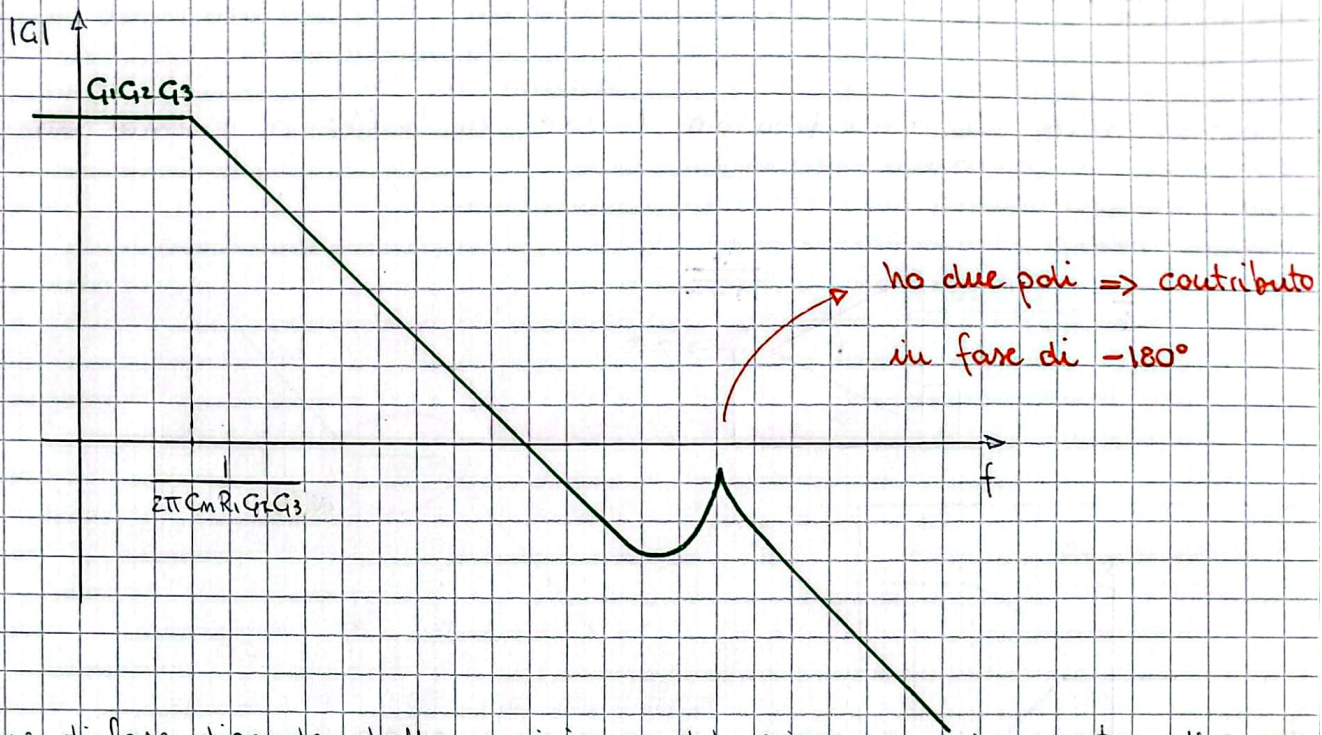
ho due radici  $\Rightarrow$  2 zeri, uno positivo, uno negativo  
 ↓ variazione                      ↓ permanenza

$$\Rightarrow z_{1,2} = -\frac{G_{m2}}{2C_m} \left[ 1 \pm \sqrt{1 + 4 \frac{C_m G_{m3}}{G_{m2} C_m}} \right]$$

che sono a frequenza  $f_z^{(\pm)}$ , dove lo zero negativo è quello a frequenza + elevata, quello positivo a frequenza + bassa

$$f_z^{(\pm)} = \frac{G_{m2}}{4\pi C_m} \left[ \sqrt{4 \frac{G_{m3} C_m}{G_{m2} C_m}} \pm 1 \right]$$

lo zero positivo a circa 6 MHz e lo zero negativo a circa 8 MHz: sono molto vicini e si cancellano quasi, ma visto che ho prima lo zero positivo allora ho una degradazione del margine di fase



il margine di fase dipende dalla posizione del picco e se questo attraversa o no l'asse a 0dB

→ se abbiamo un cross-over del picco allora il margine di fase va considerato in quel punto

→ in tal caso può essere conveniente variare  $Q_{m3}$  per variare il fattore  $Q$  e per ridurlo sotto 0,5  $\Rightarrow$  abbiamo così poli reali

notiamo che:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_{m2}}{C_m} \frac{C_{m3}}{C_3}} = \sqrt{20} \text{ GBWP} = 4,5 \text{ GBWP}$$

$\downarrow$  GBWP<sub>2</sub>      high-freq pole  
 $\parallel$                        $\parallel$   
 $2 \text{ GBWP}$                $10 \text{ GBWP}$

$$Q = \frac{C_3}{C_{m2} \left( \frac{C_{m3}}{C_{m2}} - 1 \right)} \cdot \frac{C_{m3}}{C_{m2}} \cdot \frac{2\pi \cdot 4,5 \cdot \text{GBWP}}{2\pi \cdot 10 \cdot \text{GBWP}} = \frac{3}{3-1} \cdot \frac{2\pi \cdot 4,5 \cdot \text{GBWP}}{2\pi \cdot 10 \cdot \text{GBWP}} = 0,67$$

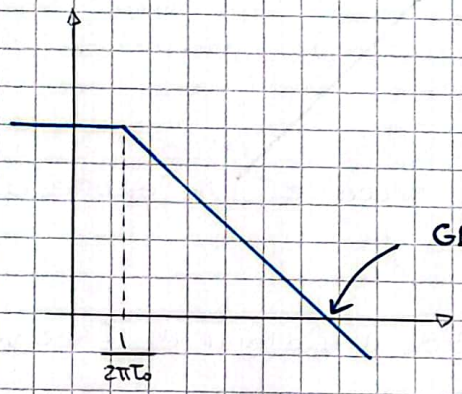
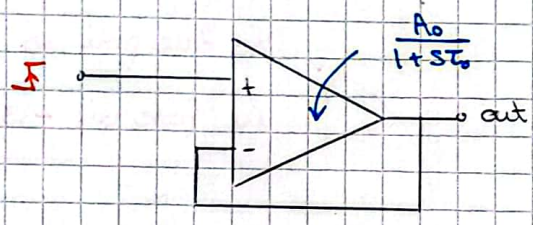
quantità sotto  $\sqrt{\phantom{x}}$

ho quindi un margine di fase pari a:

$$\Delta\phi_m = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP} \cdot f_0}{Q(f_0^2 - \text{GBWP}^2)}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{f_2^+}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{\text{GBWP}}{f_2^-}\right) \approx 76^\circ$$

# IN-BAND DOUBLETS $\epsilon$ SLEW RATE

consideriamo un amplificatore lineare in buffer a singolo polo



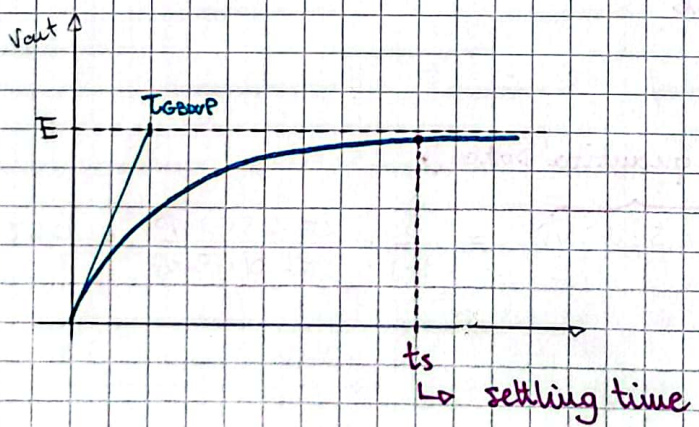
$$GBWP = \frac{1}{2\pi T_{GBWP}} = \frac{A_0}{2\pi T_0} \leftarrow \text{buffer } f_p$$

perche' la closed-loop  $T(s)$  e':

$$T(s) = \frac{\frac{-A_0}{1+sT_0} \text{ forward gain}}{1 + \frac{A_0}{1+sT_0} \text{ 1-loop}} = \dots = \frac{A_0}{A_0+1} \frac{1}{1 + s \frac{T_0}{A_0+1}} \xrightarrow{A_0 \gg 1} \frac{1}{1 + s \frac{T_0}{A_0}}$$

il polo si muove verso la GBWP! (infatti siamo in configurazione a buffer)

e quindi:



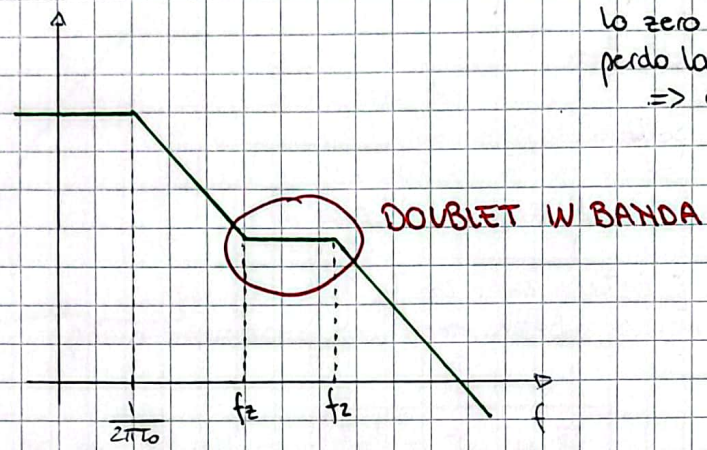
$$t_s = T_{GBWP} \cdot \ln \frac{E}{\Delta}$$

puo' valere 100, 1000

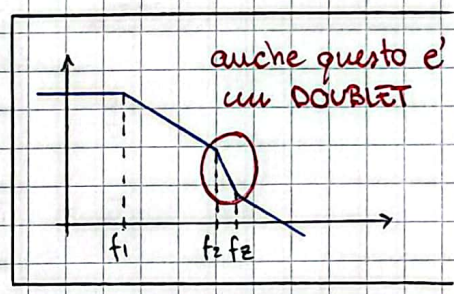
e se abbiamo altri poli e zeri?

per ora abbiamo sempre visto la presenza di altre singolarita' dopo la GBWP, ma se sono prima, cioè in banda:

(se devo aumentare A senza fare il rezing del circuito non posso avere lo zero esattamente @ GBWP altrimenti perdo la compensazione => devo anticiparlo)



mi genera un:



consideriamo la time-response in questo caso:

=> la FdT dell'amp. e':  $A(s) = \frac{A_0(1+sT_z)}{(1+sT_0)(1+sT_z)}$

-> OTA con DOUBLET in configurazione buffer

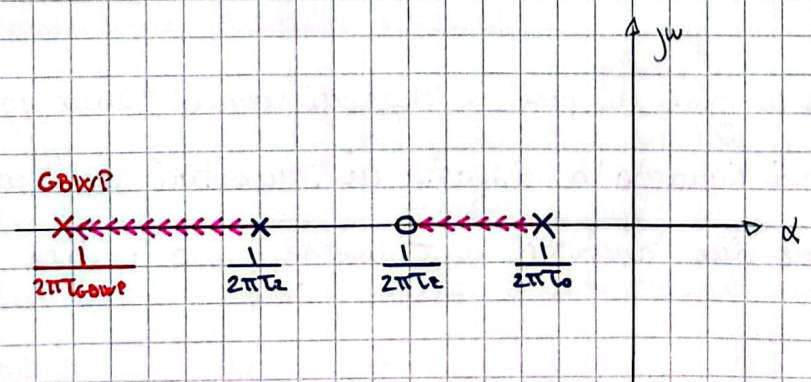
=> closed-loop FdT:  $T(s) = \frac{A_0(1+sT_z)}{(1+sT_0)(1+sT_z) + \frac{A_0(1+sT_z)}{(1+sT_0)(1+sT_z)}}$

$$T(s) = \frac{A_0}{A_0+1} \frac{sT_z+1}{s^2 \frac{T_0T_z}{A_0+1} + s \frac{A_0T_z+T_0+T_z}{A_0+1} + 1}$$

$\downarrow$   $A_0 \gg 1$   
 $\downarrow$  a me interessa la loro posizione reciproca

- parto con due poli -> ottengo due poli
- ogni volta che ho uno zero nell'open-loop gain, lo zero rimane anche nel closed-loop Gain (e rimane lo stesso)

i due poli sono reali e la T(s) ha la forma della FdT dell'amplificatore



- open-loop gain singularities
- closed-loop gain poles
- il primo polo si muove verso lo zero (che e' fermo)
- il secondo polo si muove verso la GBWP

in pratica: quello che succede e' che il primo polo tenderebbe a muoversi verso la GBWP (nel primo caso avevo lo zero a  $+\infty$ ), ma avendo uno zero prima, si ferma a tale zero; il secondo polo, che tende a raggiungere il secondo zero a  $+\infty$ , si ferma prima alla GBWP

possiamo anche stimare i poli

$$\Rightarrow f_L = \frac{1}{2\pi T_L} = \frac{1}{2\pi \left[ \frac{A_0 \tau_2 + \tau_0 + \tau_2}{A_0 + 1} \right]}$$

↓

$$T_L = \tau_2 + \frac{\tau_0 + \tau_2}{A_0} \approx \tau_2 + \frac{\tau_0}{A_0} \text{ e quindi } T_L > \tau_2$$

$$\Rightarrow T_H \approx T_{GBWP} = \frac{\tau_0}{A_0} \text{ e quindi } T_H < T_L$$

$$\Rightarrow V_{out}(s) = \frac{E}{s} \frac{1 + s\tau_2}{(1 + sT_L)(1 + sT_H)} = \frac{E}{s} \left[ \frac{A}{1 + sT_L} + \frac{B}{1 + sT_H} \right]$$

divisione in fratti semplici

(TEOREMA FRATTI SEMPLICI)

$$\begin{cases} A = \lim_{s \rightarrow \frac{1}{T_L}} V_{out}(s) (1 + sT_L) = \frac{T_L - T_H}{T_L - T_H} \\ B = \lim_{s \rightarrow \frac{1}{T_H}} V_{out}(s) (1 + sT_H) = \frac{T_2 - T_H}{T_L - T_H} \end{cases}$$

$$V_{out}(t) = E \left[ A(1 - e^{-\frac{t}{T_L}}) + B(1 - e^{-\frac{t}{T_H}}) \right]$$

$$= E \left[ \underbrace{A+B} - Ae^{-\frac{t}{T_L}} - Be^{-\frac{t}{T_H}} \right]$$

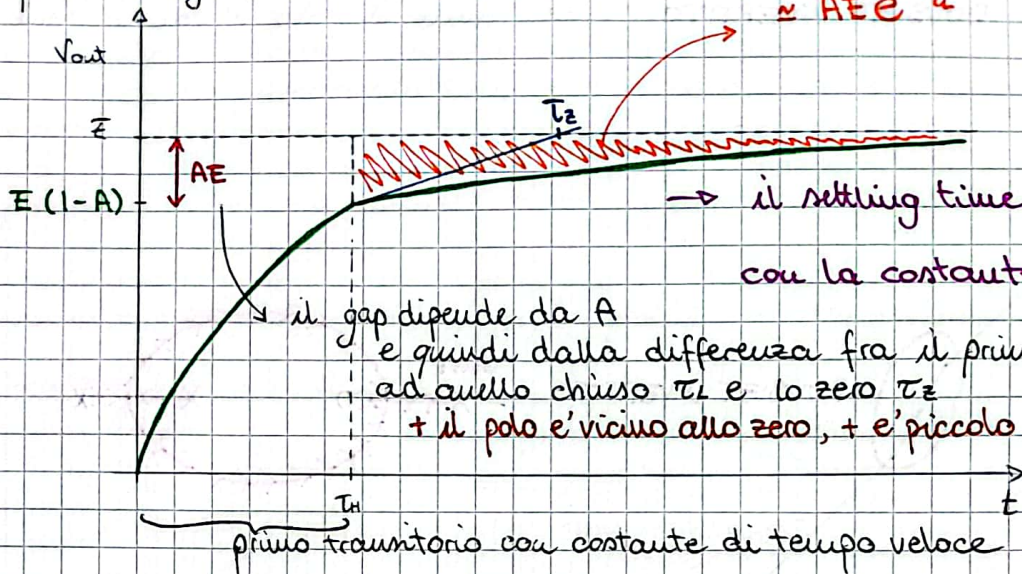
$$A+B = \frac{T_L - T_H + T_2 - T_H}{T_L - T_H} = 1$$

$$= E \left[ 1 - Ae^{-\frac{t}{T_L}} - Be^{-\frac{t}{T_H}} \right]$$

$f=0 \Rightarrow t = +\infty$   
in DC ho  $V_{out} = E$

Nonostante l'impatto positivo sul margine di fase i doppietti vanno "maneggiati con cautela" perche' sono critici riguardo la risposta ai transistori dell'OTA e infatti ho che il segnale segue due transistori a  $\tau$  diverse: uno + veloce e uno + lento

la risposta al gradino e':



→ il settling time dipende dall'exp con la costante di tempo + lunga

il gap dipende da A e quindi dalla differenza fra il primo polo ad quello chiuso  $T_1$  e lo zero  $T_z$  + il polo e' vicino allo zero, + e' piccolo il gap

primo transitorio con costante di tempo veloce

se voglio un ret di  $\Delta$ , allora  $t_{s'} = T_1 \ln \frac{E}{\Delta A}$

facendo i conti, se prima avevo 11ns, adesso ho 68ns

↓  
ho un settling time molto + elevato

Se dal punto di vista della banda e del margine di fase non ho problemi, dal punto di vista del transitorio e del settling time ho un calo importante delle performance perche' aumenta significativamente il settling time

⇒ il doublet in banda puo' causare problemi...

muovendo lo zero ... .. vario due parametri:

- 1) AE varia e quindi  $T_1$  varia
- 2)  $T_z$  varia e diventa + o - lento

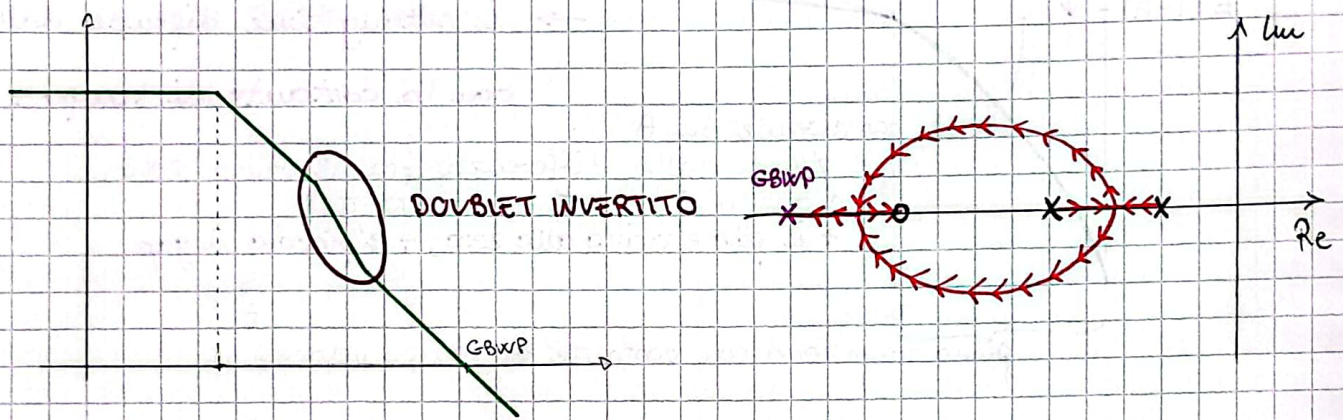
Muovendo lo zero + vicino alla GBWP allora  $t_1$  diminuisce e la seconda esponenziale diventa + veloce

Per la configurazione a buffer si ricava che per mitigare e ridurre il gap si deve spostare lo zero a frequenza piu' bassa ( $A = \frac{f_z}{GBWP}$ , vedi dispense) ma questo fa si' che il secondo transitorio diventi piu' lento ( $T_1 \approx T_z$ )

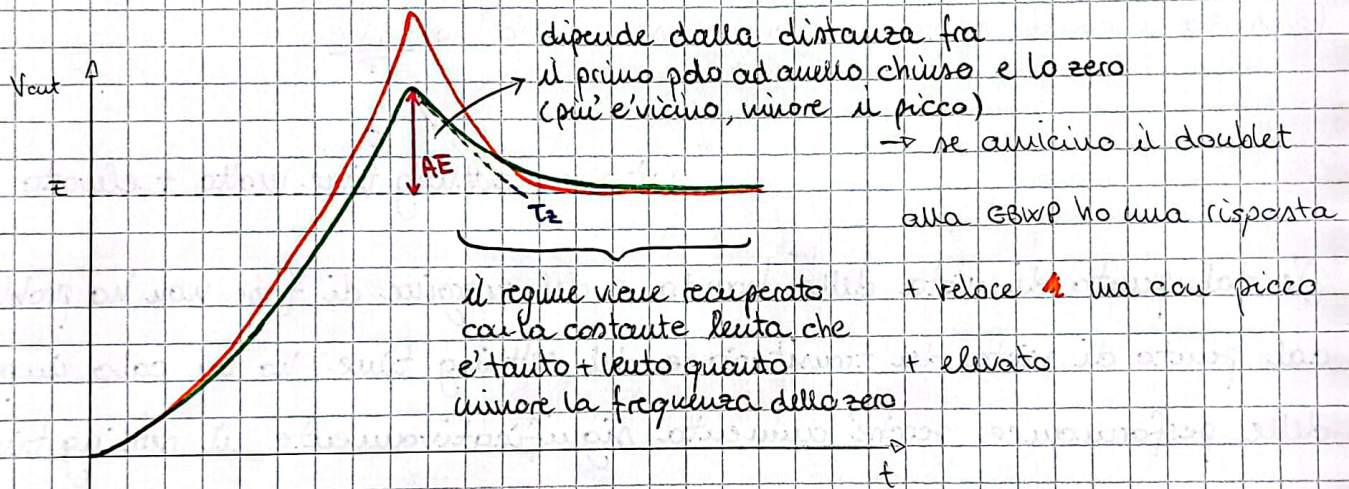
⇒ e' un compromesso



se abbiamo un **DOUBLET INVERTITO**, cioè prima il polo e poi lo zero  
 ho un transitorio che è equivalente ma complementare.

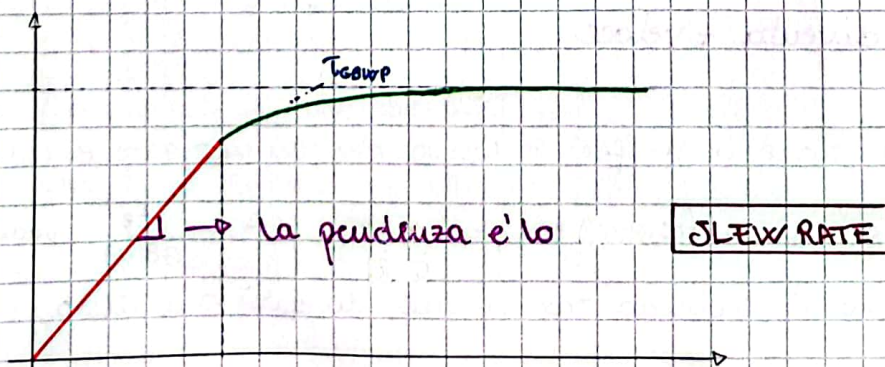


alla risposta temporale si aggiunge un **overshoot** (risposta al gradino):



L'analisi della risposta lineare è solo una semplificazione; guardando ciò che succede realmente all'output dell'amplificatore, **non avremo mai una risposta lineare per variazioni significative dell'input**

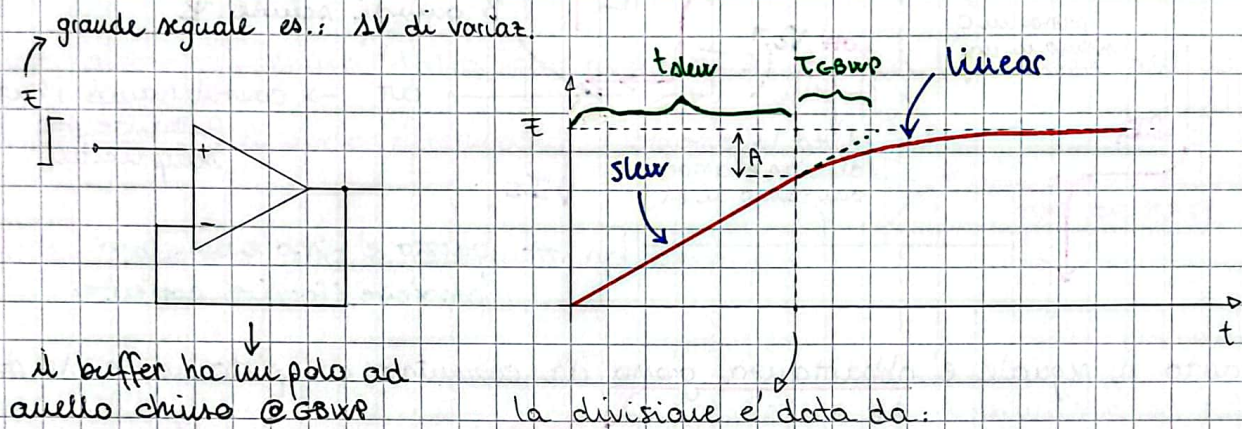
- avremo una prima parte dominata da "non linearità"
- una seconda dominata da zero e poli dell'amplificatore



Lo **SLEW RATE** e' la massima pendenza che l'output puo' avere; e' dovuto alla corrente limitata disponibile dentro l'amplificatore per caricare le capacita'.

→ ho delle limitazioni alle risposte a segnali larghi e veloci

Il modello e' il seguente valido per un polo: e considera la risposta al gradino:



- la massima pendenza dell'esponenziale e' @ 0 e vale  $\frac{A}{T_{GBWP}}$
- la risposta rimarra' in regione' slew finche' la pendenza della risposta' non sara' uguale alla slew rate:

CROSS-OVER →  $\frac{A}{T_{GBWP}} = SR$       A: ampiezza residua

ammiamo di avere  $GBWP = 50 \text{ MHz}$  e  $SR = 10 \text{ V}/\mu\text{s}$  e  $E = 1 \text{ V}$

⇓

$T_{GBWP} = 31,8 \text{ ns}$

⇒  $\frac{E}{t_{slew} + T_{GBWP}} = SR$  ⇒  $t_{slew} + T_{GBWP} = \frac{E}{SR}$

⇒  $t_{slew} = \frac{1 \text{ V}}{10 \text{ V}/\mu\text{s}} - T_{GBWP} = 100 - 32 \text{ ns} = 68 \text{ ns}$

mentre  $A = SR \cdot T_{GBWP} = \frac{10 \text{ V}}{\mu\text{s}} \cdot 32 \text{ ns} \approx 320 \text{ mV}$

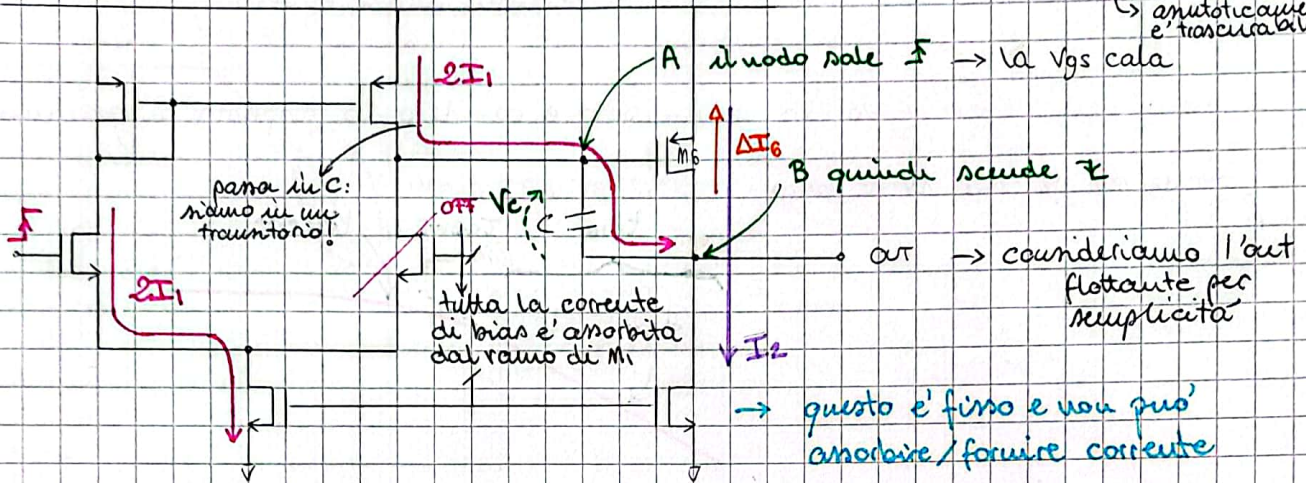
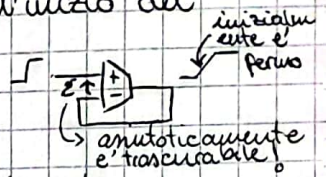
⇒ la risposta lineare inizia con  $\begin{cases} A = 320 \text{ mV} \\ t = 68 \text{ ns} \end{cases}$

⇒ il settling time  $t_s = T_{GBWP} \ln \frac{A}{\epsilon E} \approx 110 \text{ ns}$

↓  
t quelli che devo attendere  
in cui ho lo slew rate

Consideriamo il nostro OTA:

- se il segnale d'ingresso e' piu' veloce della costante di tempo, all'inizio del transitorio il nodo di uscita non reagisce e rimane a riposo



- d'altro canto il segnale e' abbastanza grasso da commutare completamente lo stadio.

- il parametro SLEW-RATE e' un parametro di **grande segnale** e non piccolo segnale, quindi testiamo l'OTA con un grande segnale

**INTERNAL SLEW RATE LIMIT**

$i = 2I_1 = C \frac{dv_c}{dt} \Rightarrow \frac{dv_c}{dt} = \frac{2I_1}{C} = SR \rightarrow$  la tensione ai capi di C aumenta linearmente!

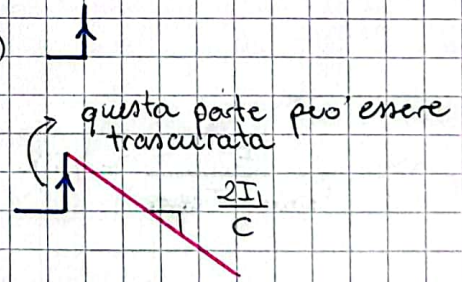
ho un **punto di lavoro consistente** se e solo se  $\uparrow = \uparrow$

e quindi il nodo A sale di:  $\rightarrow M_6$  provvede ad assorbire tutta la corrente di carica di C pari a  $2I_1$

$V_A = \frac{2I_1}{g_{m6}}$  (uguaglio le correnti)

e se A sale allora B lo segue (ho una capacita'...) (lo zero trasferisce lo swing immediatamente)

poi il nodo B cala con una pendenza di  $\frac{2I_1}{C}$

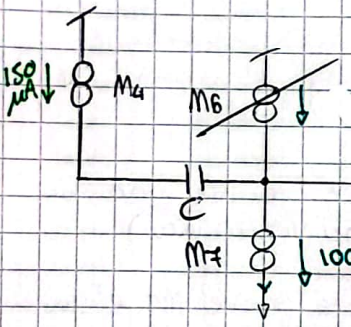


affinche' cio' sia consistente  $I_2 > 2I_1$  altrimenti  $M_6$  si speguerebbe: esso puo' assorbire una corrente  $2I_1$  se  $I_2 > 2I_1$

$\rightarrow$  questa impostazione setta il bias al secondo stage

$\Rightarrow$  la slew-rate setta il bias del secondo stage

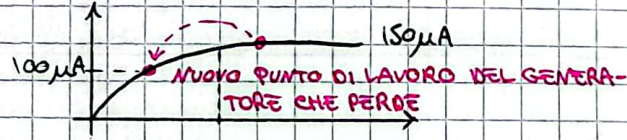
Cosa succede se invece ho  $I_2 < 2I_1$ :



si spegne e non fornisce + corrente perché la  $V_{ds} < V_t$  visto che il segnale è inverso e maggiore del bias

M7 assorbe  $I_2$  mentre M4 vuole erogare  $2I_1 > I_2$  che va tutta su M7: il generatore che eroga meno corrente vince

questo perché il primo <sup>passa</sup> dalla saturazione in ohmica a causa dell'aumento del potenziale del nodo intermedio ( $V_{ds} < V_{ov}$ )



⇒ lo specchio non è più uno specchio

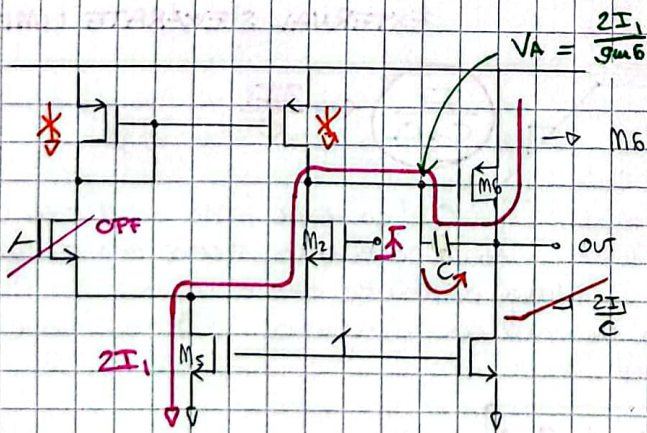


perché la  $V_{ds}$  diminuisce ed entra in ohmica anche se entrambi hanno la stessa  $V_{gs}$

⇒ all'output avremo una rampa con pendenza  $\frac{I_2}{C} < \frac{2I_1}{C}$  e quindi una slew-rate minore del massimo possibile

⇒ per avere una rampa pari a quella massima devo avere  $I_2 \geq 2I_1$

... facciamo la stessa cosa cambiando la polarità, dove  $M_1$  è OFF: se  $M_1$  è OFF allora anche  $M_2$ , (e quindi)  $M_4$  saranno OFF



M6 proga + corrente perché la  $V_{sg}$  aumenta, calando il gate

⇒ all'out ho



→ abbiamo lo stesso risultato di prima

poiche' il gate di  $M_6$  cala, cala anche la  $v_{ds}$  di  $M_2$  che potrebbe iniziare a lavorare in ohmica

→ questo non e' solitamente un problema perche' la corrente e' settata dal transistor di alimentazione  $M_5$

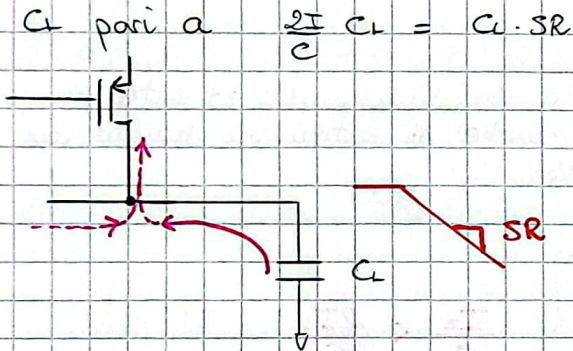
⇒ la corrente e' sempre  $2I_1$

il limite e' che  $M_5$  vada in ohmica (mai quasi)

⇒ non abbiamo limitazioni ulteriori allo slew-rate (anche perche'  $M_6$  e' in grado di erogare la corrente che voglio visto che il suo gate @DC e' alto)

Aggiungiamo la capacita' di carico e vediamo cosa succede:

⇒ nel primo caso, poiche' l'out cala allora si genera una corrente attraverso  $C_L$  pari a  $\frac{2I_1}{C} C_L = C_L \cdot SR$



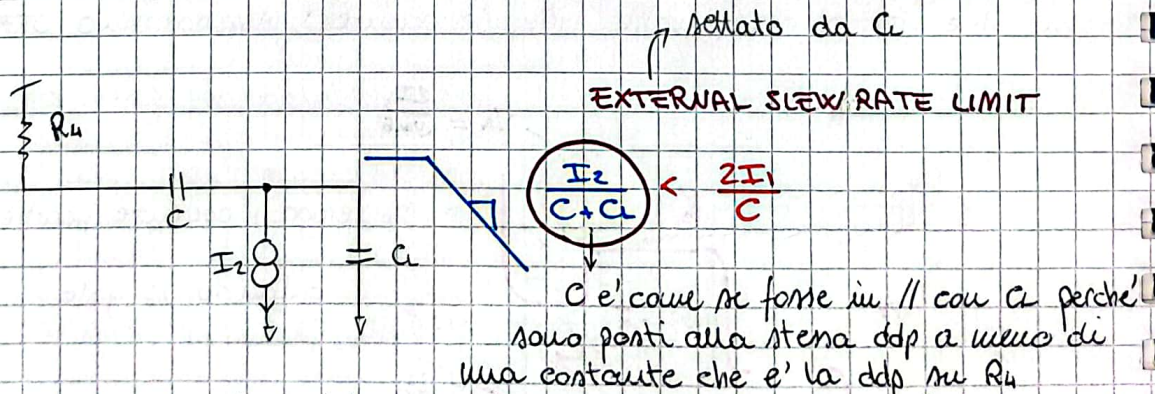
→ visto che  $v_{out}$  cala allora cala la tensione ai capi di  $C_L$  e quindi deve scorrere una corrente in  $C_L$  pari a  $C_L \cdot SR$

deve essere assorbita tutta da  $M_6$ , analogamente a prima:

$$I_2 \geq 2I_1 + SR C_L = 2I_1 + \frac{2I_1}{C} C_L = 2I_1 \left(1 + \frac{C_L}{C}\right)$$

→ un po' di  $2I_1$  che dipende da quanto e' grande  $C_L$

altrimenti  $M_6$  si spegnerebbe,  $M_4$  diventa in ohmica (come prima) e ho una rete pari a:

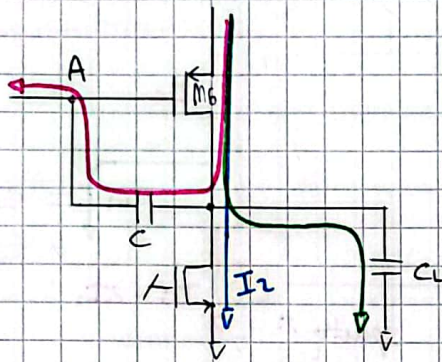


⇒ per avere una pendenza che e' la massima pendenza disponibile devo avere

$$I_2 \geq 2I_1 \left(1 + \frac{C_L}{C}\right)$$

→ maggiore e'  $C_L$ , minore e' l'external slew rate limit

⇒ nel secondo caso ho che poiché out cala,  $C_L$  genera una corrente che deve essere fornita da  $M_6$  (che già provvede la corrente  $2I_1$ )



→  $M_6$  deve fornire queste correnti:

$$I_2 + 2I_1 \left(1 + \frac{C_L}{C}\right)$$

SIGNAL CURRENT

→  $V_A = \frac{2I_1}{g_{m6}} \left(1 + \frac{C_L}{C}\right)$  e' il calo che ho al nodo A

⇒ anche se  $M_2$  va in dmic non ho problemi (la prima parte e' ok)...

riassumendo ...

	SR <sup>+</sup>	SR <sup>-</sup>
MAX SLEW RATE LIMIT	$\frac{2I_1}{C}$	$\frac{2I_1}{C}$
... con $C_L$		$\frac{I_2}{C+C_L}$ → external slew-rate limit

se  $I_2 \gg 2I_1 \left(1 + \frac{C_L}{C}\right)$  → e' la condizione da rispettare per lo SR<sup>-</sup> con  $C_L$

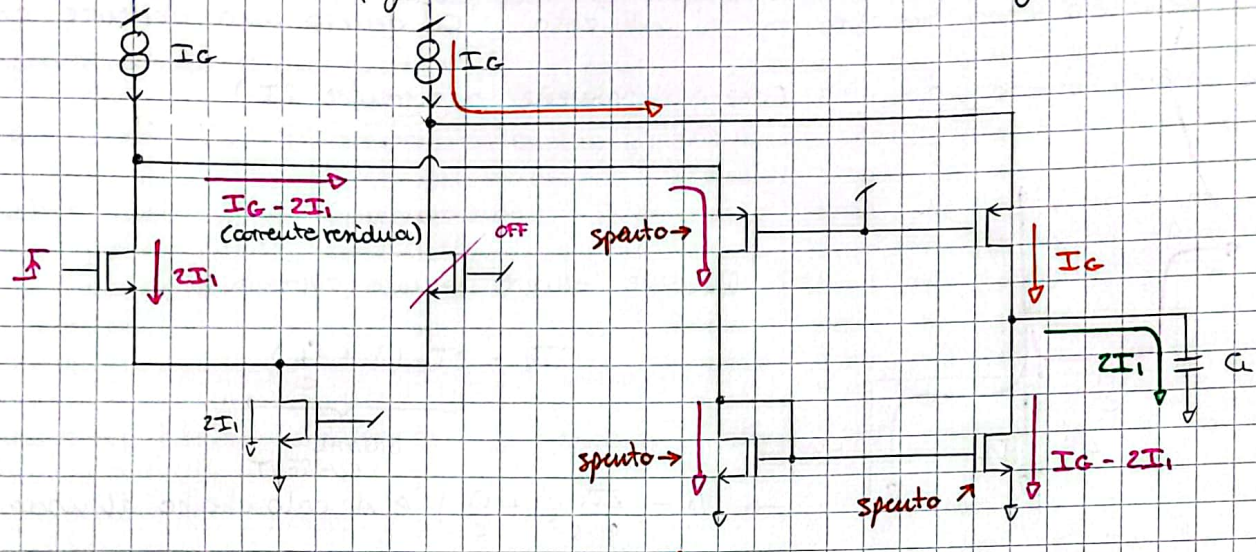
C'e' un link tra lo SR e la GBWP che dipende dagli stessi parametri:

$$GBWP = \frac{g_{m1}}{2\pi C} = \frac{2I_1}{V_{ov1}} \cdot \frac{1}{2\pi C} = \frac{SR}{2\pi V_{ov1}}$$

⇒  $SR = GBWP \cdot 2\pi V_{ov1}$  e' la relazione che li collega in questa configurazione...

maggiore e'  $V_{ov}$ , maggiore e' SR, ma maggiore e' anche il rumore! ⇒ e' un trade-off

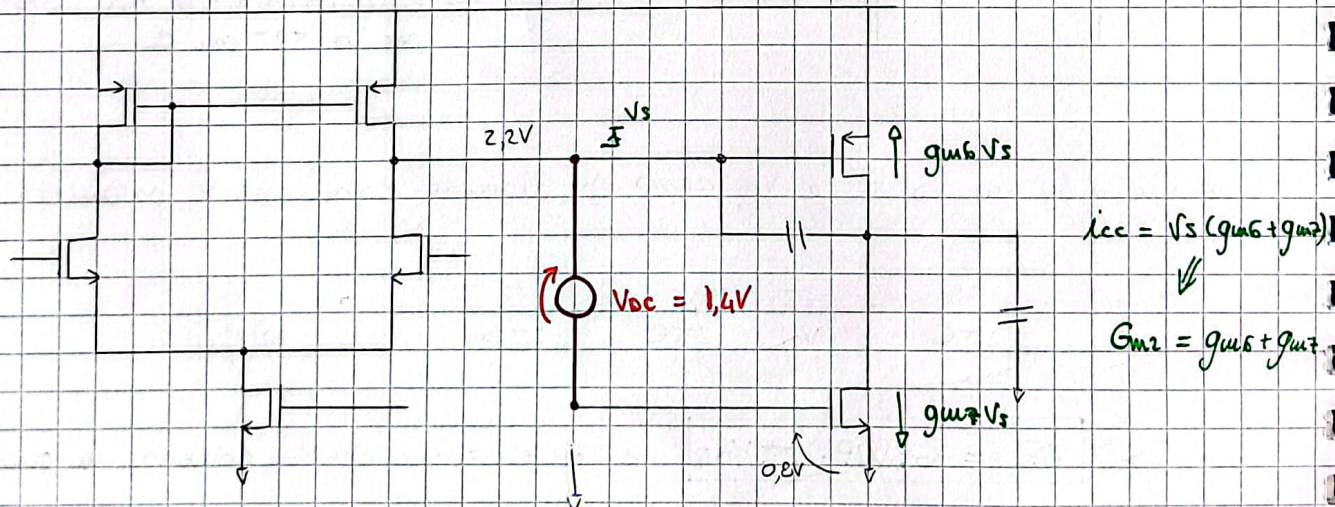
Consideriamo la configurazione a FOLDED CASCODE con un grande segnale:



⇒ il nodo di out sale con  $\frac{2I_1}{C_L}$  → massima

se e solo se vale che  $I_G \gg 2I_1$ , altrimenti la pendenza è minore ed è pari a  $\frac{I_G}{C_L}$  perché non ho + corrente residua e quindi i transistor si spengono

Per rispettare queste specifiche dobbiamo trovare un modo per aumentare la corrente  $I_2$  durante il transitorio e solo durante questo momento per contenere la potenza dissipata



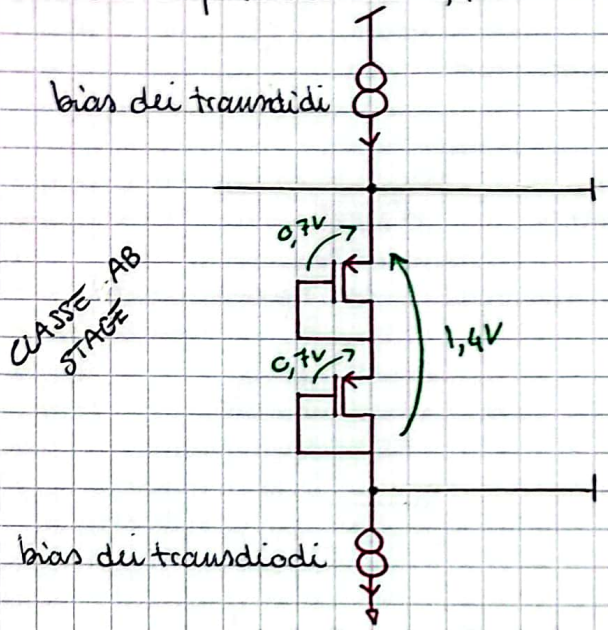
per il segnale è un corto con il generatore ho un bias corretto e quando il gate di M6 sale, anche quello di M7 sale e fornisce + corrente  $I_2$  al secondo stage  
 ... abbiamo qualche variazione al segnale con questo link?

⇒ sì! aumenta la transconduttanza del secondo stage → bene! (perché spostiamo a frequenze + alte il polo e gli zero ad alta frequenza)

il generatore va implementato con un low-impedance device (idealmente 0) con un drop totale di 1,4V

ad esempio  $\frac{d}{0,6}$   
oppure  $V_{gs}$

⇒ uso 2 TRANSIODI  
(faccio 0,7V + 0,7V)



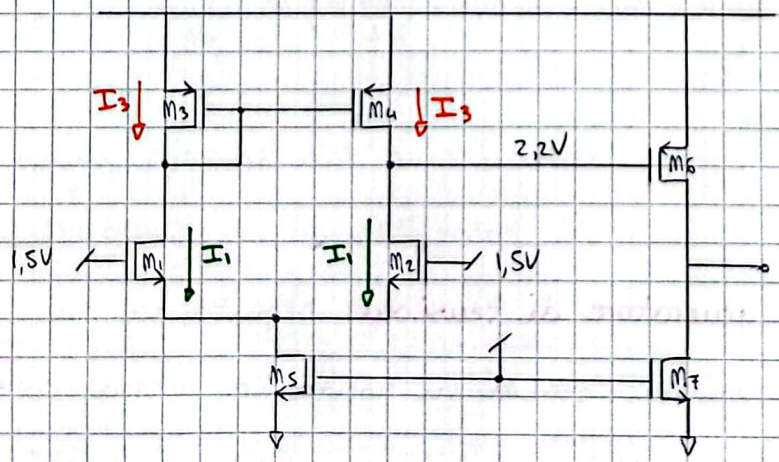
→ questa e' una delle possibili soluzioni, ce ne sono molte altre ... nei temi d'esame brutto struzzo!

$$\frac{r_o}{\frac{2}{g_m} + r_o} \approx 1$$

@ SIGNAL abbiamo un partitore tra  $\frac{2}{g_m}$  e  $r_o$  del generatore sotto ⇒ ho un trasferimento che e' circa unitario

**OFFSET**

consideriamo la seguente situazione:



- se i due transistor sono identici ho  $I_1$  su  $M_1$  e  $M_2$
- analogo succede al mirror se i due transistor sono =

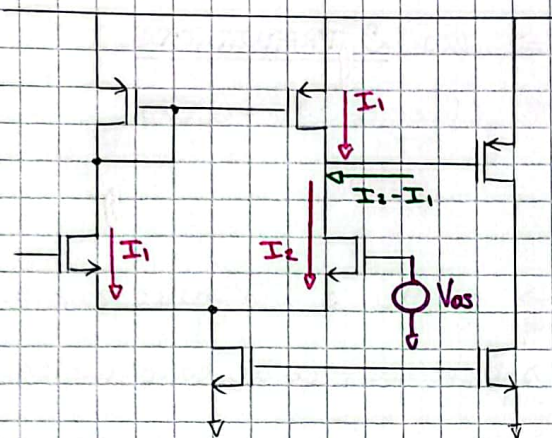
aggiungiamo un effetto del 2° ordine: la soglia di  $M_1$  e  $M_2$  e' diversa

→ non ho + la saturazione e il guadagno differenziale e' inferiore



cerchiamo di modellare l'amplificatore reale.

in cui le soglie sono differenti



$$M_1: V_{T1} = V_T + \frac{\Delta V_T}{2} = 0,62V$$

$$M_2: V_{T2} = V_T - \frac{\Delta V_T}{2} = 0,60V$$

} possiamo sempre scrivere con

- media  $V_T = \frac{V_{T1} + V_{T2}}{2}$

- diff.  $\Delta V_T = V_{T1} - V_{T2}$

ho più corrente su  $M_2$  perché ho una soglia minore (a parità di  $V_{gs}$ )

$$I_1 = k \left[ (V_{gs} - V_T) + \frac{\Delta V_T}{2} \right]^2 = k \left[ \bar{V}_{ov} + \frac{\Delta V_T}{2} \right]^2 = k \left[ \bar{V}_{ov}^2 + \bar{V}_{ov} \Delta V_T + \left( \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \right]$$

$$I_2 = k \left[ (V_{gs} - V_T) - \frac{\Delta V_T}{2} \right]^2 = \dots = k \left[ \bar{V}_{ov}^2 - \bar{V}_{ov} \Delta V_T + \left( \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow I_2 - I_1 = 2k \bar{V}_{ov} \Delta V_T = g_{m1} \Delta V_T$$

come possiamo modellarlo?

Lo possiamo modellare come un **generatore di tensione** seguito da un **amplificatore ideale**. Tale generatore mi genera in uscita la stessa corrente che avrei considerando l'OTA reale; reale;

$\Rightarrow$  è detto **INPUT REFERED OFFSET** ( $V_{os}$ ) e in questo caso

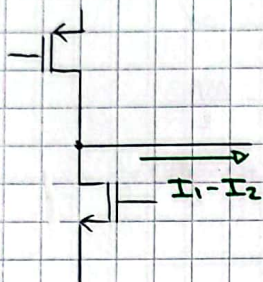
$$V_{os} = \Delta V_T$$

se c'è una differenza tra le soglie allora posizioniamo un generatore pari a questa differenza all'input del transistor con soglia minore

se non abbiamo una soglia diversa, ma  $k$  diversi:

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= k + \frac{\Delta k}{2} \\ k_2 &= k - \frac{\Delta k}{2} \end{aligned} \right\} \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad \text{e} \quad \Delta k = k_1 - k_2$$

in questo caso ho che la corrente su  $M_1$  e' maggiore e quindi in uscita dal primo stage ho



$$I_1 = \left(k + \frac{\Delta k}{2}\right) V_{ov}^2$$

$$I_2 = \left(k - \frac{\Delta k}{2}\right) V_{ov}^2$$

$$\Rightarrow I_1 - I_2 = \frac{2\Delta k}{2} \cdot V_{ov}^2 = \Delta k V_{ov}^2 \cdot \frac{k}{k} = \frac{\Delta k}{k} \cdot I_1$$

il generatore fornisce una corrente  $= g_m V_{os} = -\frac{2I_1}{V_{ov}} V_{os}$   
rispetto ad ora

$$\Rightarrow -\frac{2I_1}{V_{ov}} V_{os} = \frac{\Delta k}{k} I_1 \quad \Rightarrow \quad V_{os} = -\frac{V_{ov}}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

il segno dipende dall'amplificatore particolare... se consideriamo un'intera popolazione di amplificatori?

$$V_{os} = \Delta V_T + \frac{V_{ov}}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k}$$

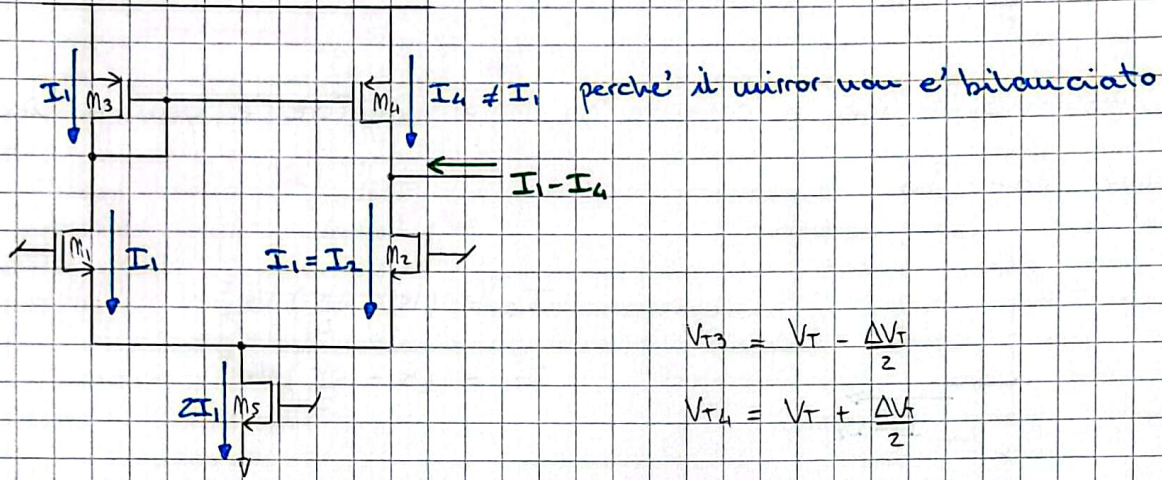
che sono quantita' statistiche la cui varianza:

$$\sigma_{V_{os}}^2 = \sigma_{V_T}^2 + \sigma_{\left(\frac{\Delta k}{k}\right)}^2 \cdot \left(\frac{V_{ov}}{2}\right)^2$$

in realta' tale relazione e' valida se le grandezze sono indipendenti; qui **non lo sono**  $\rightarrow$  Cox influenza sia  $k$ , sia  $V_T \Rightarrow$  e' una approssimazione

Consideriamo ora il mirror con  $V_T$  e  $k$  diversi... la procedura e' la stessa vista per  $M_1$  e  $M_2$ :

$\Delta V_T$



$$\left. \begin{aligned} I_1 = I_3 &= k_m \left( V_{GS3} - V_T - \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \\ I_4 &= k_m \left( V_{GS4} - V_T - \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} I_1 - I_4 = k_m \cdot 2 \cdot \frac{\Delta V_T}{2} V_{ovm} = g_{m,m} \cdot \Delta V_T$$

$\Rightarrow$  il contributo e' quindi  $V_{os} = \Delta V_{Tm} \cdot \frac{g_{m,m}}{g_{m1}} = \Delta V_{Tm} \frac{V_{ov1,m}}{V_{ovm}}$

$\Delta k \rightarrow$  allora ho che  $\left\{ \begin{aligned} k_4 &= k - \frac{\Delta k}{2} \Rightarrow I_4 = \left( k - \frac{\Delta k}{2} \right) V_{ovm}^2 \\ k_3 &= k + \frac{\Delta k}{2} \Rightarrow I_1 = I_3 = \left( k + \frac{\Delta k}{2} \right) V_{ovm}^2 \end{aligned} \right.$

$\Rightarrow I_1 - I_4 = \frac{\Delta k}{k} V_{ovm}^2 \cdot k = \frac{\Delta k}{k} \cdot I_1 = g_{m1} V_{os} = \frac{2I_1}{V_{ov1}} \cdot V_{os}$

$\Rightarrow$  ottengo un contributo di  $V_{os} = \frac{V_{ov1,m}}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k}$

L'offset totale e' dato dalla somma dei quattro contributi:

**OFFSET TOTALE**

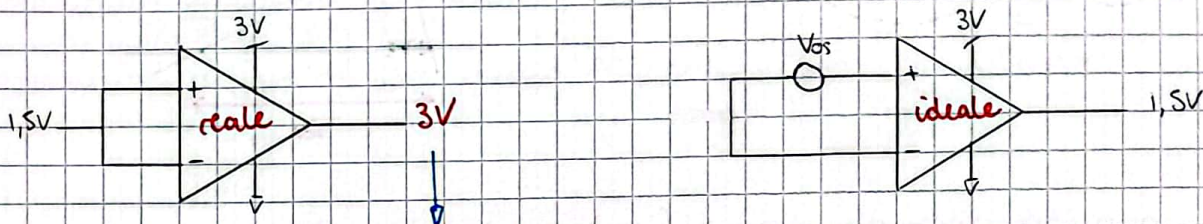
$$V_{os} = \Delta V_{Tm} + \frac{V_{ov1,m}}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k} \Big|_{in} + \Delta V_{Tm} \frac{V_{ov1,m}}{V_{ov,m}} + \frac{V_{ov1,m}}{2} \cdot \frac{\Delta k}{k} \Big|_m$$

$\downarrow$   
e' quello del primo stage, che in <sup>prima</sup> approssimazione e' l'unico non trascurabile

$\Rightarrow$  infatti un offset dovuto a  $M_6$  genererebbe una  $\Delta I = V_{os} g_{m1} R_i g_{m6}$

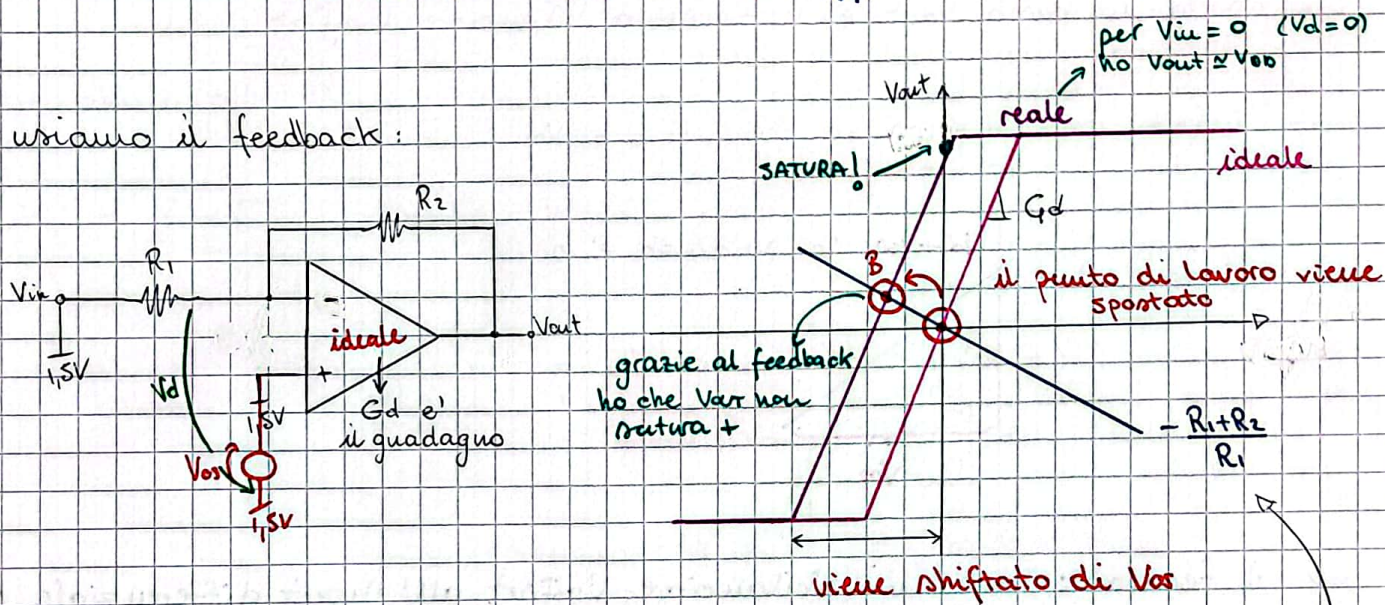
$V_{os} = \frac{\Delta I}{g_{m1} R_i \cdot g_{m6}}$   
 $\swarrow$   
 e' molto grande...

se consideriamo un amplificatore reale, quindi, lo modelliamo:



satura perche' anche se ho  $V_{os} = 10mV$  e un guadagno di  $10^5$   
 ho in out  $10mV \cdot 10^5 = 1000V!!! \Rightarrow$  satura a  $V_{oo}$

Se usiamo il feedback:



$$V^- = \frac{V_{out} R_1}{R_1 + R_2} \Rightarrow V_d = -V^- = -\frac{V_{out} R_1}{R_1 + R_2}$$

e abbiamo  $V_{out} = -V_d \frac{R_1 + R_2}{R_1}$  che posso disegnare come una linea

la linea deve intersecare  $V_{out} (V_{in})$  non nella parte di saturazione (altrimenti il dispositivo non e' piu' lineare) e quindi devo avere:

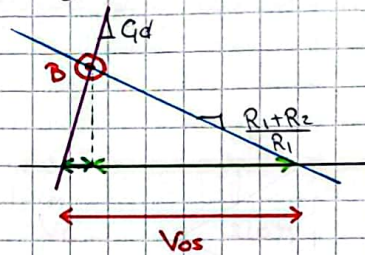
$$\frac{R_1 + R_2}{R_1} \ll G_d$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 pendenza              pendenza  
 retta                      del grafico  
                                     in lineare

$$\Rightarrow \boxed{\frac{G_d R_1 + R_2}{R_1}} \gg 1 \Rightarrow \text{se } G_{loop} \gg 1 \text{ recupero il funzionamento ideale}$$

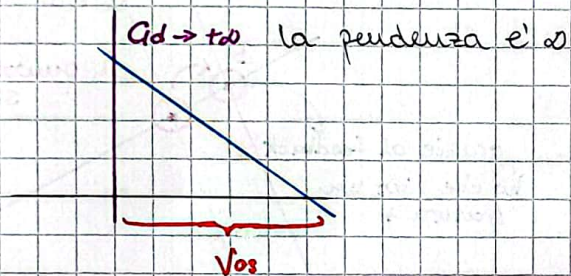
il segnale  $V_{os}$  è dato dalla somma di due segnali:

$$V_{os} = \frac{V_{out}}{G_d} + V_{out} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$



... quindi quando accendo l'amplificatore, per il motivo visto prima, ho  $V_{out}$  saturo a  $V_{oo}$ ; il feedback fa quindi alzare il nodo invertente che mi riporta in basso  $V_{out}$  e  $V^-$  tende a bilanciare l'offset

$\Rightarrow$  infatti se  $G_d \rightarrow \infty$  ho che  $V_{d,id} = V_{os}$

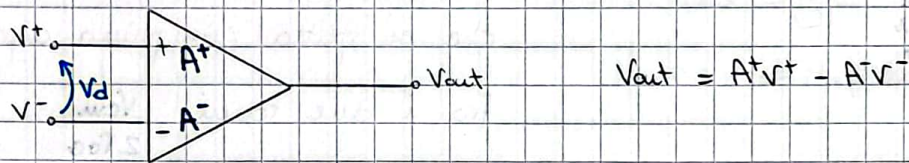


$\Rightarrow$  il feedback cerca di ribilanciare l'offset all'input differenziale, ma non fa nulla al CM che viene trattato di seguito

Se  $G_{oop}$  è grande abbastanza, allora  $V_{out}$  tende ad essere al suo valore ideale

# CMRR

assumiamo di avere il gain  $A^+$ , cioè del segnale sull'ingresso non invertente leggermente differente da quello  $A^-$ , sull'ingresso invertente:



inoltre abbiamo:

$$v_{cm} = \frac{v^+ + v^-}{2} \quad v_d = v^+ - v^- \quad \left\{ \begin{array}{l} v^+ = v_{cm} + \frac{v_d}{2} \\ v^- = v_{cm} - \frac{v_d}{2} \end{array} \right.$$

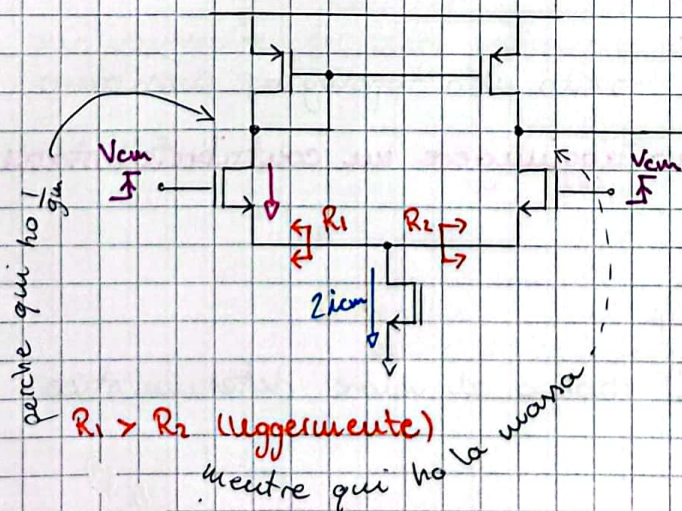
che sostituisco sopra:  $v_{out} = A^+ (v_{cm} + \frac{v_d}{2}) - A^- (v_{cm} - \frac{v_d}{2})$

$$= \boxed{(A^+ - A^-)} v_{cm} + \boxed{\frac{A^+ + A^-}{2}} v_d$$

common mode gain      differential gain

- il **differential gain** è la media fra i due guadagni
- il **common mode gain** è sempre generato dal mismatch tra i guadagni  $A^+$  e  $A^-$  ed è la differenza tra i due

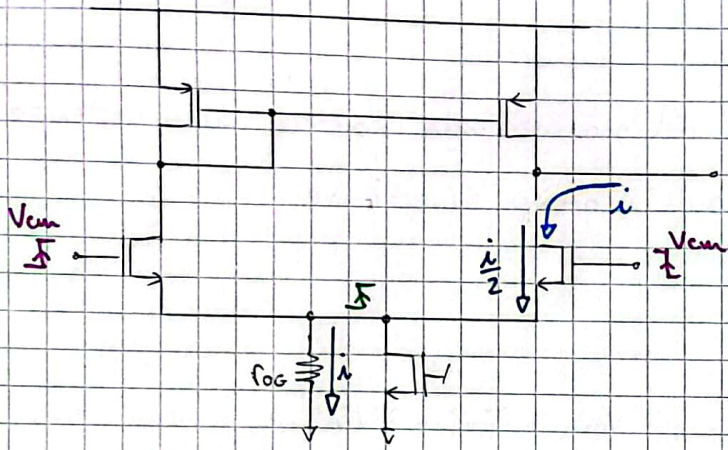
Questo è dovuto alle asimmetrie tra i due rami:



⇒ ho meno signal corrente a sx per il partitore non uguale

⇒ il mirror specchia una  $I_4 < I_2$

⇒ ho una corrente residua all'out



il uguale alza il drain del generatore (source follower) e genera una corrente

$$i = \frac{V_{cm}}{r_{og}}$$

che si splitta (in prima approx) a metà fra i due rami  $\frac{V_{cm}}{2r_{og}}$

=> a causa della asimmetria all'output non ho  $\emptyset$ , ma ho una corrente dovuta ad un errore:

$$\hat{i} = \epsilon i_{cm} = \epsilon \cdot \frac{V_{cm}}{2r_{og}} \Rightarrow G_{dm} = \frac{\epsilon}{2r_{og}}$$

e tale errore e' dato da  $\epsilon = \frac{1}{g_{m1} r_{om}} + \frac{1}{g_{m1} r_{o1}}$  E' DETERMINISTICO ( $\epsilon_{det}$ )

solo numeri e non variabili statistiche

contributo dovuto al leakage attraverso la resistenza  $r_{om}$  del mirror

contributo dovuto all'ubalance delle resistenze tra il ramo dx e sx

nel nostro caso avevamo  $\epsilon = \frac{1}{100}$  (1%)

e poiche' la corrente e' meno nel ramo di sinistra ho che tale corrente di errore entra nel primo stage

$$CMRR = \frac{G_d}{G_{cm}} = \frac{g_{m1} \cdot R_{out}}{\frac{\epsilon}{2r_{og}} \cdot R_{out}}$$

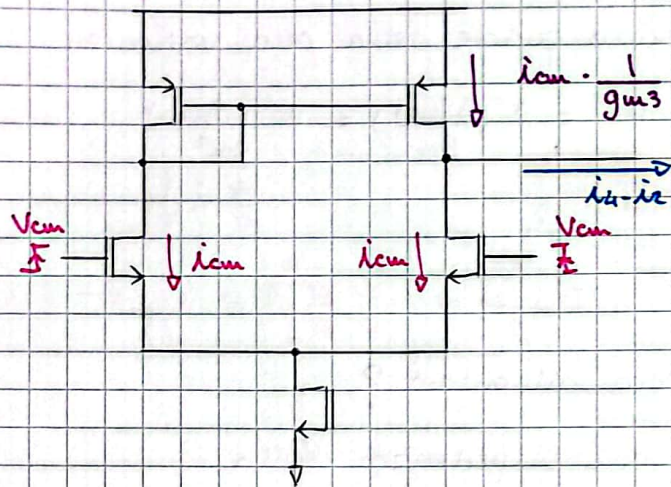
e quindi, come già visto, ho un

$$CMRR = \frac{2g_{m1} r_{og}}{\epsilon} \quad (CMRR_{det})$$

In aggiunta a questo errore sistematico, dovuto alla topologia, possiamo avere una variazione statistica -> **devo aggiungere un contributo statistico a quello sistematico**

=> calcoliamo adesso i limiti statistici attorno al valore deterministico

$\Delta$  se  $g_{m3} \neq g_{m4}$  cosa cambia all'output?



(che se sono uguali si semplificano)

dove ho:

$$g_{m3} = 2k \left( V_{sg} - V_T - \frac{\Delta V_T}{2} \right)$$

$$g_{m4} = 2k \left( V_{sg} - V_T - \frac{\Delta V_T}{2} \right)$$

$$\Rightarrow i_4 - i_2 = i_{cm} \left( \frac{g_{m4}}{g_{m3}} - 1 \right) = i_{cm} \frac{g_{m4} - g_{m3}}{g_{m3}} = i_{cm} \cdot \frac{\Delta g_{m4,3}}{g_{m3}}$$

$$\Rightarrow g_{m4} - g_{m3} = 2k \frac{\Delta V_T}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{g_{m4} - g_{m3}}{g_{m3}} = \frac{2k \Delta V_T}{2k \left( V_{sg} - V_T - \frac{\Delta V_T}{2} \right)^2} \approx \frac{2k \Delta V_T}{g_{m3}^2} = \frac{\Delta V_T}{V_{ovM}}$$

in questo caso ho assunto che il mismatch  $\ll$  dell'overdrive statico  
 $(\Delta V_T \ll V_{sg} - V_T)$

torquando alla corrente posso fare la stessa approssimazione:

$$i_4 - i_2 = i_{cm} \frac{\Delta g_{m4,3}}{g_{m3}} \approx i_{cm} \frac{\Delta g_{m4,3}}{g_{mM}}$$

la variazione della transconduttanza  $e'$  dovuta a:

$$dg_m = d(2k(V_{sg} - V_T)) = 2dk(V_{sg} - V_T) - 2k dV_T$$

puo' avvenire per una variazione di  $k$  o di  $V_T$ , che rispetto a  $g_m$  nominale

$$\frac{dg_m}{g_m} = \dots = \frac{dk}{k} - \frac{dV_T}{V_{ov}} \rightarrow \text{l'overdrive } e' \text{ un numero, non } V_{stat.}$$

che sono quantita' statistiche  $\Rightarrow$  il segno non  $e'$  significativo  
 perche' il caso peggiore ce l'ho quando si sommano



e quindi l'errore e':

$$\epsilon = \frac{\Delta g_{m4,3}}{g_m}$$

ha senso parlare della sua varianza

$$\sigma_\epsilon^2 = \sigma^2\left(\frac{\Delta g_{m4,3}}{g_m}\right) = \frac{\sigma^2(g_{m4,3})}{g_m^2}$$

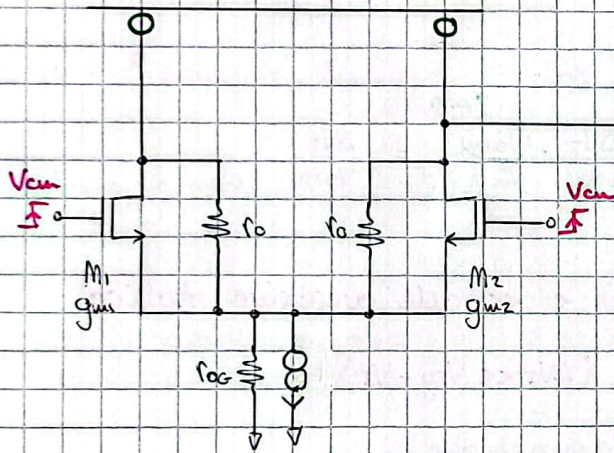
$$\sqrt{\sigma_\epsilon^2} = \sqrt{\sigma_{\frac{\Delta k}{k}}^2 + \frac{\sigma_{\Delta V}^2}{V_{ov}^2}}$$

Δ se abbiamo  $g_{m1} \neq g_{m2}$  cosa cambia all'output?

In questo caso il mirror e' ideale e con impedenza nulla

a sx perche  
trascuro  $\frac{1}{g_m}$

a dx perche faccio  
l'equivalente di Norton

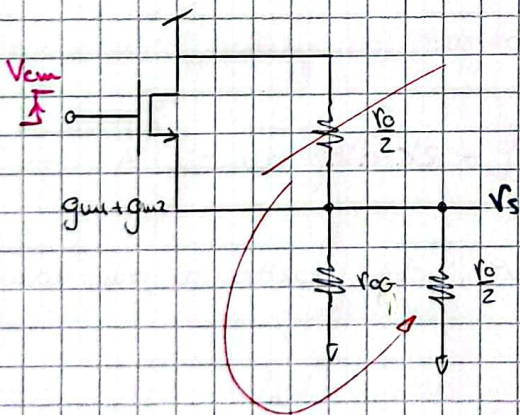


M1 e M2:

- entrambi hanno GND @ 0
- entrambi hanno la stessa  $\sigma$
- entrambi hanno lo stesso segnale @ G

⇒ sono in //

⇒ posso ottenere un equivalente



e quindi:

$$V_s = V_{cm} \frac{\frac{r_o}{2} \parallel r_{oG}}{\frac{r_o}{2} \parallel r_{oG} + \frac{1}{g_{m1} + g_{m2}}}$$

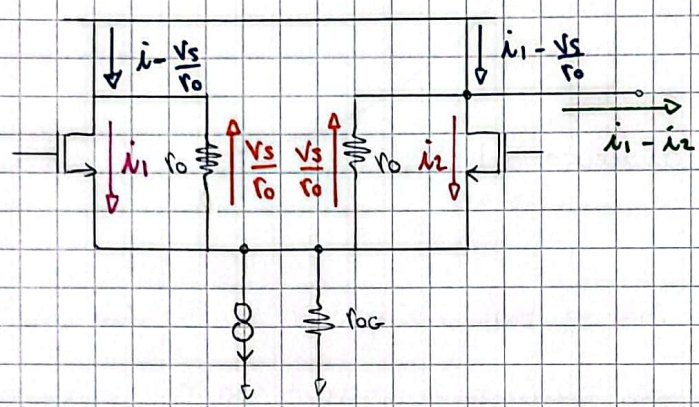
$$= V_{cm} \frac{\frac{r_o}{2} \parallel r_{oG}}{\frac{r_o}{2} \parallel r_{oG} + \frac{1}{2g_m}}$$

posso definire  $g_m = \frac{g_{m1} + g_{m2}}{2}$

questa volta non possiamo porre  $V_s = V_{cm}$ , altrimenti perdiamo l'informazione che stiamo cercando

infatti ora ho che

$$\begin{cases} i_1 = g_{m1} (V_{cm} - V_s) \\ i_2 = g_{m2} (V_{cm} - V_s) \end{cases}$$



perche  $\frac{V_s}{r_o}$  si moltiplica al nodo di uscita

$$\Rightarrow i_1 - i_2 = (g_{m1} - g_{m2}) (V_{cm} - V_s)$$

$$\begin{aligned} &= (g_{m1} - g_{m2}) V_{cm} \left[ 1 - \frac{R_s}{R_s + \frac{1}{2g_m}} \right] = V_{cm} (g_{m1} - g_{m2}) \frac{\frac{1}{2g_m}}{R_s + \frac{1}{2g_m}} \\ &= \frac{V_{cm}}{2} \frac{\Delta g_{m1,2}}{g_m} \frac{1}{\frac{r_o}{2} \parallel r_{oG}} = \frac{V_{cm}}{2} \frac{\Delta g_{m1,2}}{g_m} \frac{\frac{r_o}{2} + 2r_{oG}}{\frac{r_o}{2} \cdot r_{oG}} \\ &= \underbrace{\frac{V_{cm}}{2r_{oG}}}_{\text{Vcm}} \underbrace{\frac{\Delta g_{m1,2}}{g_m} \left(1 + \frac{2r_{oG}}{r_o}\right)}_{\text{e' l'errore}} \end{aligned}$$

e quindi ottengo un errore totale pari a:

$$\mathcal{E} = \underbrace{\frac{1}{g_{m1} r_{o1}} + \frac{1}{g_{m2} r_{o2}}}_{\mathcal{E}_{det}} + \underbrace{\frac{\Delta g_{m3,4}}{g_{m1}} + \frac{\Delta g_{m1,2}}{g_{m1}} \left(1 + \frac{2r_{oG}}{r_o}\right)}_{\mathcal{E}_{stat} \rightarrow \text{contributo statistico}}$$

e quindi ho un common mode rejection ratio in cui anche il denominatore dipende da  $r_{oG}$  (per  $r_{oG}$  molto grande):

$$CMRR = \frac{2g_m r_{oG}}{\frac{\Delta g_{m1,2}}{g_{m1}} \left(1 + \frac{2r_{oG}}{r_o}\right)}$$

e questo e' un problema perche' quando cerchiamo di aumentare il CMRR (idealmente  $\infty$ ) quello che fino ad ora abbiamo fatto e' stato  $r_{oG} \uparrow \uparrow$

infatti nel nostro caso, con un CMRR = 90 dB, dovevamo avere

$$r_{oc} = \frac{10^{\frac{90}{20}} \cdot \varepsilon}{2 \cdot 15 \cdot 10^{-3} \text{ A}} = 105 \text{ k}\Omega \quad \text{e se } I_C = 150 \mu\text{A} \text{ avevamo un canale}$$

$$\downarrow \\ L = 0,79 \mu\text{m} \quad (\approx 1 \mu\text{m})$$

e per aumentare  $r_{oc}$  (e so CMRR) aumentavo  $L$ ...

ma ora se faccio il limite per  $r_{oc} \rightarrow \infty$

$$\lim_{r_{oc} \rightarrow \infty} \text{CMRR} = \frac{g_{m1} r_o}{\Delta g_{m1,2}} \Rightarrow \text{il CMRR non aumenta sempre con } r_{oc} \\ \text{e ad un certo punto diventa indipendente da } r_{oc} \text{ e dipende da } r_o$$

perché è così?

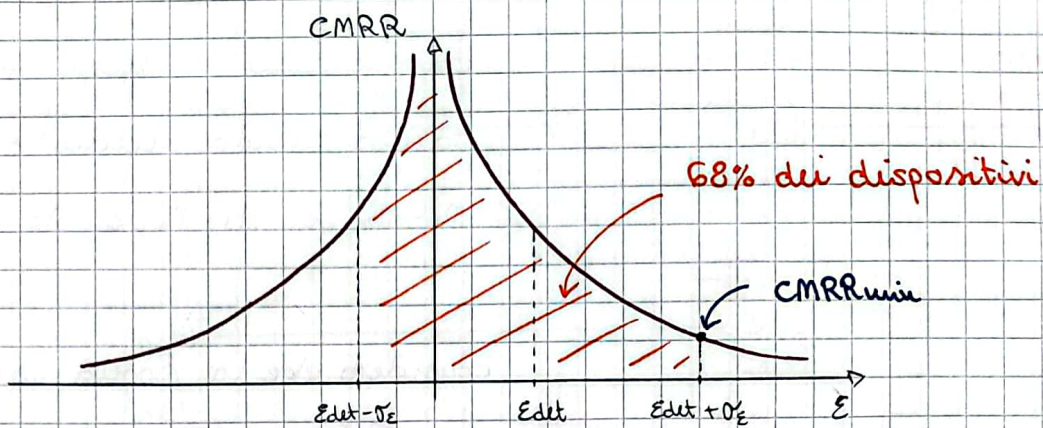
... quando abbiamo calcolato  $v_s$  avevamo che  $\frac{r_o}{2}$  era in parallelo con  $r_{oc}$  (in prima approx.) e quindi quando  $r_{oc} \rightarrow \infty$ , la corrente dipenderà da  $\frac{r_o}{2}$

Se i due transistor hanno la stessa transconduttanza  $g_m$ , allora la corrente che scorre nei due transistor è uguale e all'output non ottengo nulla; ma se i due transistor sono mismatched, allora ho una corrente di modo comune e all'output si genera un errore. Per ridurlo non posso continuare ad aumentare  $r_{oc}$ , ma devo

- ridurre il mismatch tra i transistor
- aumentare la  $r_o$  dei transistor e quindi la loro lunghezza

Quindi il CMRR è distribuito attorno a un suo valore medio (ricordo una **distribuzione normale** perché è la distribuzione dell'errore)

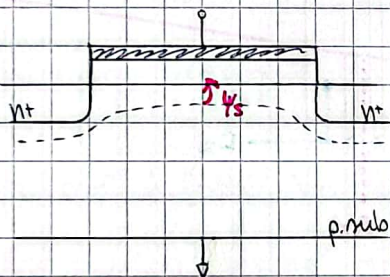
Visto che la relazione è inversamente proporzionale, maggiore è l'errore e minore sarà il CMRR



il  $CMRR_{min}$  e' la specifica che dobbiamo garantire... quindi ora cerchiamo di calcolare  $\sigma$  per trovare il relativo common mode rejection ratio minimo

## VARIABILITA' E MATCHING

Consideriamo ora il transistor e la sua tensione di soglia  $V_T$ :



$$V_T = V_{FB} + \psi_s + \sqrt{2\epsilon_0 q N_A \psi_s} \cdot \frac{t_{ox}}{C_{ox}}$$

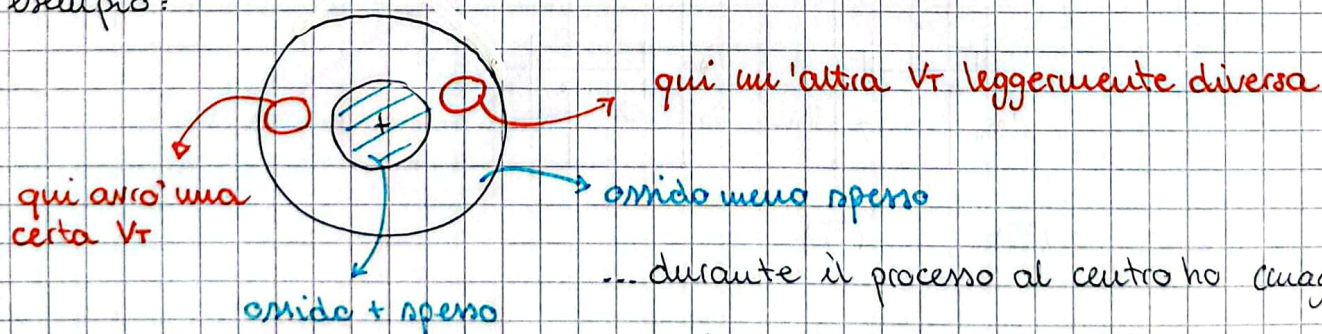
→ lo spessore dell'ossido e' statistico

→ pure il drogaggio

sono entrambi valori "attorno" al valore nominale

→ sono tutti valori sistematici (l'ossido e' sensibile alla [O<sub>2</sub>] e alla temperatura locale T nei vari punti del wafer di semiconduttore)

esempio:

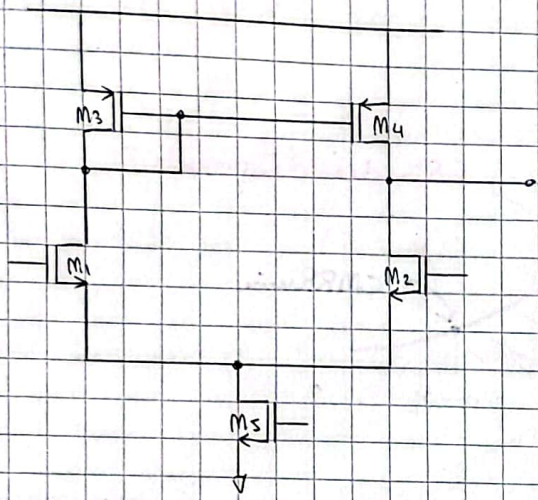


... durante il processo al centro ho (magari)

0,1k, 0,2k in più che al bordo e quindi

ho una formazione diversa di ossido

**N.B.:**  $\frac{\Delta I_{os}}{I_{os}} = \frac{\Delta k}{k} + \frac{\Delta V_T}{V_{ov}} \cdot 2 + \frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta L}{L}$ , dove gli ultimi due sono trascurabili (vedi dopo...), mentre  $\frac{\Delta k}{k}$  non viene trattato (vedi disparte)

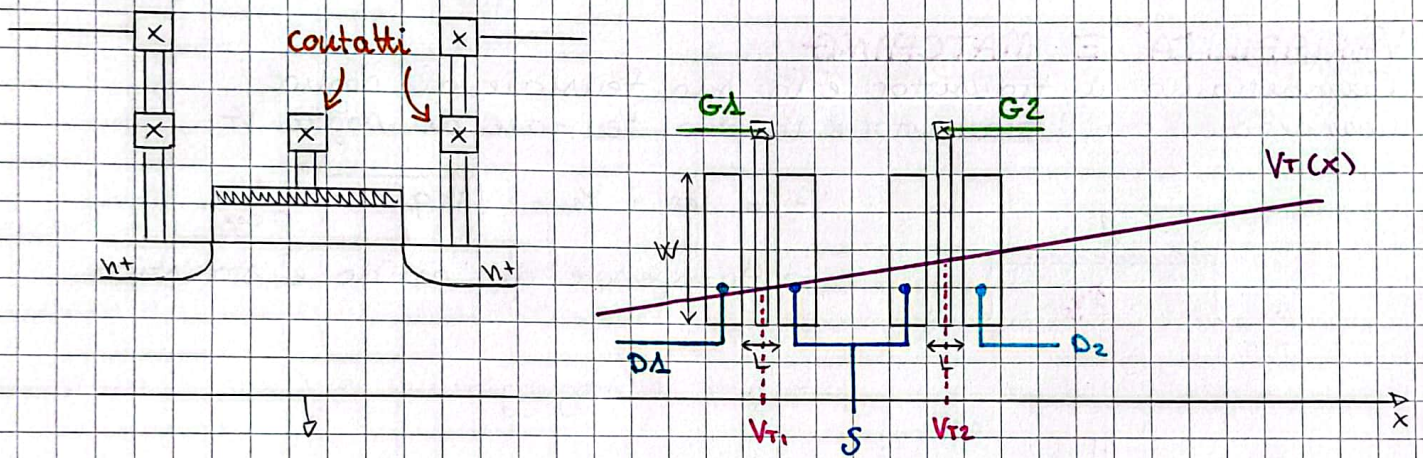


consideriamo gli stessi valori della  
tabella trovata precedentemente per  
 $M_1 - M_2$  e  $M_3 - M_4$  e  $M_5$

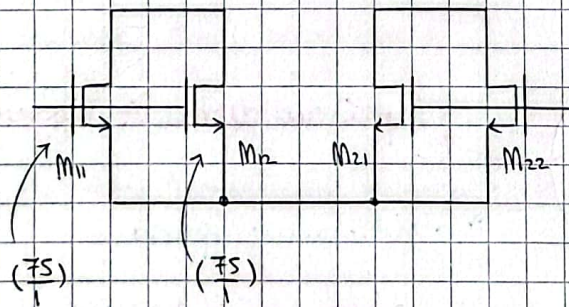
considero che la soglia vari linearmente  
come  $V_T(x)$

(in 1° appross. posso  
linearizzare qualsiasi  
candante)

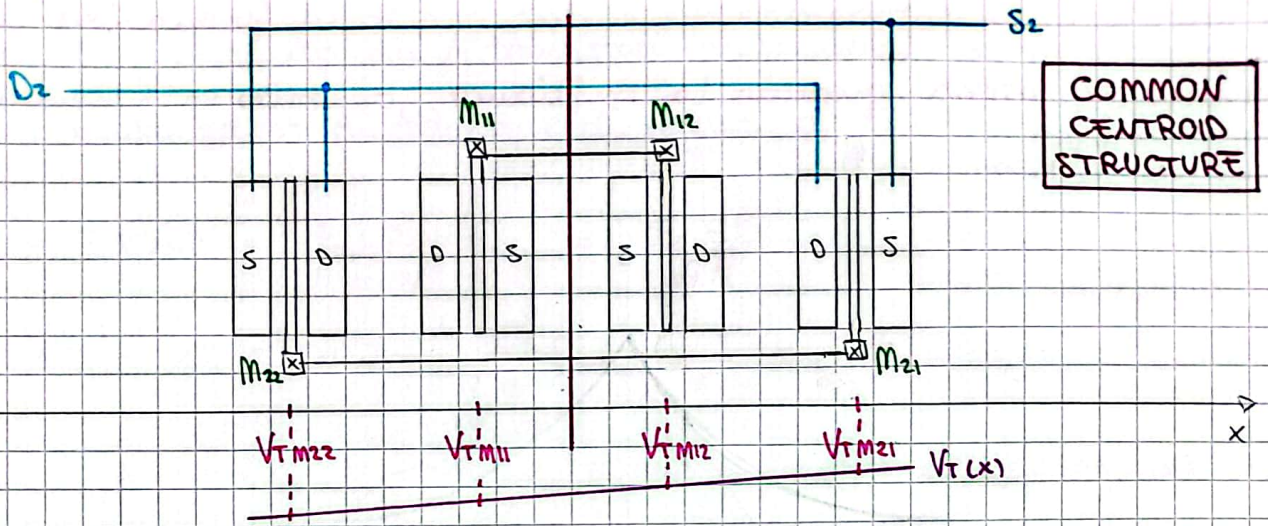
la struttura del transistor reale e'



anzichè avere solo  $M_1$  e  $M_2$ , possiamo dividerli entrambi e ottenere 4  
transistor (larghi la metà); a volte e' conveniente farlo!



allora la struttura vista dall'alto diventa la stessa con i transistor  
raddoppiati → tramite la configurazione che segue posso trascurare la  
variazione lineare della  $V_T$  (che posso prevedere) che approssimerebbe il  
modello → la medio

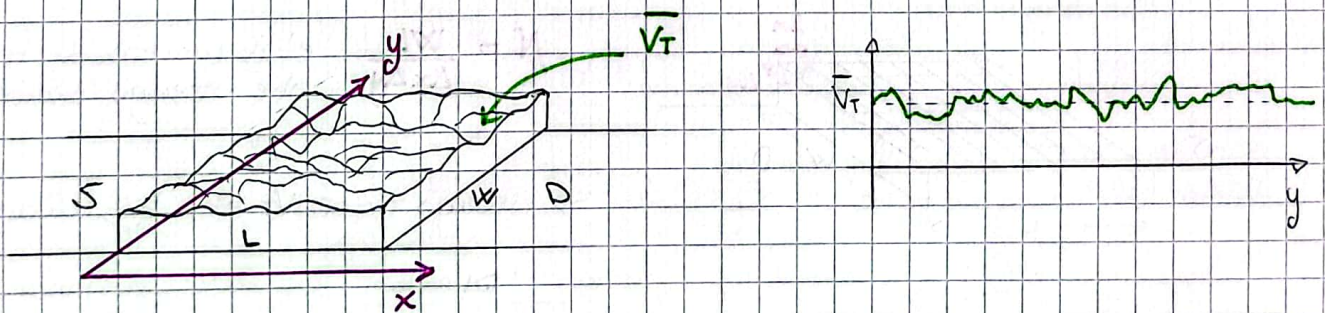


Quindi, ipotizzando che i transistor sono vicini tanto quanto serve per avere una variazione di  $V_T$  lineare (in prima approssimazione), allora in questo caso la tensione di soglia media è la stessa per entrambi i transistor

⇒ cancelliamo ogni errore sistematico dovuto al processo di produzione e possiamo indagare solo la variazione statistica

Oltre a ciò infatti, ho una fluttuazione della tensione di soglia attorno al valor medio perché dipende dallo spessore locale dell'ossido e dalla concentrazione locale di doping:

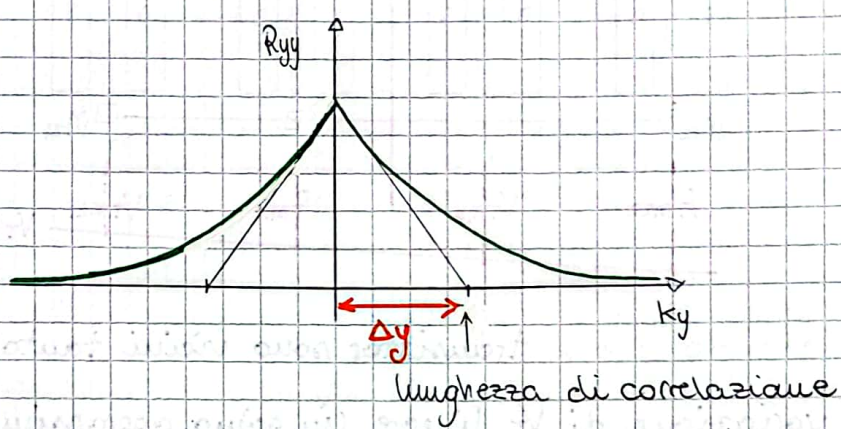
- abbiamo l'oscillazione attorno al valor medio, che ora consideriamo costante



per descrivere questo effetto introduco la funzione di autocorrelazione

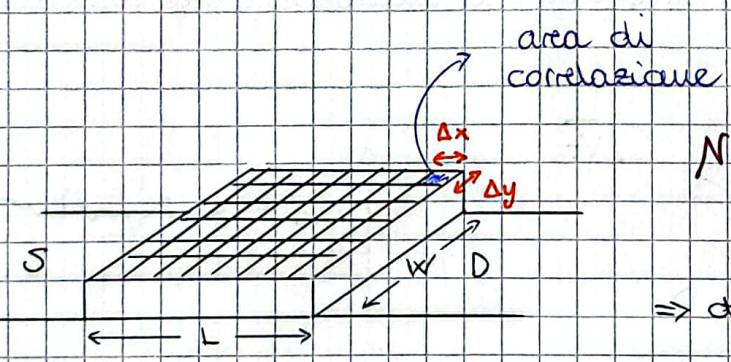
$$R_{yy}(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} V_T(y) V_T(y+k_y) dy$$

la funzione di autocorrelazione ci dice quanto la **fluttuazione casuale** riconosce se stessa quando la shiftiamo; di solito la funzione ha una forma tipo:



la **lunghezza di correlazione** e' la lunghezza entro il quale le due variazioni (in questo caso di  $V_T$ ) sono correlate

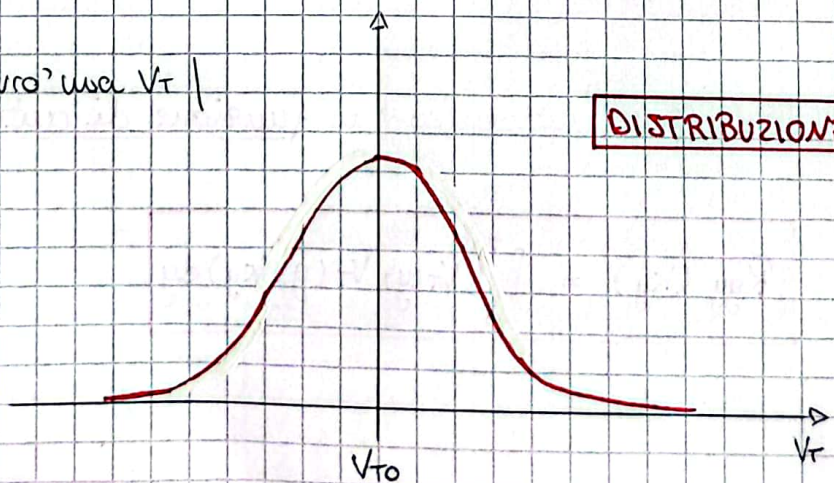
Tale operazione puo' essere fatto sia lungo  $y$ , sia lungo  $x$  e quindi possiamo modellare l'intero transistor come un assemblamento di transistori indipendenti la cui area e' l'area di correlazione; piu' generalmente questa cosa puo' essere fatta ogni volta che abbiamo delle grandezze di questo genere



$N = \frac{WL}{\Delta x \Delta y}$  e' il numero di transistori che ottengo dalla divisione

⇒ ottengo una  $V_T$  che ha una

Il transistor avra' una  $V_T$  ||



**DISTRIBUZIONE GAUSSIANA**

Quindi  $M_1$  e' formato da  $N$  transistori indipendenti, ognuno dei quali ha un valore atteso di tensione di soglia di  $E[V_{T0}]$  e quindi

$$\Rightarrow \bar{V}_{T1} = E[V_{T1}] = \frac{E[\sum_i V_{Ti}]}{N} = \frac{\sum_i E[V_{Ti}]}{N} = \frac{\sum_i V_{T0}}{N} = V_{T0}$$

$$\Rightarrow \sigma^2[V_{T1}] = \sum_i \sigma^2[V_{Ti}] = \sigma^2 \left[ \frac{\sum_i V_{Ti}}{N} \right] = \frac{1}{N^2} \sigma^2[\sum_i V_{Ti}] \stackrel{\text{indipendenti}}{=} \frac{\sum_i \sigma^2(V_{Ti})}{N^2}$$

$$= \frac{N \sigma^2 V_{T0}}{N^2} = \frac{\sigma^2 V_{T0}}{N}$$

$\sigma^2(V_{T0})$  lo fornisce il produttore del wafer

il designer puo' solo variare  $N$ ...

la varianza della media dei contributi cala mano a mano che ho + contributi

$$= \frac{\sigma^2 V_{T0} \cdot A_0}{WL}$$

area di correlazione

e quindi la deviazione standard e':

$$\sigma(V_{T1}) = \sqrt{\frac{\sigma^2 V_{T0} A_0}{WL}}$$

$$= \frac{A_{VT}}{\sqrt{WL}} \rightarrow A_{VT} \text{ e' detto } \underline{\text{PELGROM COEFFICIENT}}$$

nel nostro caso con un  $A_{VT} = 10 \text{ mV}/\mu\text{m}$  <sup>N-MOS</sup> ho  $\sigma(V_{T1}) = \frac{10 \text{ mV}/\mu\text{m}}{\sqrt{150 \mu\text{m}^2}} = 0,8 \text{ mV}$

ma noi non siamo interessati a  $\sigma(V_{T1})$  che e' la differenza fra  $V_{T1}$  e  $V_{T0}$ , ma alla differenza fra  $V_{T1}$  e  $V_{T2}$  e quindi:

$$\Rightarrow E[V_{T1} - V_{T2}] = V_{T0} - V_{T0} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2(V_{T1} - V_{T2}) \stackrel{\text{indipendenti}}{=} 2 \sigma^2(V_{T1}) = \frac{2 \sigma_{VT}^2 A_0}{WL}$$

dato nel testo dell'esercizio

$$\sigma^2(V_{T1} - V_{T2}) = \frac{K_{\Delta VT}^2}{WL}$$

dove  $K_{\Delta VT} = \sqrt{2} A_{VT}$  COEFFICIENTE DI PELGROM

10 mV/ $\mu\text{m}$   
N-MOS

15 mV/ $\mu\text{m}$   
P-MOS



$$E_{\text{stat}} = \frac{\Delta g_{\text{m1}}}{g_{\text{m1}}} + \frac{\Delta g_{\text{m2}}}{g_{\text{m2}}} \left(1 + \frac{2r_{\text{oc}}}{r_{\text{o}}}\right)$$

$$= \frac{\Delta V_{\text{tm}}}{V_{\text{ov1}}} + \frac{\Delta V_{\text{t}}}{V_{\text{ov}}} \left(1 + \frac{2r_{\text{oc}}}{r_{\text{o}}}\right)$$

se ci limitiamo solo alla variazione di  $V_{\text{t}}$

$$\sigma_{E_{\text{stat}}}^2 = \frac{\sigma^2(\Delta V_{\text{tm}})}{V_{\text{ov1}}^2} + \frac{\sigma^2(\Delta V_{\text{t}})}{V_{\text{ov}}^2} \left(1 + \frac{2r_{\text{oc}}}{r_{\text{o}}}\right)^2$$

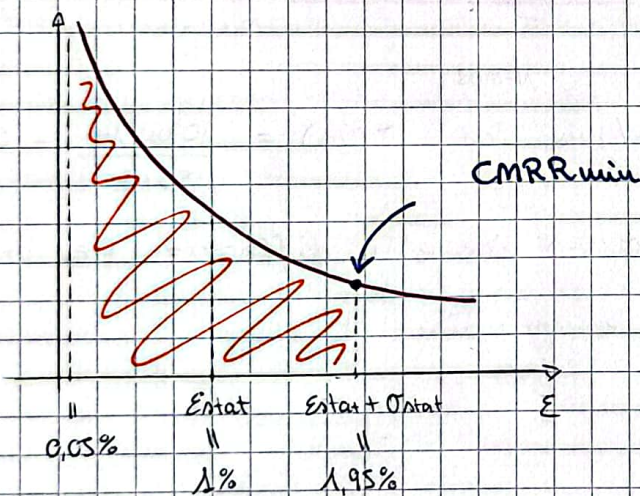
2

$$\sigma^2(\Delta V_{\text{t}}) = (0,8 \text{ mV})^2 \text{ già calcolato prima}$$

$$\sigma^2(\Delta V_{\text{tm}}) = \left(\frac{K_{\Delta V_{\text{t}}}}{\sqrt{W}}\right)^2 = (1,73 \text{ mV})^2$$

$$= \left(\frac{1,73 \text{ mV}}{0,2 \text{ V}}\right)^2 + \left(\frac{0,8 \text{ mV}}{0,1 \text{ V}}\right)^2 \cdot 2 = (9,5 \cdot 10^{-3})^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{E_{\text{stat}}} = 9,5 \cdot 10^{-3} = 0,95 \%$$

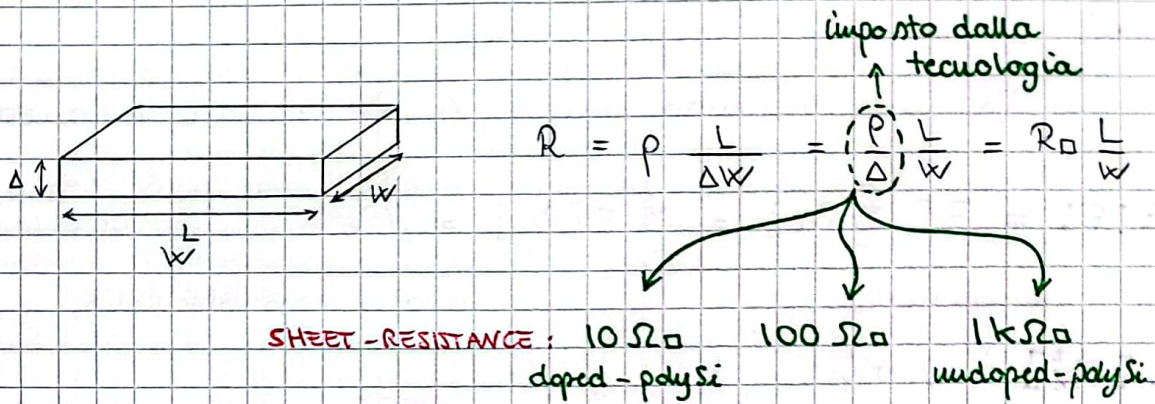


$$\text{CMRR}_{\text{min}} = \frac{2 g_{\text{m1}} r_{\text{oc}}}{1,95\%} = \frac{400}{1,95 \cdot 10^{-2}} = 2 \cdot 10^4 = \boxed{86,5 \text{ dB}}$$

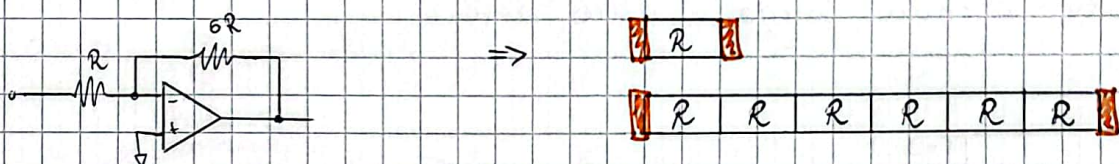
se questo non fosse abbastanza dobbiamo ridurre lo spread usando un transistor più grande, ad esempio raddoppiando  $W$ ...

Aggiungiamo un ulteriore step: conductivity coefficient

consideriamo un resistore formato da un layer di polysilicio

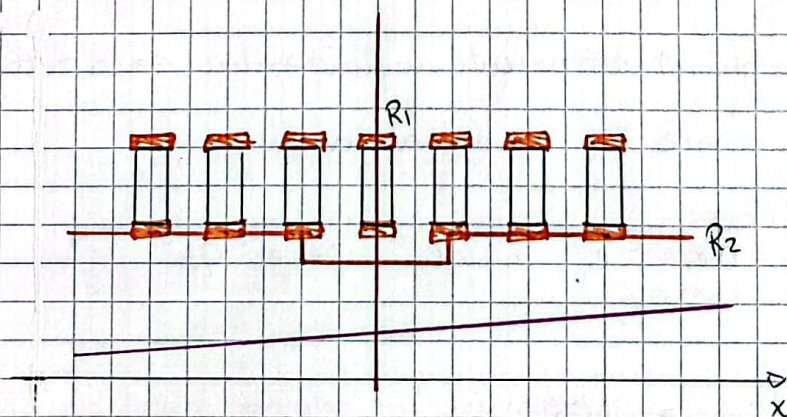


quando facciamo un amplificatore quello che importa e' il rapporto tra le resistenze



NO  $\Rightarrow$  non considero i terminali

$\Rightarrow$  ho un impatto dei contatti non uguale nel rapporto: devo avere i contatti  $\nabla$  resistenza e in una common centroid structure:



$\Rightarrow$  abbiamo bilanciato il gradiente lungo x (anche nell'altra direzione perche' si media dentro al resistore) esattamente come prima

facciamo ora un'analisi statistica...

**N.B.:**  $\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta R_0}{R_0} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta W}{W}$  (nel caso peggiore), ma  $\frac{\Delta W}{W}$  e  $\frac{\Delta L}{L}$

possiamo essere trascurati  $\Rightarrow$  indago solo  $\frac{\Delta R_0}{R_0}$   
 $\hookrightarrow$  il processo di produzione garantisce cio'

supponiamo di dividere il resistore in  $N$  componenti elementari con lunghezza pari alla lunghezza di correlazione, allora essi sono **in correlati**

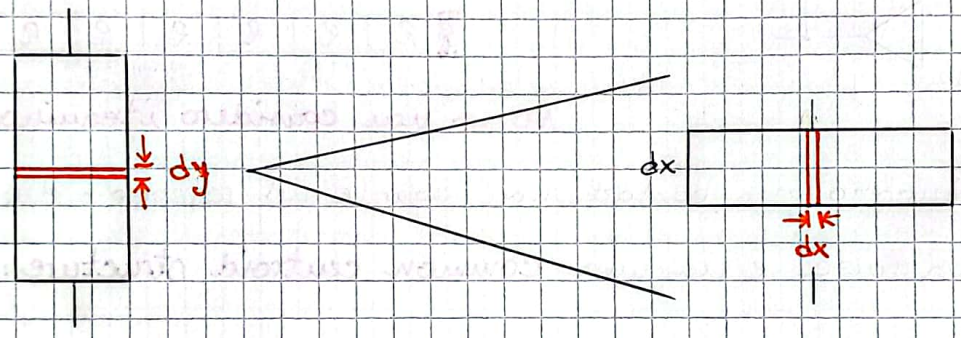
⇒ ognuno ha una resistenza media di  $R_e$  e una varianza  $\sigma_{R_e}^2$

$$E[R] = E\left[\sum_{i=1}^N R_{ei}\right] = \sum_{i=1}^N E[R_{ei}] = NR_e$$

indipendenti
hanno lo stesso valore medio

$$E[\sigma_{R_e}^2] = N\sigma_{R_e}^2$$

ognuno di tali elementi sterminati può essere a sua volta diviso in altri elementi sterminati lungo l'altro asse:



**N.B.:** in questo caso gli  $M$  componenti infinitesimi sono tutti in parallelo fra loro ⇒ conviene usare la conduttanza:

essi hanno:  $R_0$  e  $\sigma_{R_0}^2$  e quindi  $G_0$  e  $\sigma_{G_0}^2$ :

$$E[G_0] = \sum_{i=1}^M G_{0i} = MG_0$$

$$E[\sigma_{G_0}^2] = \sum_{i=1}^M \sigma_{G_{0i}}^2 = M\sigma_{G_0}^2$$

Essenzialmente la resistenza  $R$  è divisa in una matrice  $N \times M$  di resistori elementari con le proprietà di cui sopra:

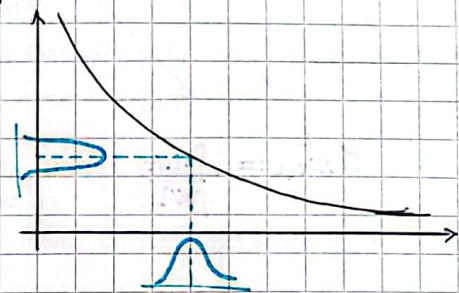
# RICORDA

se ho  $a = \frac{1}{b}$  allora il legame che c'è fra  $\sigma_a^2$  e  $\sigma_b^2$  è:

$$da = -\frac{1}{b^2} db \Rightarrow \frac{da}{a} = -\frac{1}{b^2} \frac{db}{b}$$

la distrib. gauss. non rimane in una relazione iperbolica (se linearizzo... m)

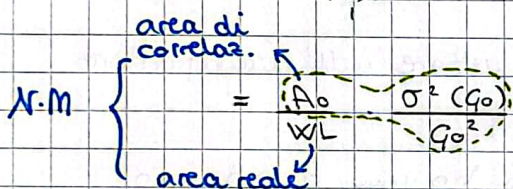
$$\frac{\sigma_a^2}{a^2} = \frac{\sigma_b^2}{b^2}$$



quindi nel nostro caso:  $\frac{\sigma^2(Ge)}{Ge^2} = \frac{\sigma^2(Re)}{Re^2}$

$$\Rightarrow E[\sigma_R^2] = N \sigma_{Re}^2 = N \sigma^2(Ge) \frac{Re^2}{Ge^2} = NM \sigma^2(G_0) \frac{Re^2}{Ge^2} \frac{\sigma^2(Re)}{Re^2}$$

calcoliamo  $\frac{\sigma_R^2}{R} = \frac{NM \sigma^2(G_0)}{(NRe)^2} \cdot \frac{Re^2}{Ge^2} = \frac{NM \sigma^2(G_0)}{N^2} \frac{1}{Ge} = \frac{\sigma^2(G_0)}{G_0^2} \frac{1}{NM}$



coefficiente di Pelgrom per il mismatch ( $\approx 3\% \cdot \mu m$ )

$\Rightarrow$  la variazione percentuale della resistenza dipende dalla tecnologia e dall'area

RELAZIONE DI PELGROM (vicini!) non solo

e quindi:  $E[\Delta R] = E[R_1 - R_2] = 0$

$$\frac{\sigma_R}{R} = \frac{K_{\sigma_R}}{\sqrt{WL}}$$

$$\frac{\sigma_{\Delta R}^2}{R^2} = \frac{\sigma_{\Delta R_1}^2}{R_1^2} + \frac{\sigma_{\Delta R_2}^2}{R_2^2}$$

sovrapposendo contributi indipend. caratterizzati dagli stessi errori ho che l'accuratezza migliora  $\downarrow$  errori indipendenti si compensano a vicenda

- se  $R_1$  è affetta da una variabilità del 5% e  $R_2$  del 5%, allora la loro differenza avrà una variabilità  $\sigma = \sqrt{\sigma_{R_1}^2 + \sigma_{R_2}^2} \approx 7\%$

$\Rightarrow$  la variabilità relativa del valore del resistore, dovuta alle variazioni della sheet-resistance è inversamente proporzionale all'area che tale resistore occupa. Inoltre,  $K_{\sigma_R}$  racchiude tutte le informazioni sulla variabilità introdotta dal processo produttivo (spessore, doping, ...) e viene fornita dal produttore del wafer

Nel caso del circuito della coppia differenziale, avevo che:

$$V_{os} = \Delta V_{T1,2} + \Delta V_{Tm} \frac{V_{ov1}}{V_{ovm}} + \frac{V_{ov1}}{2} \left[ \frac{\Delta k_{in}}{k_{in}} + \frac{\Delta k_m}{k_m} \right]$$

$\sigma_{\Delta V_T}^2 = \frac{A_{\Delta V_T}}{\sqrt{WL}}$  e analogamente possiamo ottenere  $\sigma_{\frac{\Delta k}{k}}^2 = \frac{A_{\frac{\Delta k}{k}}}{\sqrt{WL}}$   
 (ripetendo quanto fatto)

e quindi la relazione che lega le varianze e le deviazioni standard e':

$$\sigma = \sqrt{\sigma_{\Delta V_{T1,2}}^2 + \sigma_{\Delta V_{Tm}}^2 \frac{V_{ov1}^2}{V_{ovm}^2} + \frac{V_{ov1}^2}{4} \left[ \sigma_{\frac{\Delta k_{in}}{k}}^2 + \sigma_{\frac{\Delta k_m}{k}}^2 \right]}$$

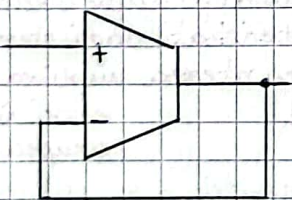
**BUFFER**

→ e' l'ultimo tassello da mettere nell'amplificatore

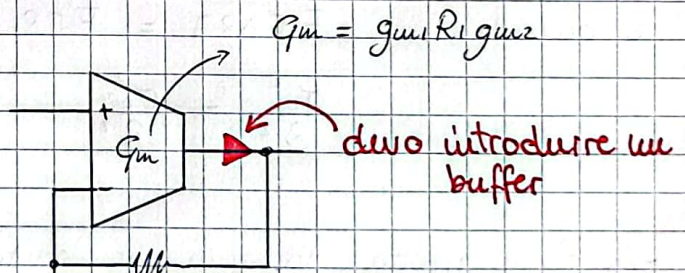
consideriamo l'OTA fin qui visto in cui ho un guadagno

$$G = g_{m1} R_1 g_{m2} R_2$$

se ho una retroazione:



↓  
 in questo caso non ho problemi



$$G_m = g_{m1} R_1 g_{m2}$$

in questo caso se  $R_{out}$  e' bassa ho un guadagno che cala drasticamente

- capacita' → ok
- piccola R → uccido il GICOP!

# OUTPUT STAGES

devo introdurre all'output un circuito che mi faccia due cose:

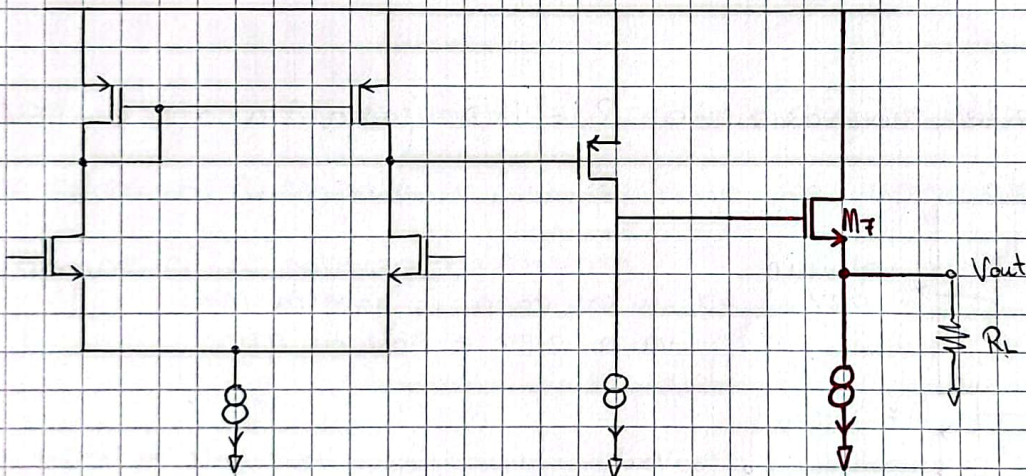
- 1) garantisca  $R_{out}$  dell'OTA abbastanza grande da avere un gain accettabile
- 2) ricopra la tensione all'output com'com'e'

⇒ un buffer, che però **consuma corrente e dissipa potenza**

⇒ lo mette solo se e' necessario: se ad esempio ho una capacita', non e' piu' necessario avere il buffer ↓  
all'out

Possiamo avere tre tipologie: classe A, classe B, classe AB

## Δ CLASSE A



concentrandoci sull'ultimo stage, il guadagno del buffer (un semplice source follower) e' dato da:

$$G_{BUFF} = \frac{R_L}{\frac{1}{g_{m7}} + R_L} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{m7}R_L}}$$

in questo caso il buffer ha guadagno unitario  $G_{BUFF} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{g_{m7}} \ll R_L$   
e quindi se  $g_{m7} \gg 1$

$$\hookrightarrow I \gg \frac{V_{ov}}{2R_L}$$

e quindi per avere un guadagno  $\rightarrow 1$ , se ho un carico piccolo consumo molta più corrente

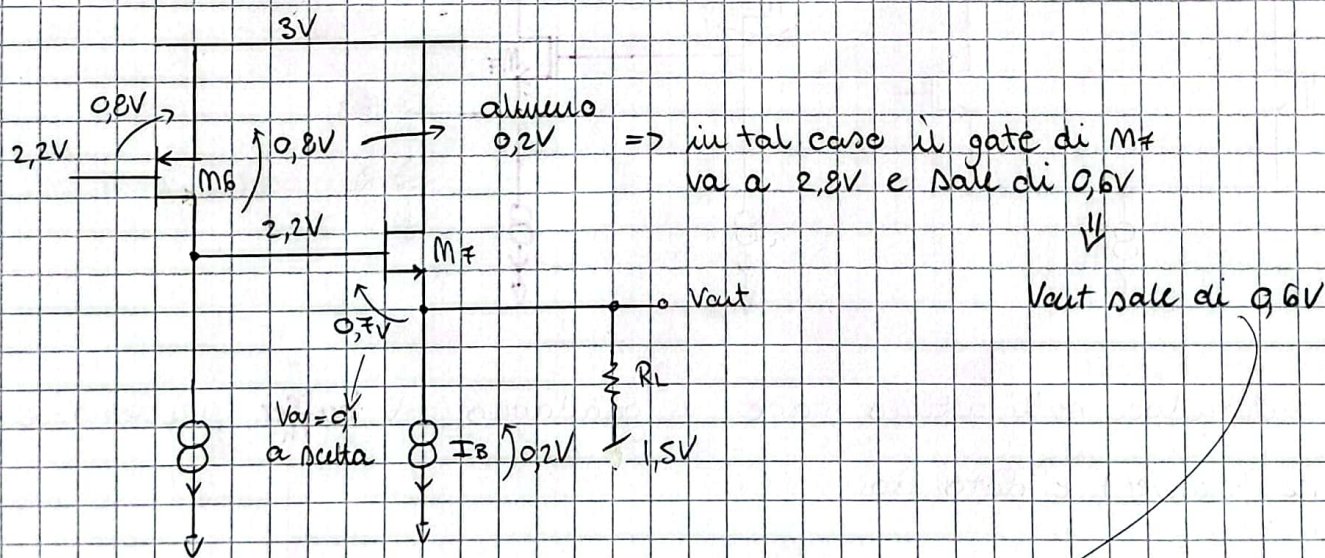
Supponiamo un guadagno, ad esempio, di  $G_{BVF} = 0,95$ , allora ho:



va considerato poi che esso non lavora in regime di piccolo segnale perché è all'uscita dell'OTA  $\rightarrow$  grande segnale

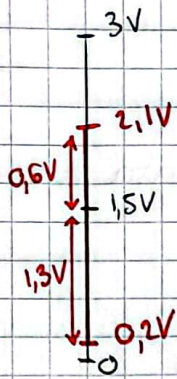
↓  
tale uscita va poi incrementata / il nuovo out (quello del buffer) sia a 1,5V ( $V_{ref}$ )

proviamo a fare il size, considerando  $R_L = 1k\Omega$  posta tra out e 1,5V



@DC non voglio cad su  $R_L$  e voglio  $V_{out} = 1,5V$

- il max  $V_{out}$  è  $1,5V + 0,6V$  perché la  $V_{os}$  di  $M_6$  massimo può arrivare al suo  $V_{ov} = 0,2V$
- il min invece dipende dal generatore ed è il suo  $V_{ov} = 0,2V$



lo swing non e' simmetrico (all'output)

durante lo swing negativo, la corrente attraverso  $R_L$  deve  $I_L^{\max} < I_B$ , altrimenti si spegne!

$\Rightarrow$  se ho uno swing  $\Delta$  allora  $I_L^{\max} = \frac{\Delta}{R_L}$  non impone limiti lo swing positivo

$\Rightarrow I_L^{\max} = \frac{\Delta_{\max}}{R_L} < I_B \Rightarrow \frac{0,6V}{1K} = 0,6mA \Rightarrow I_B \gg 0,6mA$   
 lo swing negativo si... ho che  $I_T = I_B - I_L$

ullo swing positivo non ho problemi perche'  $I_L$  si somma a  $I_B$  e non si sottrae...

si puo' notare che minore e' il carico, maggiore e' la corrente e quindi la potenza dissipata e ovviamente che maggiore e' lo swing e maggiore e' la potenza dissipata

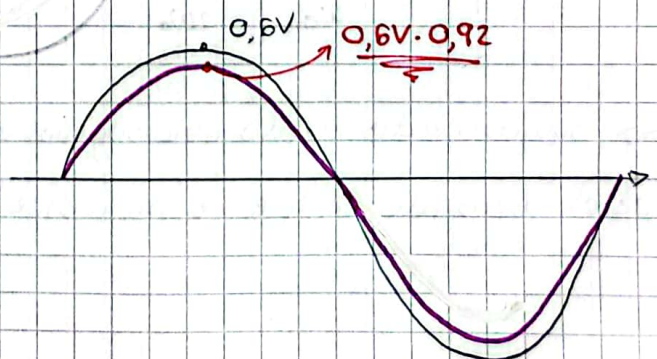
$$\Delta = \pm 0,6V$$

$$g_{m7} = \frac{2I_B}{V_{ov}} = \frac{2 \cdot 0,6mA}{0,1} = 12 \text{ mA/V}$$

$$\hookrightarrow g_{m7} \cdot R_L = 12 \text{ mA/V} \cdot 1k\Omega = \boxed{12}$$

$V_{ov} = 0,1$  e' una buona scelta

$$\Rightarrow G = \frac{1/g_{m7}}{R_L + 1/g_{m7}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{g_{m7}R_L}} = 0,92$$



L'aut ha la stessa forma e non ho distorsioni, ma ho solo una riduzione dello swing...



in realtà non è così...

⇒ la transconduttanza varia:

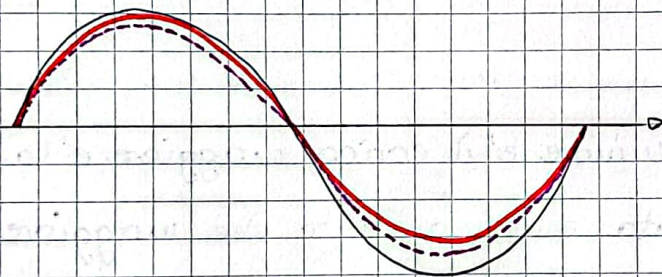
- durante lo swing positivo, la corrente attraverso  $M_7$  aumenta, e quindi la transconduttanza aumenta

⇓  
mi aspetto un picco + alto di quello calcolato

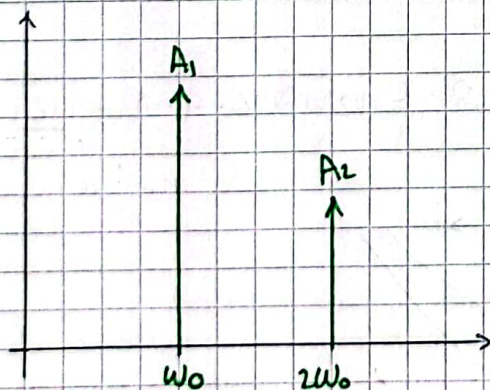
- durante lo swing negativo succede il contrario e la transconduttanza diminuisce

⇒ mi aspetto un picco + basso

⇒ ho una distorsione



si dimostra che tale segnale è dato dalla **sovrapposizione di due sinusoidi a frequenza  $\omega_0$  e  $2\omega_0$** ; ho una distorsione non lineare...



$$D_2 = 10 \log \frac{A_2^2}{A_1^2} = 20 \log \frac{A_2}{A_1} \quad [\text{dB}]$$

⇒ ovviamente quello che voglio è che  $A_2$  sia molto + piccolo di  $A_1$  ...  
cerchiamo di capire se si riesce a fare qualcosa

devo aumentare il gain | se eno vale 0,9999... allora la distorsione dovuta alla variazione e' minima perche' la massima variazione e' minima; per farlo devo aumentare gain

- aumento la  $W$  del transistor (se fino  $I_B$ )
- aumento la corrente  $I_B$  (nel caso non fosse sufficiente il precedente)

=> il costo e' la potenza dissipata! (e l'area)

(l'EFFICIENZA dell' output stage e':

$$\eta = \frac{\frac{\Delta^2}{2R_L}}{V_{DD} I_B} \rightarrow \text{potenza trasmessa al carico}$$

$$\leq \frac{\frac{\Delta^2}{2R_L}}{V_{DD} \frac{\Delta}{R_L}} = \frac{\Delta}{2V_{DD}} \rightarrow \text{potenza prelevata dall'alimentatore}$$

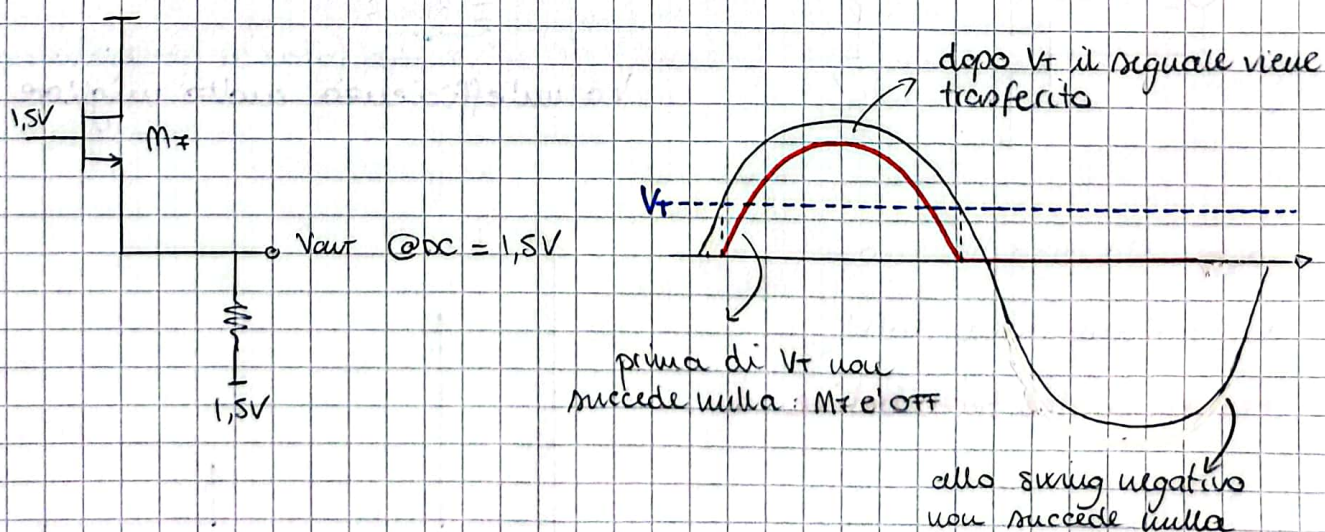
=> l'efficienza dipende da quanto e' il range rispetto a  $V_{DD}$

$$\Delta \leq \frac{V_{DD}}{2} < \frac{1}{4} = 25\% \text{ al massimo!}$$

ho un'efficienza davvero bassa dovuta alla struttura troppo semplice: su 400 W che consumo, 100 W li trasferisco al carico, 300 in calore!

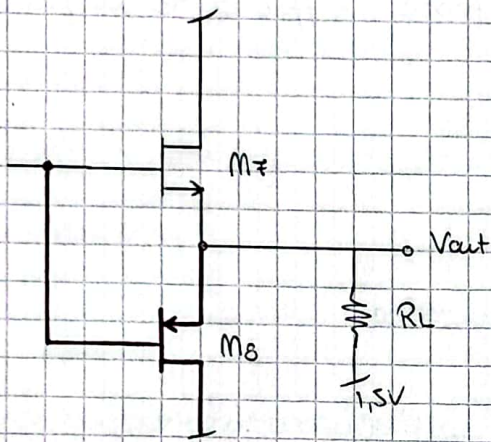
in DC ho  $\eta = 0\%$ : consumo potenza che non viene passata al carico

=> voglio rimuovere il bias, tenere il buffer, variando la struttura

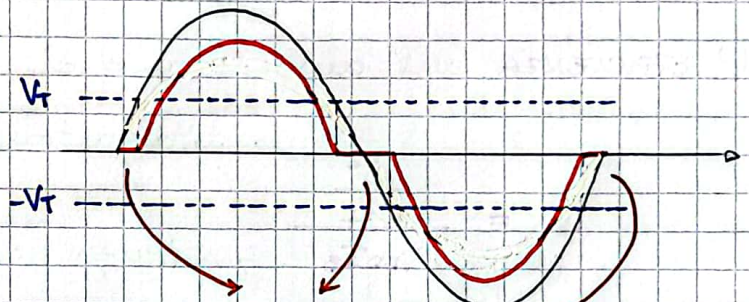


per recuperare il segnale aggiungo un p-mos follower e ottengo una nuova classe di dispositivi

### Δ CLASSE B



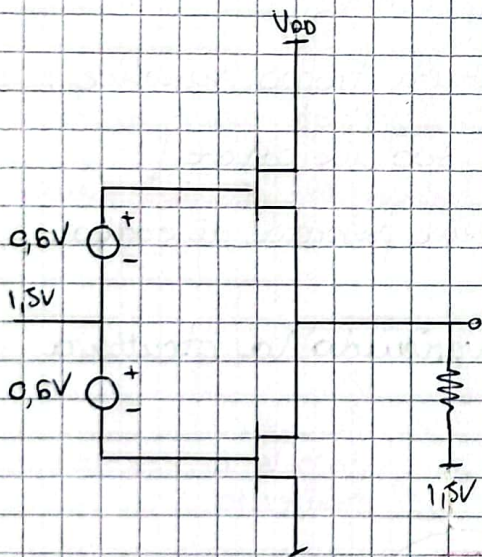
il p-mos follower lavora da buffer per il segnale negativo



abbiamo ancora delle distorsioni (cross-over distortion)

### PUSH-PULL STRUCTURE

per risolvere il problema delle "DEAD ZONES" posso aggiungere un bias ai gate dei due transistor... non le elimino, ma le riduco



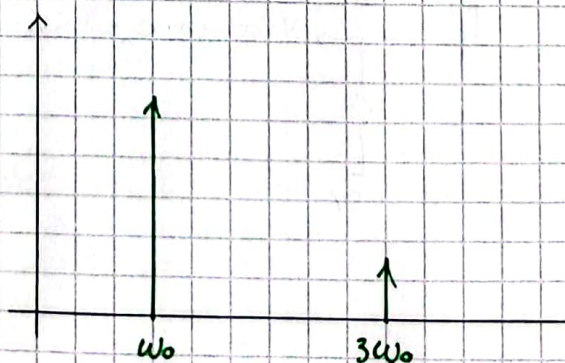
allora l'efficienza diventa:

$$I_{avg} = \frac{1}{\pi} \frac{\Delta}{R_L} \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{R_L}$$

$$\eta = \frac{\frac{\Delta^2}{2R_L}}{\frac{2}{\pi} \frac{\Delta}{R_L} \frac{V_{DD}}{2}} = \frac{\pi}{2} \frac{\Delta}{V_{DD}} \approx 78\%$$

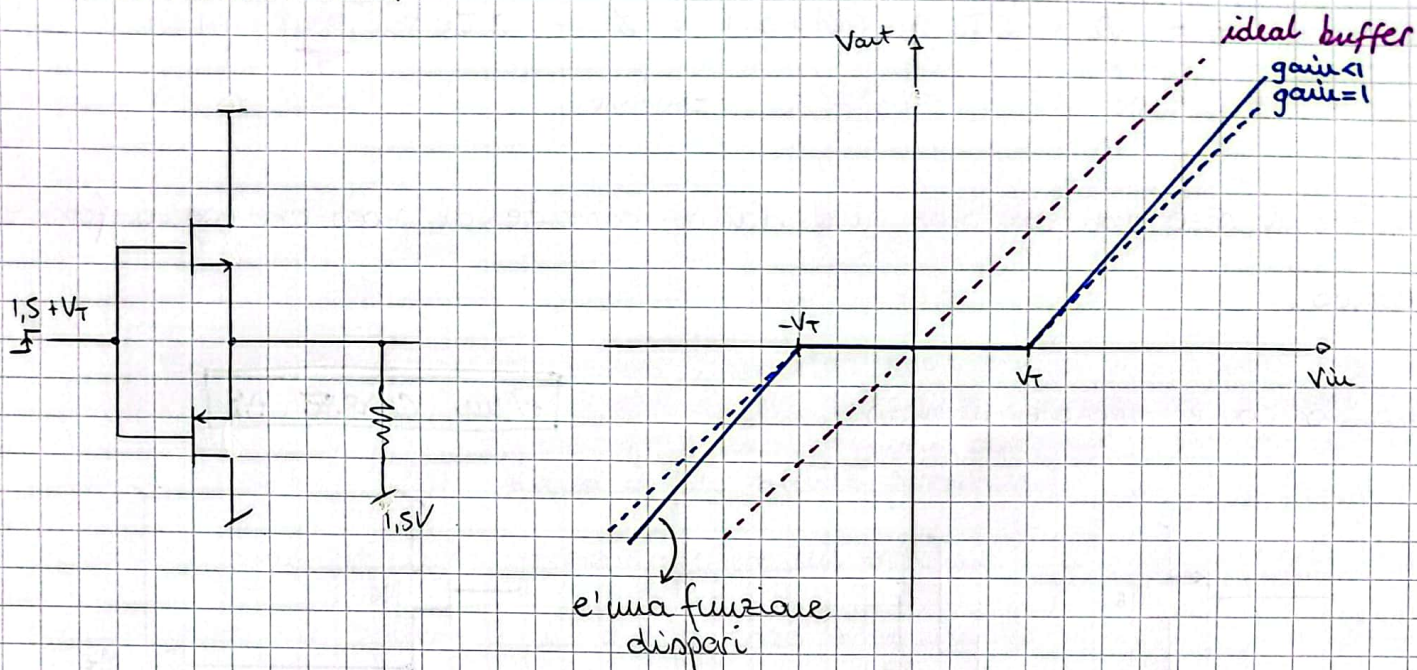
↳ potenza prelevata dall'alimentatore  
ho un'efficienza molto migliore

in questo caso ho una distorsione data dall'armonica del terzo ordine



ricaviamo il motivo per cui abbiamo un'armonica del terzo ordine:

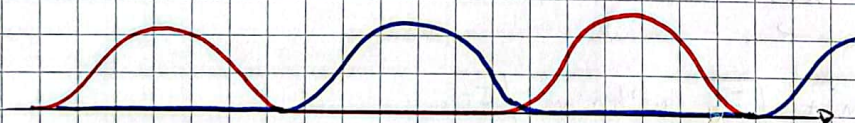
• INTUITIVE APPROACH



=> se all'ingresso ho  $\sin(x)$ , all'output ho  $\sin(x) \cdot \text{odd f}(x)$  e quindi ho delle armoniche dispari

• ANALYTICALLY APPROACH

la corrente attraverso  $M_T$   $\begin{cases} \text{positive side} \\ \text{negative side} \end{cases}$



$$i_1 = I_0 + I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$$

$$i_2 = I_0 + I_1 \sin(\omega(t - \frac{T}{2}) + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega(t - \frac{T}{2}) + \varphi_2) + I_3 \sin(3\omega(t - \frac{T}{2}) + \varphi_3)$$

e' shiftata di  $\pi$  in avanti...

$$\rightarrow \omega \frac{T}{2} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2} = \pi$$

$$\rightarrow 2\omega \cdot \frac{T}{2} = 2\pi$$

$$\rightarrow 3\omega \cdot \frac{T}{2} = 3\pi$$

$$= I_0 - I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) - I_3 \sin(3\omega t + \varphi_3)$$

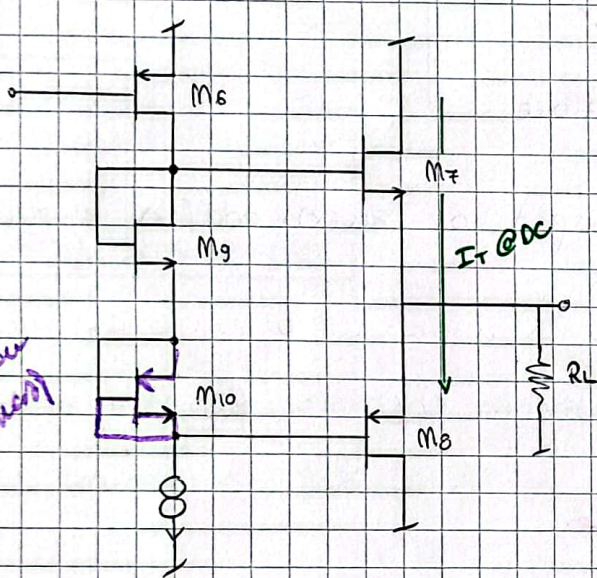
la corrente attraverso il carico e'

$$i_T = i_1 - i_2 = \underbrace{\phi}_{DC} + 2I_1 \sin(\omega t + \phi_1) + \underbrace{\phi}_{II \text{ HARMONIC}} + 2I_3 \sin(3\omega t + \phi_3)$$

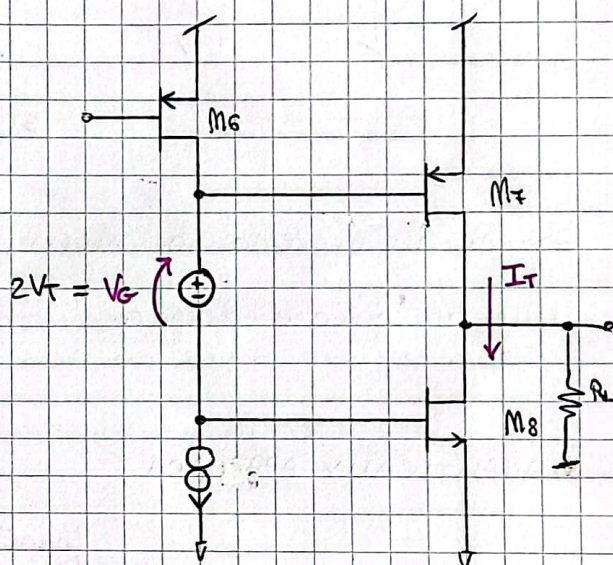
Devo fare il rize non dal bias, ma dalla corrente di picco che voglio fornire al carico.

Vediamo come regolare il bias

**e' un CLASSE AB**



*(come con p-mos)*



e' lo schema concettuale

$$V_{GS9} + V_{GS10} = V_{GS7} + V_{GS8}$$

$$\cancel{V_{tn}} + \sqrt{\frac{I_2}{K_9}} + V_{tn} + \sqrt{\frac{I_2}{K_{10}}} = \cancel{V_{tn}} + \sqrt{\frac{I_T}{K_7}} + V_{tp} + \sqrt{\frac{I_T}{K_8}}$$

=> non possiamo accettare variabilita' (in realta' lavoriamo sottoseglia)

=> e' difficile fare un "link" tra  $I_2$  e  $I_T$  se non rimuovo la  $V_{tp}$ ...

per semplificare  $V_{tp}$  devo usare un **p-mos** al posto di n-mos in  $M_{10}$ . allora, in tal caso, ho che:

$$\sqrt{\frac{I_2}{K_9}} + \sqrt{\frac{I_2}{K_{10}}} = \sqrt{\frac{I_T}{K_7}} + \sqrt{\frac{I_T}{K_8}}$$

$\downarrow$                      $\downarrow$                      $\downarrow$                      $\downarrow$   
 $K_{n9}$                      $K_{p10}$                      $K_{n7}$                      $K_{p8}$

assumiamo di avere lo stesso MOS scalato di un fattore  $n$ :

$$k_9 = n k_7$$

$$\left(\frac{W}{L}\right)_9 = \left(\frac{W}{L}\right)_{10}$$

$$k_{10} = n k_8$$

$$\left(\frac{W}{L}\right)_8 = \left(\frac{W}{L}\right)_7$$

allora: 
$$\frac{\sqrt{I_2}}{\sqrt{n}} \left[ \frac{1}{\sqrt{k_7}} + \frac{1}{\sqrt{k_8}} \right] = \sqrt{I_T} \left[ \frac{1}{\sqrt{k_7}} + \frac{1}{\sqrt{k_8}} \right]$$

$$I_T = \frac{I_2}{n}$$

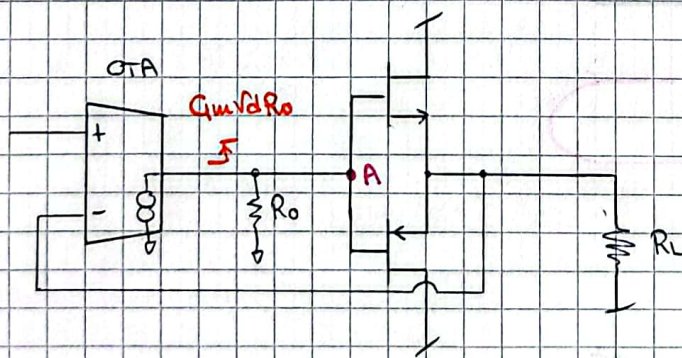
→ se usiamo transistori scalati, allora anche la corrente è scalata di un fattore  $n$  (facile da controllare) (posso usare una cascode centroid structure affinché siano il più simile possibile)

... quindi ogni volta che dobbiamo usare un OTA con un carico resistivo e' meglio usare un buffer: in questo caso si rende indipendente il guadagno dal carico stesso...

Fino ad ora abbiamo discusso solo dell'open-loop distortion: ma cerchiamo di capire ora il ruolo del feedback nella distorsione, ma prima definiamo la **TOTAL HARMONIC DISTORSION**

$$THD = \sqrt{\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{A_3}{A_1}\right)^2 + \dots}$$

Consideriamo OTA + BUFFER:



se  $G_m \rightarrow \infty$  (gain  $\infty$ ) un aspetto  $G_{loop} \rightarrow \infty$  allora se ho



cosa abbiamo al **nodo A** ?

quando supero lo zero verso l'alto, accendo subito M7 e si genera una corrente su R1, e lo stesso accade quando scendo sotto lo zero con M8.

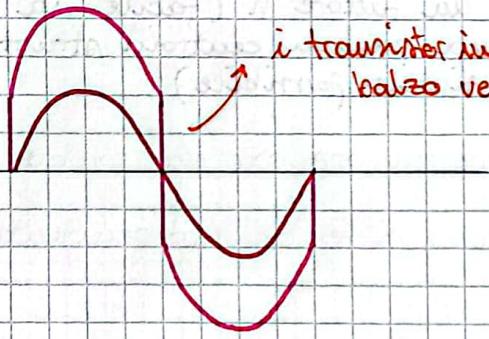
Ma ci sono le DEAD-ZONES



devo superarle velocemente (idealmente in un tempo  $\sigma$ ) e quindi devo avere un rapido incremento:

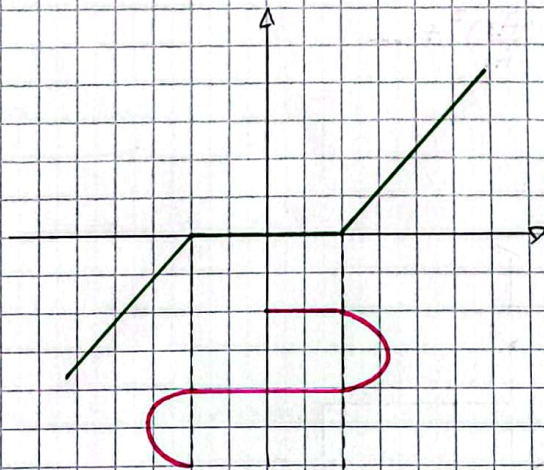
modo A

output



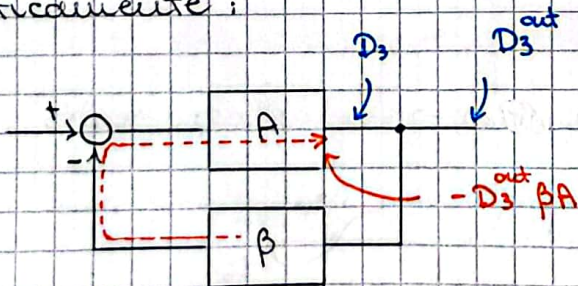
i transistor in output sono subito pronti se ho questo balzo verso l'alto/basso

questo ha senso se il guadagno è  $\infty$ : al nodo A, grazie al feedback, ho una distorsione tale da cancellare la distorsione all'output: ho un input distorto!



il feedback genera una predistorsione affinché si cancelli quella in uscita dal buffer

Schematicamente:



$$D_3^{out} = D_3 - \beta A D_3^{out}$$



$$D_3^{out} (1 + \beta A) = D_3$$

$$D_3^{out} = \frac{D_3}{1 - \beta A}$$

# NOISE MODELS

## Δ THERMAL NOISE

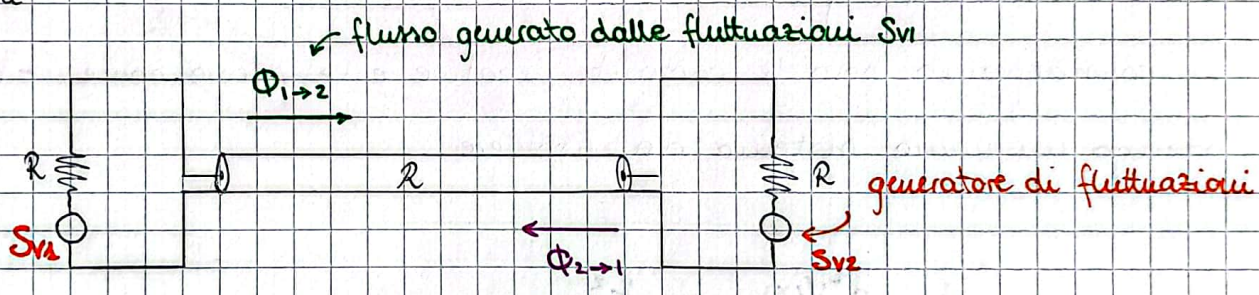
Dimostriamo perché il voltage noise power spectral density ai capi di un resistore vale  $S_v = 4kTR$  e applichiamo i risultati al transistor...  
... anche perché ricaveremo un altro tipo di rumore, definito **shot-noise**.

Assumiamo di avere due resistori all'equilibrio termico, a temperatura  $T$ , connessi tra loro tramite un cavo coassiale adattato in impedenza alle resistenze, e quindi anch'esso di resistenza  $R$ , per evitare riflessioni del segnale

@ qualsiasi cross-section del cavo ho che vale sempre

$$\frac{v(x,t)}{i(x,t)} = R$$

temperatura  
 $T$



il flusso  $\Phi_{1 \rightarrow 2}$  impiega un tempo  $T = \frac{L}{c}$  per passare il coassiale

@ given  $x$ :

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}$$

dall'equazione delle onde

se ad un certo punto intrappoliamo l'energia nel cavo shortando le estremità, allora abbiamo delle condizioni al bordo che l'onda / le onde devono rispettare mentre si continuano a propagare nel cavo coassiale: alle estremità, qualsiasi sia la tensione d'onda che considero, devo avere  $v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad \forall t$



quindi ottengo un sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad \forall t \end{cases}$$

per risolverlo splitto  $v$  in due funzioni  $v(x,t) = V(x) \cdot T(t)$   
e risolvo la derivata:

$$\left[ \frac{1}{T(t)V(x)} \right] T(t) \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \left[ \frac{V(x)}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \right] \frac{1}{T(t)V(x)}$$

$$\frac{1}{V(x)} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} \quad (f(x) = g(t))$$

questo e' possibile solo se entrambe le quantita' sono costanti  
(tralasciamo la soluzione ovvia  $v(x,t) = 0$ )

... consideriamo solo le costanti negative e le scrivo come  $-k^2$ , allora  
otengo un nuovo sistema da risolvere

$$\begin{cases} \frac{1}{V(x)} \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -k^2 \\ \frac{1}{c^2 T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = -k^2 \end{cases}$$

che ha come soluzioni

$$\begin{cases} V(x) = A \sin(kx) + B \cos(kx) \\ T(t) = C \sin(kct) + D \cos(kct) = F \sin(kct + \varphi) \end{cases}$$

e quindi  $v(x,t) = [A \sin(kx) + B \cos(kx)] \cdot F \sin(kct + \varphi)$  e' la soluzione  
che deve rispettare le condizioni al contorno

-  $V(0) = 0 \Rightarrow B = 0$

-  $V(L) = 0 \Rightarrow kL = 0 + n\pi$  e quindi

$$k_n = \frac{n\pi}{L}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

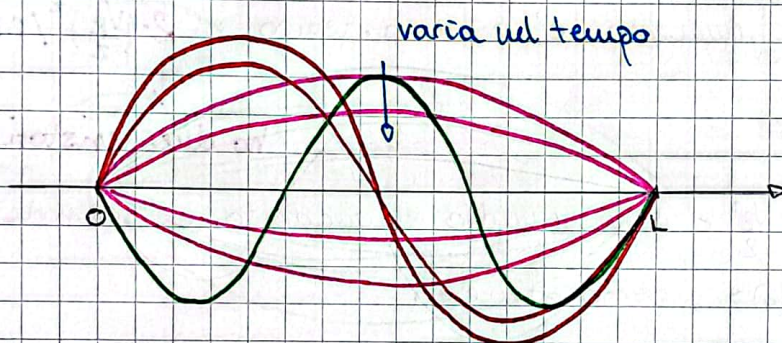
e quindi la soluzione finale e':

$$v_n(x,t) = A \sin(k_n x) \cdot \sin(k_n c t + \varphi)$$

•  $n = 1 \Rightarrow v_1(x,t) = A \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{L} c t + \varphi\right)$

•  $n = 2 \Rightarrow v_2(x,t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} c t + \varphi\right)$

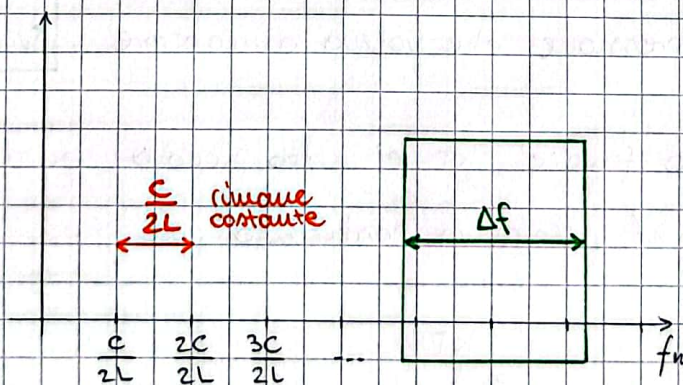
• ...



$n = 1$   
 $n = 2$   
 $n = 3 \dots$

possiamo definire una frequenza

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = n \frac{c}{2L}$$



valutiamo quanta energia e' racchiusa in uno spazio  $\Delta f$  attorno ad una frequenza centrale, ad esempio  $1 \text{ MHz} = f_0$ , all'equilibrio.

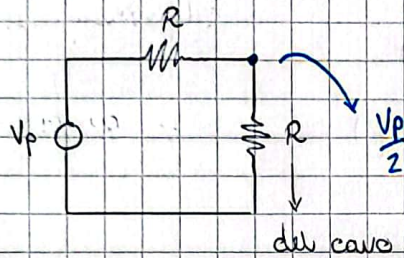
Essa e' un' onda elettromagnetica e quindi l'energia puo' essere racchiusa nel campo elettrico o nel campo magnetico

$\Rightarrow$  2 gradi di liberta'

Per il TEOREMA DI EQUIPARTIZIONE DELL'ENERGIA ho che l'energia media in ogni modo e'  $k_B T$  e visto che ho due soli gradi di liberta' unita' sara' racchiusa nel campo elettrico e unita' in quello magnetico (in media), e quindi

$$\Delta E = kT \frac{\Delta f}{\frac{c}{2L}}$$

tale energia era stata generata dal rumore (generatore) dei resistori agli estremi del cavo coassiale



⇒ la potenza inserita nel cavo e'

$$\frac{(\frac{V_p}{2})^2}{2R}$$

e quindi l'energia immessa e' potenza · tempo :  $2 \cdot (\frac{V_p}{2})^2 / 2R \cdot \frac{L}{c}$

ho due resistori identici

per una sinusoidale  $\frac{V_p^2}{2}$  e' il valor medio al quadrato e considerando che  $S_v(f_0) \cdot \Delta f = \langle n_i^2(f_0) \rangle$ , posso ottenere:

$$\Delta E = \frac{2}{2R} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{V_p^2}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{2R} \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{S_v(f_0) \Delta f}{2} = kT \frac{\Delta f}{\frac{c}{2L}}$$

da cui deriva l'espressione che volevo dimostrare

$$S_v(f_0) = 4kTR$$

**N.B.:** questo e' valido finche'  $kT$  e' molto piccolo; quando diventa comparabile con  $hf$  allora va sostituito con

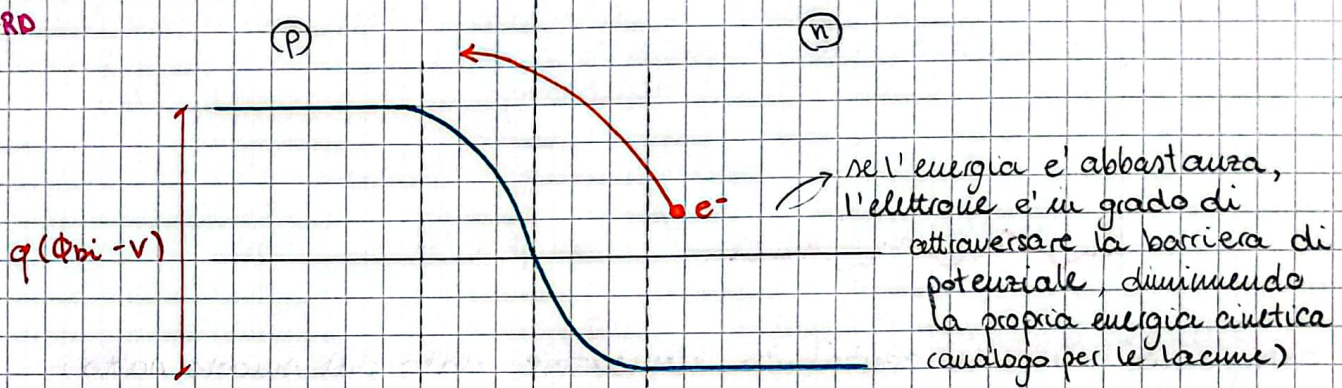
$$\frac{kT}{e^{\frac{hf}{kT}} - 1}$$

e questo succede per frequenze maggiori di quelle di nostro interesse

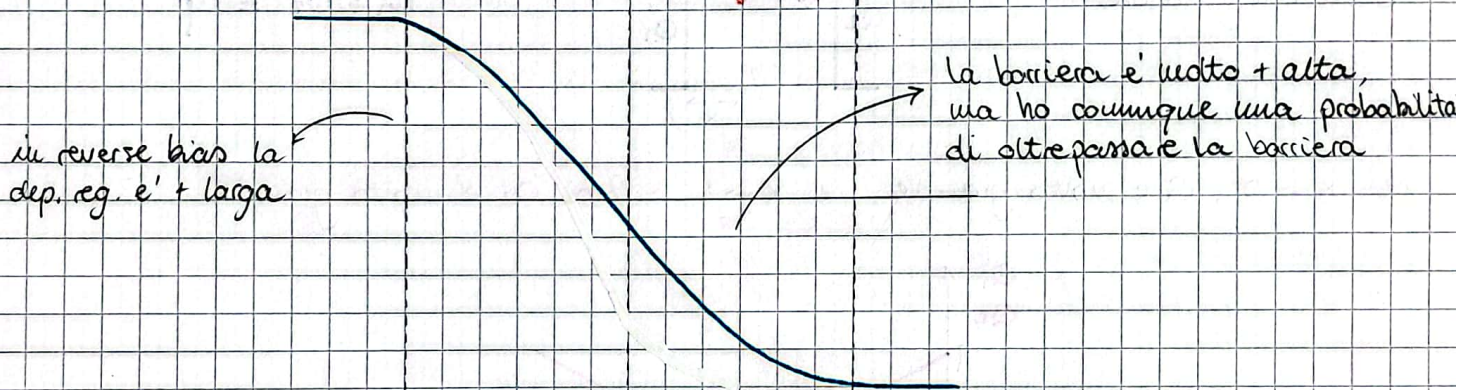
# Δ SHOT NOISE

e' il rumore che abbiamo in presenza di una giunzione p-n

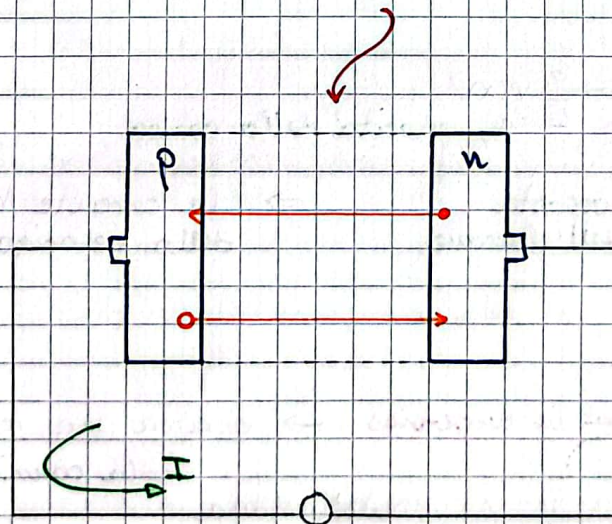
## • FORWARD



## • REVERSE

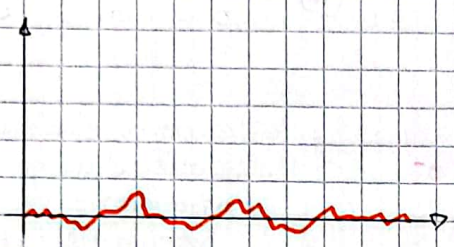


la depletion region e' fondamentalmente una regione di "isolante" che ostacola il trasporto delle cariche



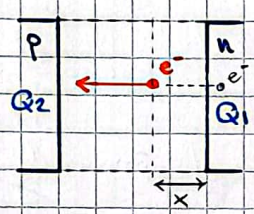
⇒ in questo caso il rumore e' dato dal casuale passaggio di una carica oltre il layer isolante ed e' la sovrapposizione di tutti i contributi dati da ogni elettrone

=> poiché il numero di elettroni che passa l'isolante non è costante, ma varia nel tempo, allora tale contributo in corrente non è costante, ma "fluttua" nel tempo



deriviamo prima il contributo elementare dato dal singolo salto:

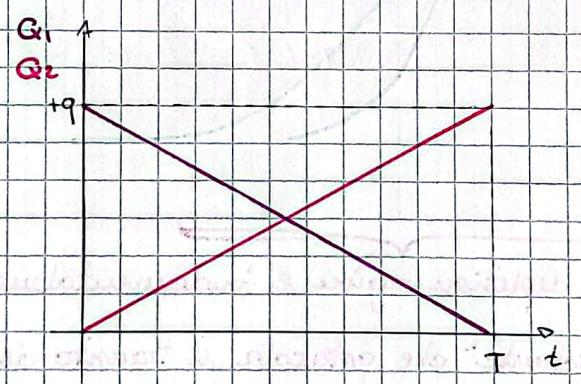
è un condensatore



bilanc. carica

$$Q_1 + Q_2 = q$$

se  $x \rightarrow 0$ ,  $Q_1$  è molto grande, se  $x \rightarrow L$  allora  $Q_2$  è molto grande



$$Q_1 = q \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

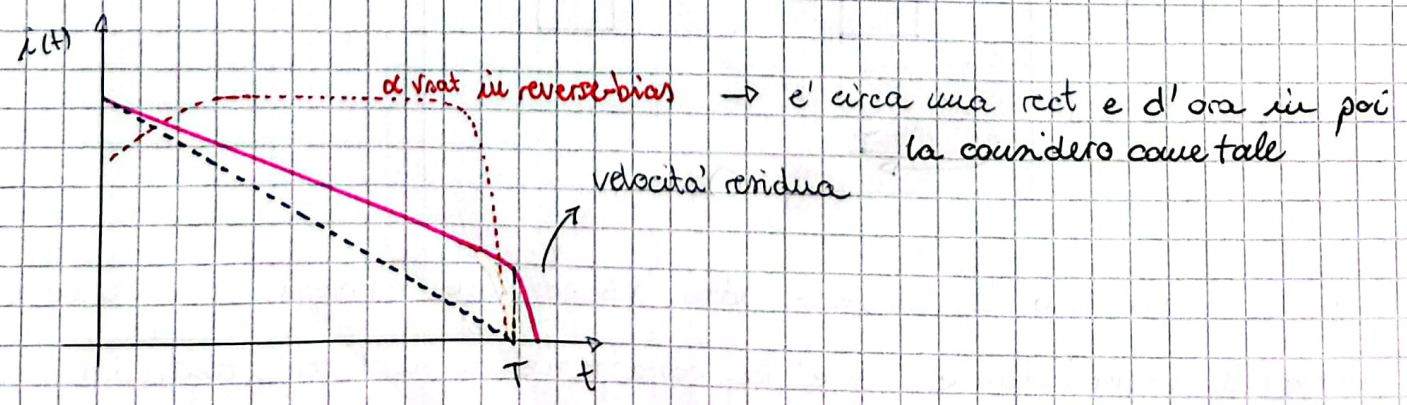
$$Q_2 = q \frac{x}{L}$$

$$i = \frac{dQ_1}{dt} = \frac{-q}{L} \frac{dx}{dt} = -\frac{q}{L} v(x)$$

↳ velocità della carica

la corrente è opposta al movimento dell'elettrone

=> la corrente ha la stessa forma della velocità della carica



Supponiamo di avere  $I = 1 \mu A$  e  $N = \frac{I}{q} = 6,2 \cdot 10^{15} \text{ carriers/s} = \lambda$

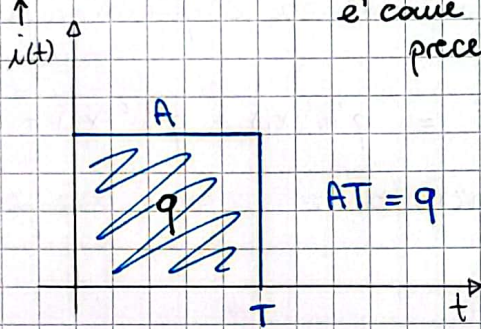
Supponiamo che la carica si muova con una velocità pari a quella di saturazione

carriers rate

il contributo elementare è circa una rect di durata  $T$  e di area  $q$ .

perché  $v(t)$  è una rect(), anche  $n$  in realtà è come al disegno precedente

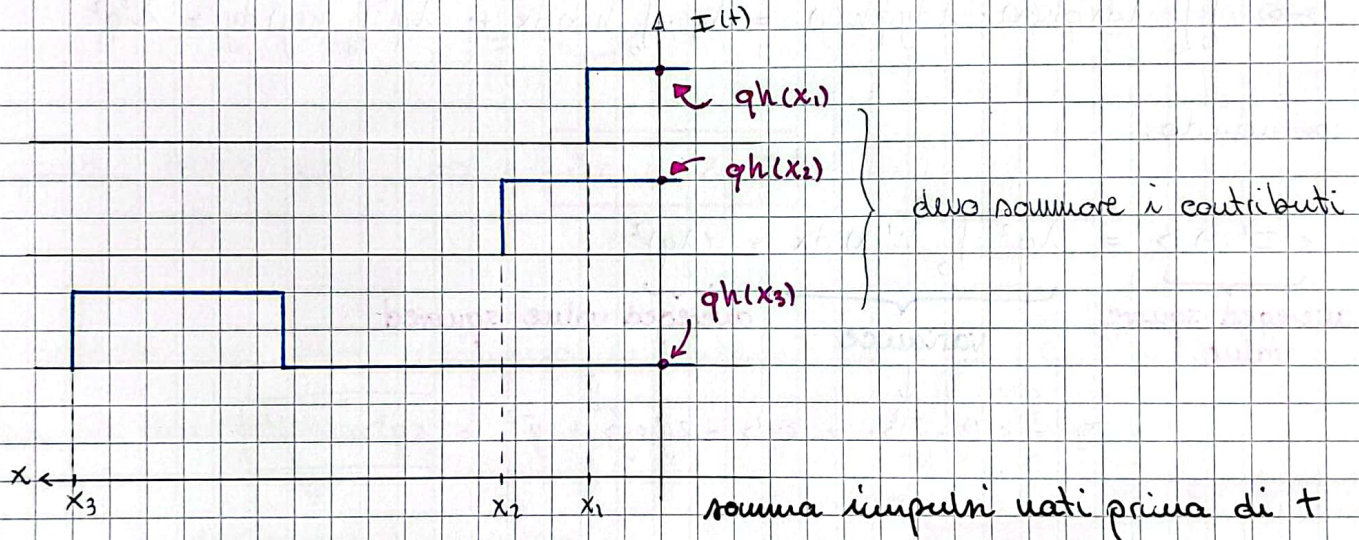
dell'ordine di qualche ps



$$\Rightarrow i(t) = qh(t)$$

è la **normalized shape pulse** (di area unitaria:  $A = \frac{1}{T}$ )

allora la corrente @ istante  $T$  è data dalla sovrapposizione fra i vari contributi (somma di impulsi discreti di forma ben definita):



somma impulsi nati prima di  $t$

$$I(t) = qh(x_1) + qh(x_2) + qh(x_3) + \dots$$

ma noi non sappiamo quando

sono casuali perché generati da portatori indipendenti

inizia ogni impulso e dobbiamo usare un approccio + preciso

sappiamo che il numero medio è  $N$ , ma non sappiamo quello preciso

$\Rightarrow$  tra  $x$  e  $x+dx$  gli elettroni che passano la barriera sono  $\lambda dx$ , allora il contributo alla corrente è  $\lambda dx \cdot qh(x)$   $\forall x$  che varia tra 0 e  $+\infty$  e quindi:

$$\lambda = \frac{I}{q} \text{ è l'average rate per unit time}$$

probabilità che si verifichi un impulso tra  $x$  e  $x+dx$

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \lambda dx qh(x)$$

$$\langle i(t) \rangle = \langle qh(x_1) + qh(x_2) + \dots \rangle$$

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \lambda q \cdot h(x) dx = \lambda q \int_0^{+\infty} h(x) dx = \lambda q \quad \text{e quindi ho che}$$

$$I(t) = q\lambda \rightarrow \text{stesso risultato che avevamo in partenza}$$

(la corrente media  $e'$  = alla freq. media  $\times$  la carica)

ora siamo in grado di calcolare, però, la varianza e quindi il rumore

$$I^2(t) = (qh(x_1) + qh(x_2) + \dots)^2 = q^2 h^2(x_1) + q^2 h^2(x_2) + \dots$$

$$+ 2q^2 h(x_1)h(x_2) + 2q^2 h(x_1)h(x_3) + \dots$$

integro i vari termini (x comodita' separatamente) per fare la  $\langle \cdot \rangle$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \lambda dx \cdot q^2 h^2(x) = \lambda q^2 \int_0^{+\infty} h^2(x) dx$$

$$\rightarrow \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \lambda dx qh(x) \cdot \lambda dy qh(y) = \lambda q \cdot \int_0^{+\infty} h(x) dx \cdot \lambda q \int_0^{+\infty} h(y) dy = \lambda^2 q^2$$

sommando:

$$\langle I^2(t) \rangle = \underbrace{\lambda q^2 \int_0^{+\infty} h^2(x) dx}_{\text{variance}} + \underbrace{(\lambda q)^2}_{\text{averaged value squared}}$$

*averaged square value*

$$\sigma_y^2 = \langle (y - \bar{y})^2 \rangle = \langle y^2 \rangle - 2\bar{y} \langle y \rangle + \bar{y}^2 = \langle y^2 \rangle - \bar{y}^2$$

la corrente  $e'$  è data dalla sovrapposizione di singoli contributi elementari, detti **shot** e tutte le volte che val ciò ho una corrente con la forma trovata

$$\Rightarrow \text{uso il teorema di Parseval} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h^2(x) dx = 2 \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega$$

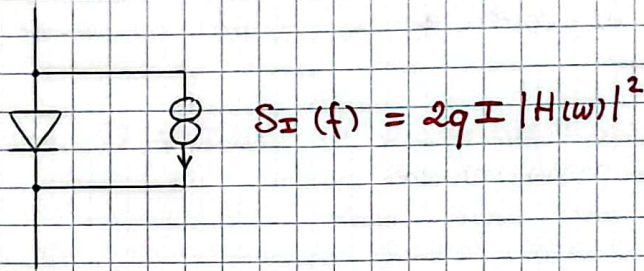
$H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$

$\rightarrow H(f)$  è dispari visto che  $h(f)$  è reale

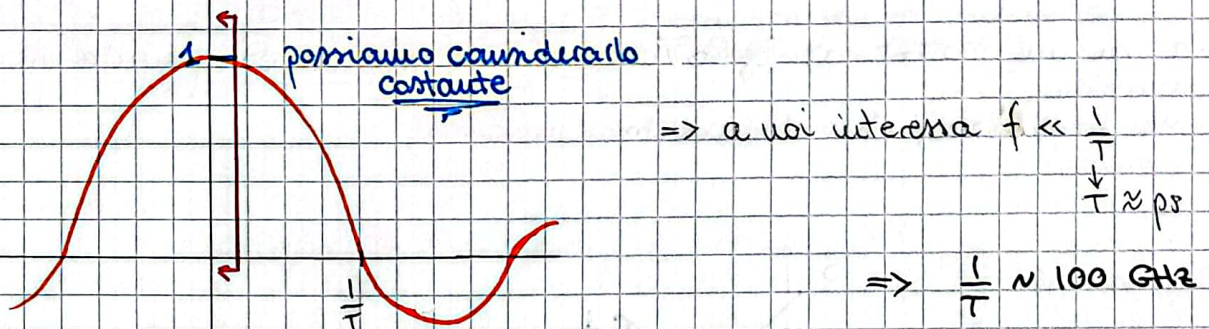
$$\text{e quindi } \sigma_I^2 = 2q^2\lambda \int_0^{+\infty} |H(\omega)|^2 d\omega = \int_0^{+\infty} S_I(f) df$$

$$\Rightarrow S_I(f) = 2q^2\lambda |H(\omega)|^2 = 2Iq |H(\omega)|^2$$

e quindi ottengo un modello del tipo



ci rimane da trovare  $|H(w)|$  che è la trasformata della rect, la sine



e quindi  $|H(w)|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{S_I = 2qI}$

La corrente che scorre attraverso il diodo è  $I = I_0 (e^{\frac{qV_0}{kT}} - 1)$   
 data da due contributi  
 ↓  
 ho due contributi al rumore:

$$I = I_0 e^{\frac{qV_0}{kT}} - I_0$$

DIFFUSION CONTRIBUTION      DRIFT CONTRIBUTION

↳ posso scrivere  $I e^{\frac{qV_0}{kT}} = I_0 + I$  sempre

$$S_{I_{diff}} = 2qI_{diff} + 2qI_{drift} = 2q(I + I_0) + 2qI_0 = 2qI + 4qI_0$$

Δ FORWARD BIAS  $\Rightarrow 2qI$

Δ REVERSE BIAS  $\Rightarrow 2qI_0$  perché  $I = -I_0$

Δ EQUILIBRIO  $\Rightarrow 4qI_0$

@ equil.

$$\text{@ } V_0 = 0 \text{ ho } I = 0 \Rightarrow g_0 = \frac{\partial I}{\partial V_0} = \frac{q}{kT} I_0 e^{\frac{qV_0}{kT}} = \frac{q}{kT} (I + I_0) \downarrow \frac{qI_0}{kT}$$

$$\Rightarrow S_I = 4qI_0 = 4kTg_0 = \frac{4kT}{V_0}$$

ottimo... il risultato è consistente con quanto avevamo ottenuto usando due diodi nell'esperimento del cavo coassiale



in un **MOSFET** :

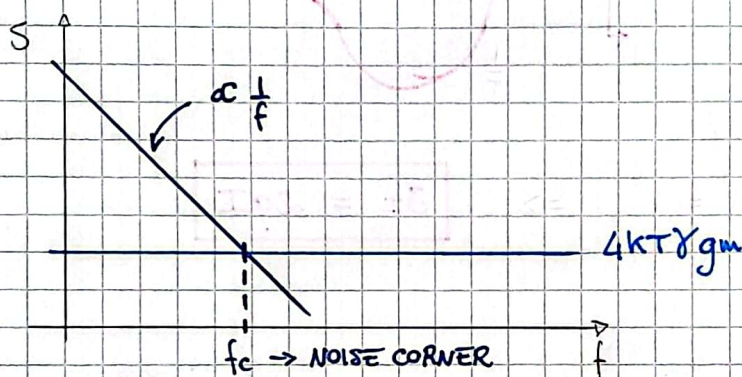
@ WEAK-INVERSION il rumore e' dato dagli elettroni che passano la barriera e generano un contributo in corrente

=> e' uno **shot-noise**

=>  $g_m = \frac{I_0}{nV_{th}}$  e quindi posso scrivere

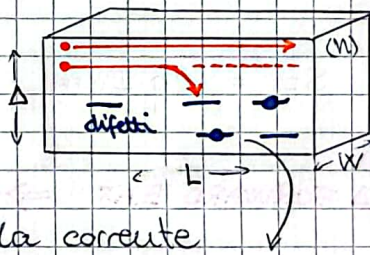
$$S_I = 2qI_0 = 2qn \cdot \frac{kT}{q} g_m = \boxed{4kT\gamma g_m} \text{ che avevamo visto, e } \gamma = \frac{n}{2}$$

Ma in un MOSFET abbiamo anche una seconda componente in rumore a basse frequenze, che e' rilevante



### Δ RANDOM TELEGRAPH NOISE = 1/f NOISE

consideriamo un layer conduttivo: potrebbe succedere che una carica venga **catturata da un difetto**, riducendo la corrente finché essa non sia **riemessa**

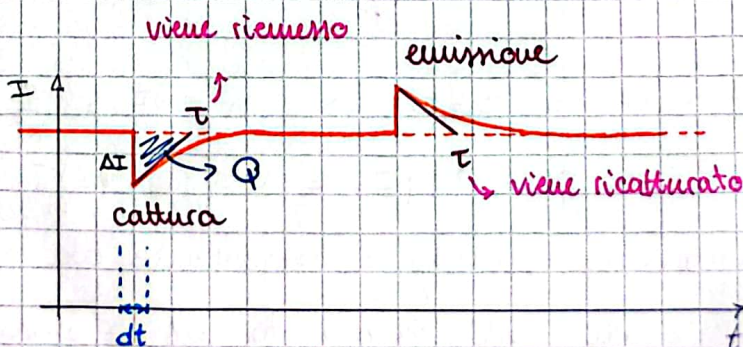


=> in questo lasso di tempo essa non contribuisce alla corrente

alcuni sono già popolati da elettroni

$$I = GV = \underbrace{q\mu n}_{\sigma} \underbrace{\frac{W\Delta}{L}}_{\sigma} V \cdot \underbrace{\frac{N}{L}}_{\text{numero totale di portatori liberi}} = \frac{q\mu n}{L^2} V \cdot N$$

$$dI = \frac{q\mu V}{L^2} dN$$



$$\Delta N = 1 \rightarrow \Delta I = \frac{I}{N} \Rightarrow i(t) = \Delta I e^{-\frac{t}{\tau}} = (\Delta I \cdot \tau) \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

quante catture ho in un tempo dt? Ho  $\lambda_c dt$

quante emissioni ho nello stesso tempo?  $\lambda_e dt$

$\Rightarrow$  all'equilibrio ho  $\lambda_c = \lambda_e = \lambda = \beta \frac{N_T}{\tau}$

inoltre ho che  $Q = \tau \Delta I$  (e' l'integrale risolto)

e quindi posso ricavarmi il rumore, che e' sempre SHOT e ha la stessa forma di prima:

questo perché e' anche esso un rumore generato dalla sovrapposizione di impulsi di corrente elementari con forma ben definita  
 $[I = Q \cdot h(t)]$

$$2\lambda Q^2 |H(f)|^2 = S_I = 2 \left( \frac{I}{N} \right)^2 \underbrace{\frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2}}_{\text{Lorentzian}} \cdot 2$$

ho due processi distinti  $\left\{ \begin{array}{l} \text{emissione} \\ \text{cattura} \end{array} \right.$

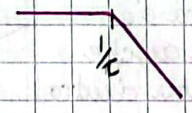
$$= 2\lambda Q^2 |H(\omega)|^2 + 2\lambda Q^2 |H(\omega)|^2 = 4Q^2 \lambda |H(\omega)|^2$$

$$= 4\beta N_T \left( \frac{I}{N} \right)^2 \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

statisticamente indipendenti

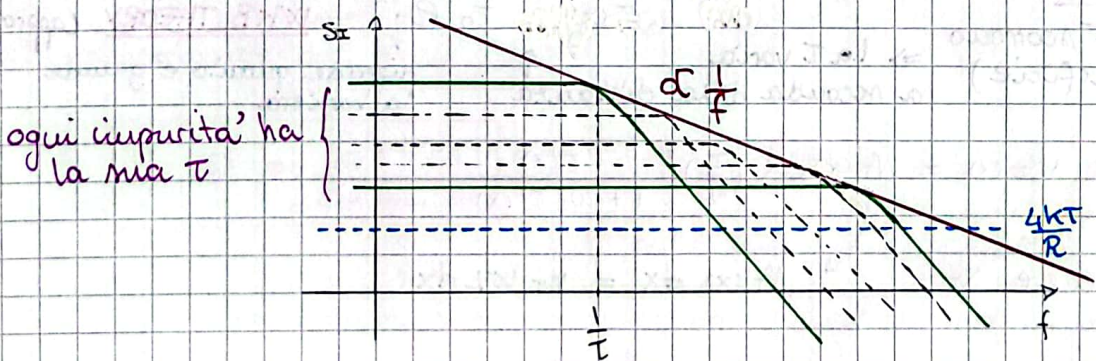
si dimostra che  $\beta = \frac{1}{4}$  per le trappole la cui  $E < E_{fermi}$  che sono quelle + probabili che siano piene

$$= \boxed{N_T \left( \frac{I}{N} \right)^2 \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{single-pole low-pass transfer function (Lorentzian shape)}$$



nel caso di due impurita  $\left\{ \begin{array}{l} \text{oro (Au)} \\ \text{indio (In)} \end{array} \right.$  ho due contributi

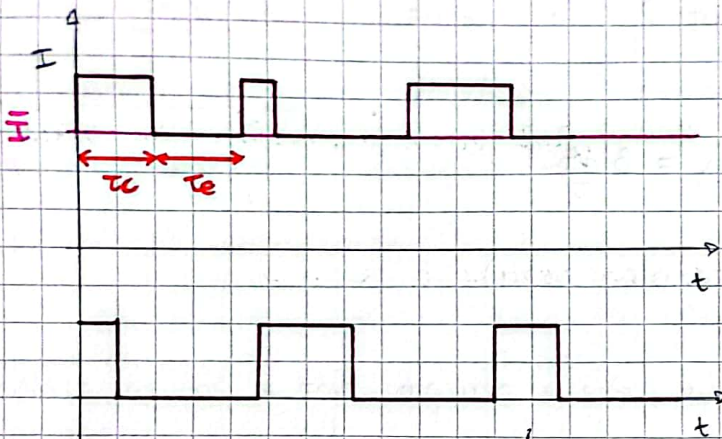
$$S_I = N_{T,Au} \left( \frac{I}{N} \right)^2 \frac{\tau_{Au}}{1 + \omega^2 \tau_{Au}^2} + N_{T,In} \left( \frac{I}{N} \right)^2 \frac{\tau_{In}}{1 + \omega^2 \tau_{In}^2}$$



ogni impurita' ha la sua  $\tau$

N.B.: se si considera un singolo e- allora la forma d'onda non puo' essere esponenziale, ma avra' un andamento ad onda quadra (ecco perché TELEGRAPH NOISE); l'andamento esponenziale deriva dal fatto che quando si considera un processo statistico ha senso riferirsi alla media temporale di tutti questi processi microscopici e quindi risulta che la corrente media ha un andamento esponenziale

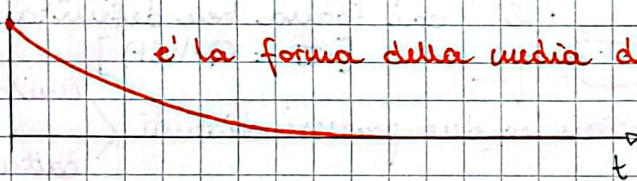
ecco perché random telegraph noise



i contributi elementari hanno una forma di treno di impulsi casuali con tempo casuale

per forza e' così: l'emissione e la cattura possono solo causare un salto fra due stati discreti

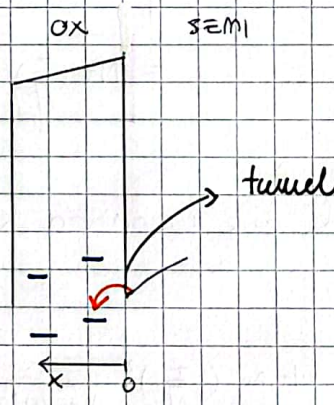
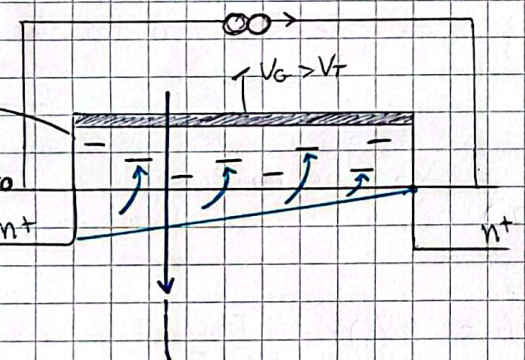
e' la forma della media di tutti i singoli contributi elementari



e quindi nel MOSFET abbiamo  $S_I = 4kTg_m \gamma + \frac{k}{f}$  la cui componente  $\frac{1}{f}$  non può essere trascurata

essa e' generata dalla sovrapposizione di molti contributi lorentziani dovuti ai difetti nell'ossido del MOSFET

la cattura e' possibile anche da difetti dentro l'ossido e non solo da quelli superficiali



McWHORTER MODEL

(questo perché gli e- scorrono vicino alla superficie)

=> la tau varia a seconda della distanza

$\tau(x) = \tau_0 e^{\gamma x}$  ricavo l'exp dalla WKB THEORY (approx.)  
↑ dipende quanto e' grande la barriera

da cui ottengo:  $dS_I(x) = N_T(x) dx \left(\frac{I}{N}\right)^2 \frac{\tau(x)}{1 + \omega^2 \tau^2(x)}$

che integro per ottenere  $S_I$  ↓  $N_T(x) dx = n_T WL dx$

$$\Rightarrow \int_0^{t_{ox}} n_T WL dx \left(\frac{I}{N}\right)^2 \frac{\tau(x)}{1 + \omega^2 \tau^2(x)} = \int_{\tau_0}^{\tau_0 e^{\gamma t_{ox}}} n_T WL \frac{d\tau}{\gamma \tau} \left(\frac{I}{N}\right)^2 \frac{\tau}{1 + \omega^2 \tau^2}$$

cambiare fare un cambio di variabile :  $\frac{d\tau}{dx} = \gamma \tau(x) \Rightarrow dx = \frac{d\tau}{\gamma \tau(x)}$

$$S_I = \frac{n_T W L}{4 \gamma} \left(\frac{I}{N}\right)^2 \int_{\omega_0}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = \frac{\pi}{2} \frac{n_T W L}{4 \gamma} \left(\frac{I}{N}\right)^2$$

$\int_{\omega_0}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + \omega^2 \tau^2} = \tan^{-1}(\omega\tau) \Big|_{\omega_0}^{+\infty} \rightarrow$  in realtà non è  $+\infty$ , ma è molto grande ( $\gg 1$ )  
 $\Rightarrow n\text{Hz} < \omega < \text{THz}$   
 $\hookrightarrow e \ll 1$   $L \cdot \left(\frac{1}{\tau}\right)$   
 $= \tan^{-1}(\omega\tau_{\text{avg}}) - \tan^{-1}(\omega\tau_0) \approx \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$

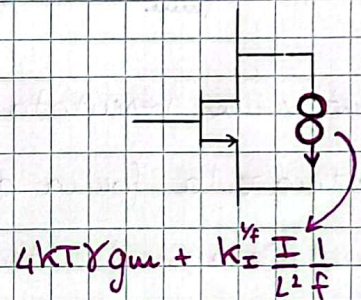
$$S_I(f) \approx \frac{n_T W L}{4 \gamma} \left(\frac{I}{N}\right)^2 \cdot \frac{1}{f} \quad \text{che va come } \frac{1}{f}$$

$\Rightarrow$  l'intensità di  $S_I$  dipende da  $n_T$ , cioè dalla densità di difetti nell'ossido che è un valore dato  $\Rightarrow$  noi possiamo agire su  $W$  e  $L$

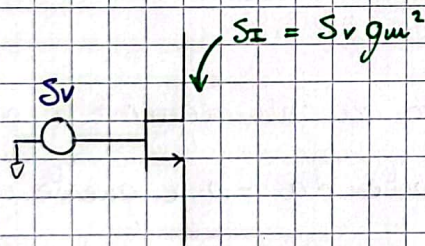
$$\left. \begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \mu C_{ox}' \frac{W}{L} \cdot V_{ov}^2 \\ N &= \frac{1}{q} (C_{ox}' W L V_{ov}) \end{aligned} \right\} \quad W L \frac{I^2}{N^2} = \frac{1}{2} \mu \frac{I}{L^2 C_{ox}'}$$

$$\Rightarrow S_I(f) = \frac{q^2 n_T \mu}{8 \gamma C_{ox}} \cdot \frac{I}{L^2} \cdot \frac{1}{f} = \boxed{K_I^{1/2} \frac{I}{L^2} \frac{1}{f}}$$

dipende dalla tecnologia



facciamo un ulteriore passo in avanti:



$\Rightarrow$  il rumore  $I$  è quindi generato dalla cattura/emissione dalle trappole distribuite in maniera uniforme nell'ossido e di varia tipologia (e diversa  $\tau$ )

$$S_V = \frac{4kT\gamma}{g_m} + \frac{K_I^{1/2} I}{L^2 g_m^2} \frac{1}{f} = \dots = \frac{K_I^{1/2}}{2\mu} \frac{1}{C_{ox}' \frac{W}{L}} \frac{1}{L^2 f} = K_V^{1/2} \frac{1}{C_{ox}' W L f}$$

è indipendente dal bias:

$$\boxed{S_V(f) = \frac{K_V^{1/2}}{C_{ox}' W L} \frac{1}{f}}$$

$\Rightarrow$  dobbiamo agire sull'area del MOSFET (data una tecnologia scelta!)

per ridurre il rumore  $\frac{1}{f}$  devo aumentare l'area (non dipende da  $I$ !)

dipende dall'area del MOSFET

avevo visto una dipendenza tale nella formula di

Pelgrom con il mismatch  $\Rightarrow$  SONO COLLEGATI!

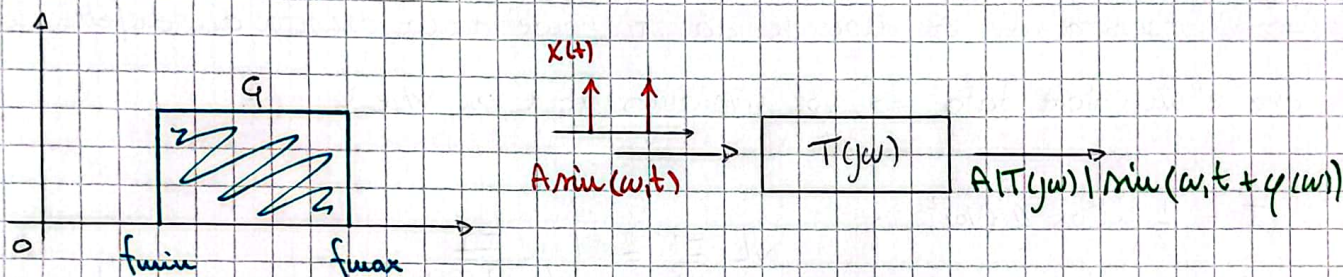
$\Rightarrow$  l'emissione/cattura di carica fanno anche variare la soglia  $V_T$ !  $\hookrightarrow$  vedi dispersione LIB p.7

# FILTRI

I filtri più utilizzati sono filtri:

- tempo continui
- lineari

formati da reti analogiche lineari a parametri costanti che sono in grado di selezionare un segnale con banda compresa fra due limiti



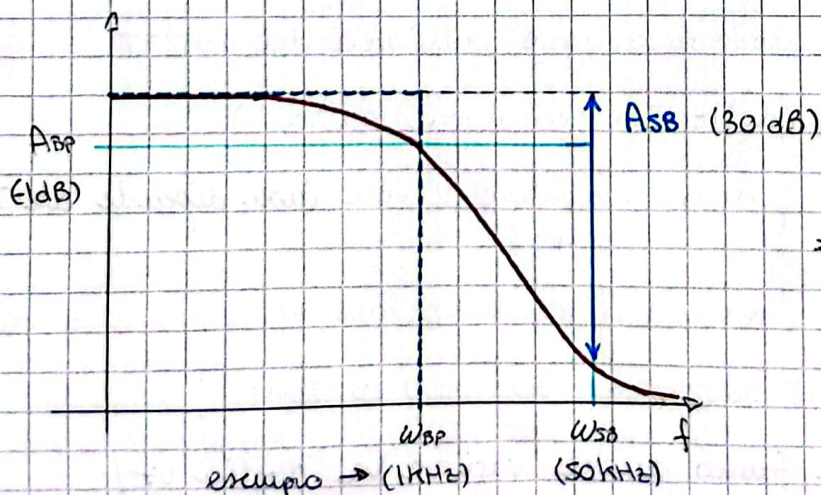
L'output viene presentato con un certo delay  $\tau$ , che deve essere costante per non alterare la forma del segnale:

$\Rightarrow$  un filtro ideale deve avere  $G$  costante in banda e una fase che dipende linearmente da  $\omega$

$$AG \sin[\omega(t - \tau)] \Rightarrow \varphi = \omega\tau$$

$\Rightarrow$  non siamo in grado di costruire un filtro con tali requisiti: per avere una rect devo avere una  $h(t)$  a  $\sin c(t)$   $\Rightarrow$  parte da  $-\infty$  e questo non è possibile: in uscita ho qualcosa ancora prima di avere l'input!

$\Rightarrow$  dobbiamo accettare delle imperfezioni e avere tolleranza



$\Rightarrow$  ho una maschera entro la quale ho un filtro accettabile



⇒ affinché la maschera sia rispettata anche dopo USB allora devo avere

$$\omega_{SB} \leq \omega \leq \omega_0$$

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n} < \frac{1}{A_{SB}^2}$$

posso risolvere le due disequazioni:

$$\left(\frac{\omega_{BP}}{\omega_0}\right)^n \leq \sqrt{A_{BP}^2 - 1}$$

$$\left(\frac{\omega_{SB}}{\omega_0}\right)^n \geq \sqrt{A_{SB}^2 - 1}$$

minore di 1

minore di 1: l'attenuazione in banda al numeratore è minore di quella fuori banda

facciamo il rapporto:

$$\left(\frac{\omega_{BP}}{\omega_{SB}}\right)^n < \frac{\sqrt{A_{BP}^2 - 1}}{\sqrt{A_{SB}^2 - 1}} = \frac{E_{BP}}{E_{SB}} = K_E$$

SELECTIVITY FACTOR  $(K)^n$

ATTENUATION FACTOR

$$n \geq \frac{\log K_E}{\log K} \text{ e' il numero di poli necessari}$$

nel vostro esempio ho che  $K = \frac{\omega_{BP}}{\omega_{SB}} = \frac{f_{BP}}{f_{SB}} = \frac{1}{10} = 0,1$

$$E_{BP} = \sqrt{A_{BP}^2 - 1} = \sqrt{10^2 - 1} = 9,509$$

$$E_{SB} = \sqrt{A_{SB}^2 - 1} = \sqrt{10^{30} - 1} = 31,607$$

$$K_E = \frac{E_{BP}}{E_{SB}} = 0,301$$

$$n \geq \frac{\log K_E}{\log K} = 2,57 \Rightarrow \text{almeno 3 poli}$$

adesso bisogna settare la seconda incognita:  $\omega_0$

$$\frac{\omega_{BP}}{(E_{BP})^{1/n}} \leq \omega_0 \leq \frac{\omega_{SB}}{(E_{SB})^{1/n}}$$

da cui ottengo  $12,5 \text{ kHz} \leq \omega_0 \leq 15,8 \text{ kHz}$

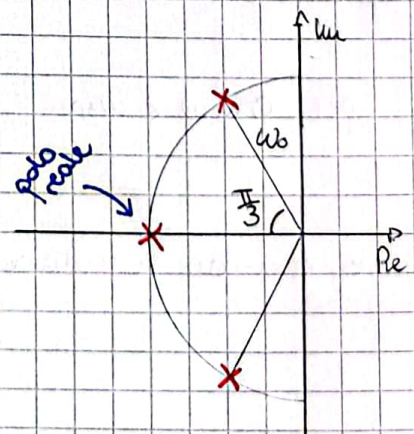
tocca la maschera a  $\omega_{BP}$

la tocca a  $\omega_{SB}$

manca un ultimo passo per trovare

$$T(s) = \frac{1}{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{1}{(s + \omega_0) \left( s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 \right)}$$

polo reale      poli complessi coniugati



$$Q = \frac{|p|}{2\operatorname{Re}(p)}$$

per i poli 2,3 il modulo e'  $\omega_0$

la parte reale e'  $\omega_0 \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\omega_0}{2}$

$$\Rightarrow Q = 1$$

infine il valore DC e'  $T(0) = 1$  (0 dB) da cui ottengo:

$$T(s) = \frac{\omega_0^3}{(s + \omega_0)(s^2 + \omega_0 s + \omega_0^2)}$$

la FdT del filtro Butterworth

nel caso di + poli complessi coniugati, devo calcolare Q per ogni coppia procedendo in maniera analoga

## CHEBYSHEV - I

la trattazione e' simile a quella del Butterworth e non viene svolta, ma e' presente in maniera completa nelle dispense

nel filtro Chebyshev ho che la **reference frequency  $\omega_0$**  e' uguale alla **band-pass frequency**

$$\omega_0 = \omega_{BP}$$

$\Rightarrow$  ho meno gradi di liberta'

però poi ricavarmi il numero dei poli

$$n \geq \frac{\cosh^{-1}(K_e^{-1})}{\cosh^{-1}(k^{-1})}$$

con le nostre specifiche otteniamo  $n \approx 2,1$  e possiamo dedurre che a parita' di specifiche, il numero di poli richiesto dal filtro di Chebyshev e' minore di quello richiesto dal filtro di Butterworth

definiamo poi la variabile  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \left( \frac{1 + \sqrt{\varepsilon_{BP}^2 + 1}}{\varepsilon_{BP}} \right)^{\frac{1}{n}}$$



uso la variabile "intermedia"  $\Gamma$  per trovare parte reale e immaginaria dei poli, con le seguenti relazioni:

$$\text{Re}(p_k) = \sin\left[\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma^2 - 1}{2\Gamma}$$

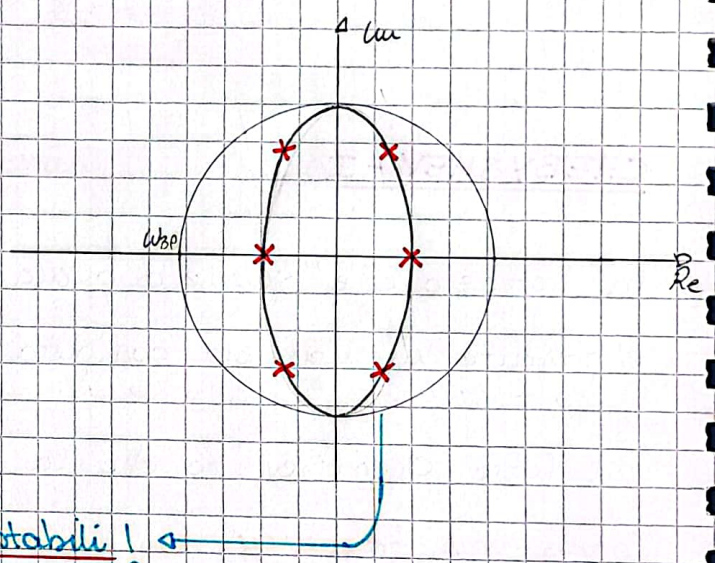
$$\text{Im}(p_k) = \cos\left[\frac{\pi}{2n}(2k-1)\right] \cdot \frac{\Gamma^2 + 1}{2\Gamma}$$

dove l'indice  $k$  varia fra  $k = \cancel{0}, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n$  <sup>oppure</sup>  $(1, 2, \dots, 2n)$

nel nostro esempio  $\Gamma = 1,609$  e abbiamo

k	Re(p)	Im(p)
1	-0,247	0,966
2	-0,494	0
3	-0,247	-0,966
4	0,247	-0,966
5	0,494	0
6	0,247	0,966

polo reale



↳ poli a parte  $\text{Re} > 0$  non stabili! ←

k	p	Q
1, 3	0,997	2,01
2	0,494	0,5

### ATTENZIONE !

I poli che abbiamo generato sono riferiti alla frequenza  $1 \text{ rad/s}$  (sono normalizzati). Se vogliamo avere una  $f_{BP} = 1 \text{ kHz}$  ad esempio, devo moltiplicare i poli per  $2\pi \cdot 1 \text{ kHz}$

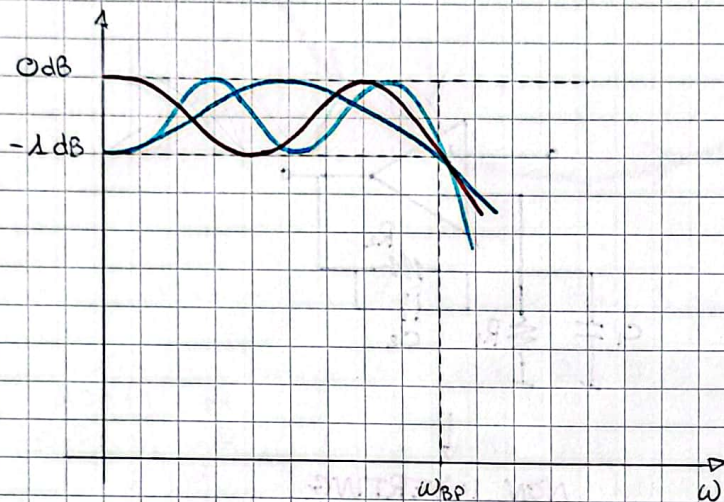
# 1,3:  $|p| = 0,997 \rightarrow \omega_{\#1,3} = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 0,997$

# 2:  $|p| = 0,494 \rightarrow \omega_{\#2} = 2\pi \cdot 1 \text{ kHz} \cdot 0,494$

anche in questo filtro posso ricavare la Fdt, formata da un polo reale e una coppia complessa coniugata (nel nostro caso), allora:

$$T(s) = \frac{\overset{? \text{ VALORE IN DC}}{1}}{(s + \omega_{p2}) (s^2 + \frac{\omega_{n1,3}}{Q} s + \omega_{n1,3}^2)}$$

rimane da calcolare il valore DC e per farlo dobbiamo fare un'osservazione



$$\begin{aligned} n &= 2 \\ n &= 3 \\ n &= 4 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il ripple ho un numero di transizioni (compresa l'ultima) pari al numero di poli e quindi:

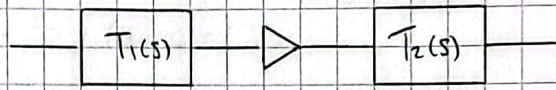
- per un numero di poli **dispari** parto dall'alto  $\Rightarrow T(0) = 1$
- per un numero di poli **pari** parto dal basso  $\Rightarrow T(0) = \frac{1}{A_{BP}}$

dove  $A_{BP} = \sqrt{\epsilon_{BP}^2 + 1}$

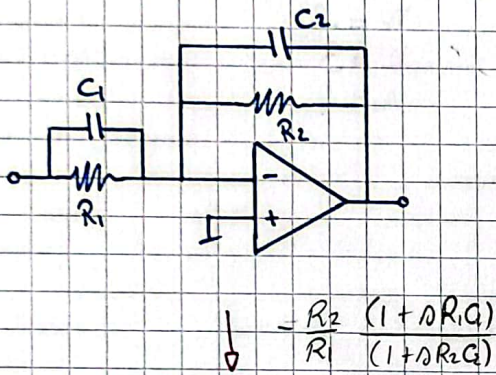
da cui ricavo la Fdt finale:  $T(s) = \frac{\omega_{n2} \omega_{n1,3}^2}{(s + \omega_{p2}) (s^2 + \frac{\omega_{n1,3}}{Q} s + \omega_{n1,3}^2)}$

Visto che posso inserire dei buffer tra vari blocchi, che mi forniscono  $\infty$  impedenza in uscita, ho che vale

$$T(s) = T_1(s) T_2(s) \dots$$

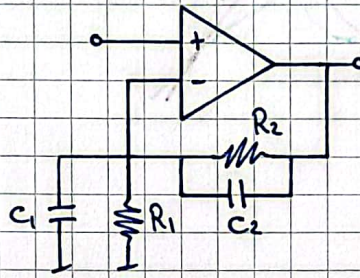


e quindi posso implementare una  $T(s)$  con più poli tramite più reti con singolo polo:



$$\downarrow \quad -\frac{R_2}{R_1} \frac{(1+sR_1C_1)}{(1+sR_2C_2)}$$

INVERTING



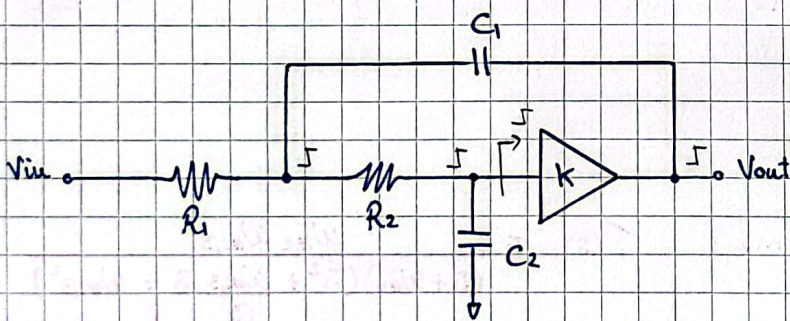
$$\downarrow \quad \frac{R_2}{R_1} \frac{1+sR_1C_1}{1+sR_2C_2} \quad ?$$

NON INVERTING

→ ho molte opzioni che posso usare; tra queste la più interessante è il

**FILTRO SALEN-KEY**

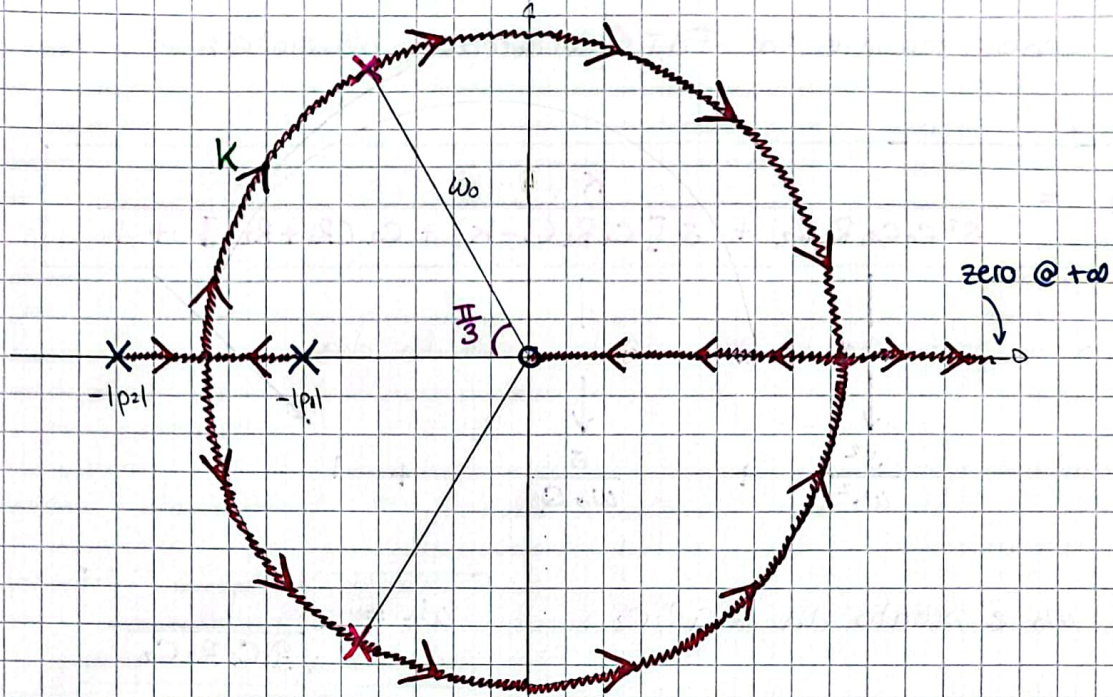
detto anche **SK-cell**



dove  $k = 1 + \frac{R_3}{R_4}$  è un amplificatore non invertente (quello sopra con  $C_1 = C_2 = 0$ )

calcoliamo il  $G_{loop}$  tagliando tra  $C_2$  e  $k$

- facendo un probe vedo che è positivo:  $G_{loop}(0) > 0$
- $C_1$  è uno zero @ DC perché non lascia passare il segnale
- $C_1$  e  $C_2$  introducono due poli reali



se devo sintetizzare un Butterworth con 3 poli mi basta settare il raggio pari a  $\omega_0$  settando adeguatamente  $R_1, C_1, R_2, C_2$ , mi basta poi variare  $k$  per spostarmi lungo il luogo delle radici

$\Rightarrow$  in questo caso ho  $\omega_0$  e  $Q$  che sono indipendenti: cosa molto buona e comoda

Deriviamo ora la FdT: nelle dispense c'è un altro metodo possibile rispetto a quello che vedremo qui

$$T(s) = \frac{a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1} \quad \rightarrow \text{ho solo uno zero di } G \text{ --- forse}$$

$$a_1 = R_1^{(0)} C_1 = 0 \quad \Rightarrow \text{non ho zero}$$

$$R_1^{(0)} = R_1 (1 - k)$$

$$R_2^{(0)} = R_1 + R_2$$

$$R_1^{(2)} = R_1 // R_2$$

$$\Rightarrow s^2 C_2 C_1 R_2^{(0)} R_1^{(2)} = s^2 C_2 C_1 (\cancel{R_1 + R_2}) \frac{R_1 R_2}{\cancel{R_1 + R_2}} = s^2 C_2 C_1 R_2 R_1$$

$$T(0) = k \quad (\text{in DC ho } C_1 \text{ e } C_2 \text{ open e non scorre corrente})$$

quindi posso scrivere la FdT del circuito generale:

$$T(s) = \frac{K}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s [C_1 R_1 (1-k) + C_2 (R_1 + R_2)] + 1}$$

calcoliamo i parametri fondamentali sapendo che

$$\frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1$$

e infatti  $\omega_0$  e' settato da  $R_1 R_2 C_1 C_2$ :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}}$$

e poi ricavo anche il fattore di qualita'

$$Q = \frac{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}{C_1 R_1 (1-k) + C_2 (R_1 + R_2)}$$

che e' indipendente da  $\omega_0$  visto che posso variarlo, variando  $k$

=> ho un grado di liberta' in piu' che mi fa comodo

in aggiunta, posso dire che la  $\omega_0$  non e' semplice settarla esattamente e puo' essere utile avere ulteriori circuiti che settano e modificano i parametri tale da avere  $\omega_0$  sempre corretta. Questo non e' vero per  $Q$ , che invece e' un numero (non si vede dall'equazione sopra e sembra l'opposto)

> divido sopra e sotto per  $C_2 R_2$

$$Q = \frac{\sqrt{\frac{R_1 C_1}{R_2 C_2}}}{\frac{C_1 R_1}{C_2 R_2} (1-k) + (1 + \frac{R_1}{R_2})}$$

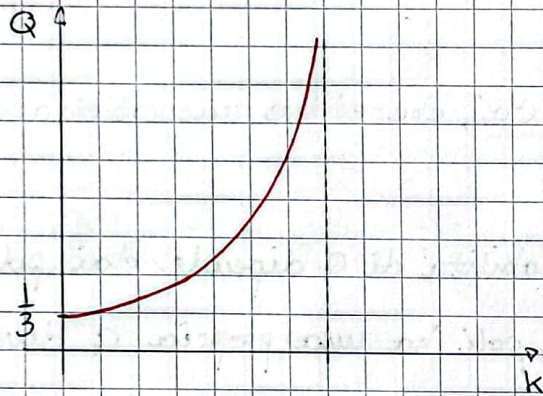
↳  $Q$  dipende dal rapporto non dal valore assoluto

se abbiamo  $R_1 = R_2 = R$  e  $C_1 = C_2 = C$  ho

$$T(s) = \frac{1}{s^2(RC)^2 + s[3-k]RC + 1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \text{e} \quad Q = \frac{1}{3-k}$$

la dipendenza di  $Q$  da  $k$  non è lineare: se  $k$  è largo allora  $Q$  varia molto anche per piccole variazioni di  $k$



$$\frac{dQ}{dk} = \frac{-1}{(3-k)^2}$$



$$dQ = \frac{dk}{k} \frac{-k}{(3-k)^2}$$

con una  $\frac{dk}{k} \approx 0,2\%$  se  $k \rightarrow 3$

$dQ$  è un numero grande

⇒ il Sallen-Key con uguali componenti va bene per medi  $Q$  di massimo 1, o 1,5 ... altrimenti devo cambiare approccio

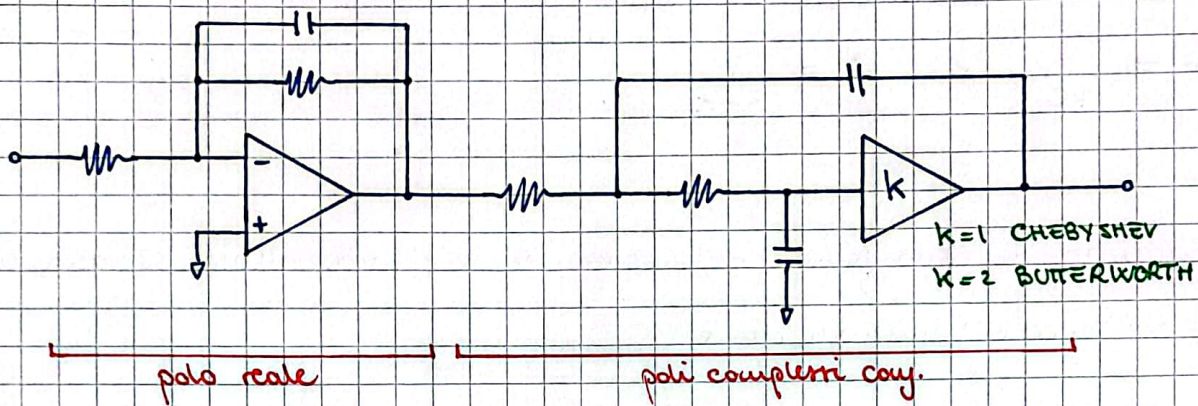
ad esempio posso usare  $\begin{cases} R_1 = R_2 = R \\ C_1 = nC_2 \rightarrow \text{scaled capacitors} \\ K = 1 \text{ (BUFFER)} \end{cases}$

in questo caso ottengo  $\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{n}}$  e  $Q = \frac{\sqrt{n}}{2}$

⇒ in questo caso la dipendenza di  $Q$  da  $n$  è sotto radice → è + blanda

il filtro finale è formato da un primo stage che implementa il polo reale e da una seconda sk-cell che implementa i restanti due poli che possono essere messi in cascata grazie ai buffer → tale configurazione viene detta ACTIVE CELL

# ACTIVE CELL



Qual è il problema? È la variabilità, che è però un problema generale e non specifico di questa cella.

Un problema particolare è che la variabilità di  $Q$  dipende dai poli, che sono indipendenti e quindi ogni coppia di poli ha una propria  $Q$  diversa che varia indipendentemente dalle altre...

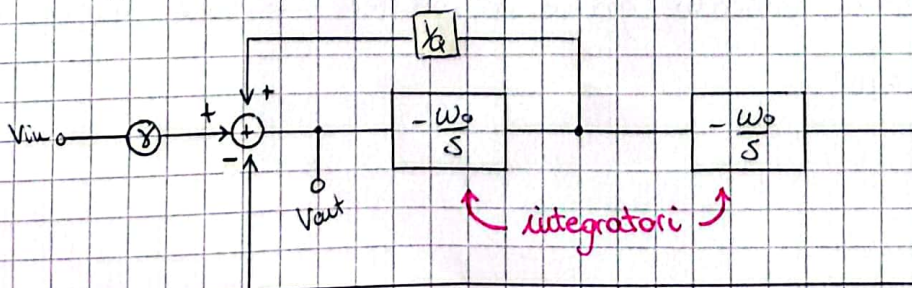
fino a 5 poli ok, dopo di che non riesco più a garantire le specifiche

Partiamo ora da FdT di un pama alto:

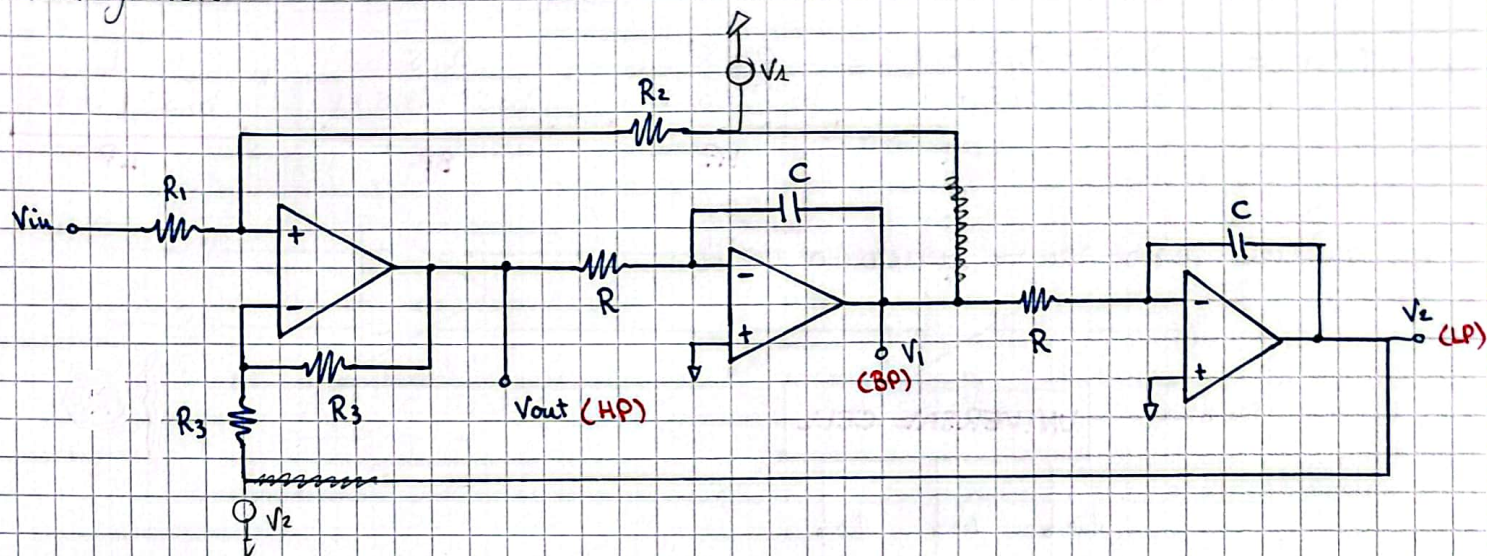
$$T(s) = \frac{\gamma s^2}{s^2 + s \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2} = \frac{\gamma}{1 + \frac{\omega_0}{sQ} + \frac{\omega_0^2}{s^2}} = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

$$\Rightarrow V_{out} = \gamma V_{in} - V_{out} \frac{\omega_0}{sQ} - V_{out} \frac{\omega_0^2}{s^2}$$

che posso rappresentare semplicemente



che posso sintetizzare con un unico sommatore con opportuni pesi e due integratori



calcoliamo  $V_{out}$  come somma di 3 contributi

$$V_{out} = V_{in} \underbrace{\frac{2R_2}{R_2 + R_1}}_{\gamma} + V_1 \underbrace{\frac{2R_1}{R_1 + R_2}}_{1/Q} - V_2$$

$\downarrow$   $V_1$  e  $V_2$  spenti       $\downarrow$   $V_{in}$  e  $V_2$  spenti       $\downarrow$   $V_1$  e  $V_{in}$  spenti

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \frac{2R_2}{R_1 + R_2} = \frac{2}{1 + R_1/R_2} \\ Q &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned} \right.$$

In questo approccio ho sintetizzato la FdT a partire da integratori senza dividerla in blocchi:

- 2 integratori per II ordine
- 3 per il III ordine ...

@  $V_{out}$  abbiamo un HP FILTER, se poi lo integro ottengo @  $V_1$  un BP che a sua volta integro e diventa un @  $V_2$  LP; posso dimostrarlo anche matematicamente:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{s^2}{\omega_0^2} + \frac{s}{\omega_0 Q} + 1$$

HP  
BP  
LP

⇒ per questo tale cella è detta

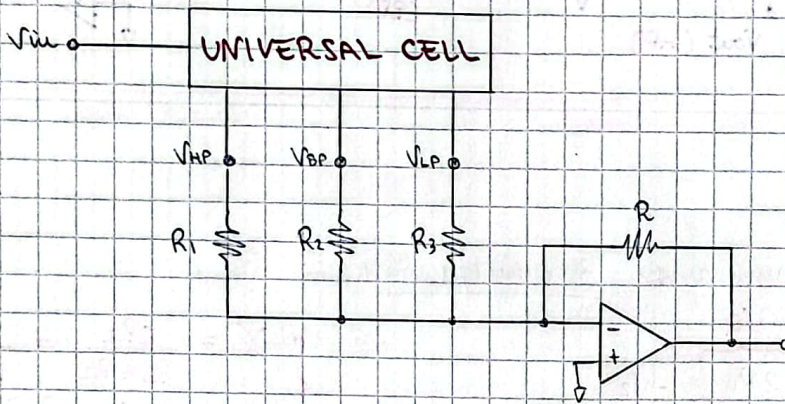
UNIVERSAL CELL



posso sempre dividere la FdT come segue:

$$T(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + 1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1} = \underbrace{\frac{a_2 s^2}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}}_{\text{HP}} + \underbrace{\frac{a_1 s}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}}_{\text{BP}} + \underbrace{\frac{1}{b_2 s^2 + b_1 s + 1}}_{\text{LP}}$$

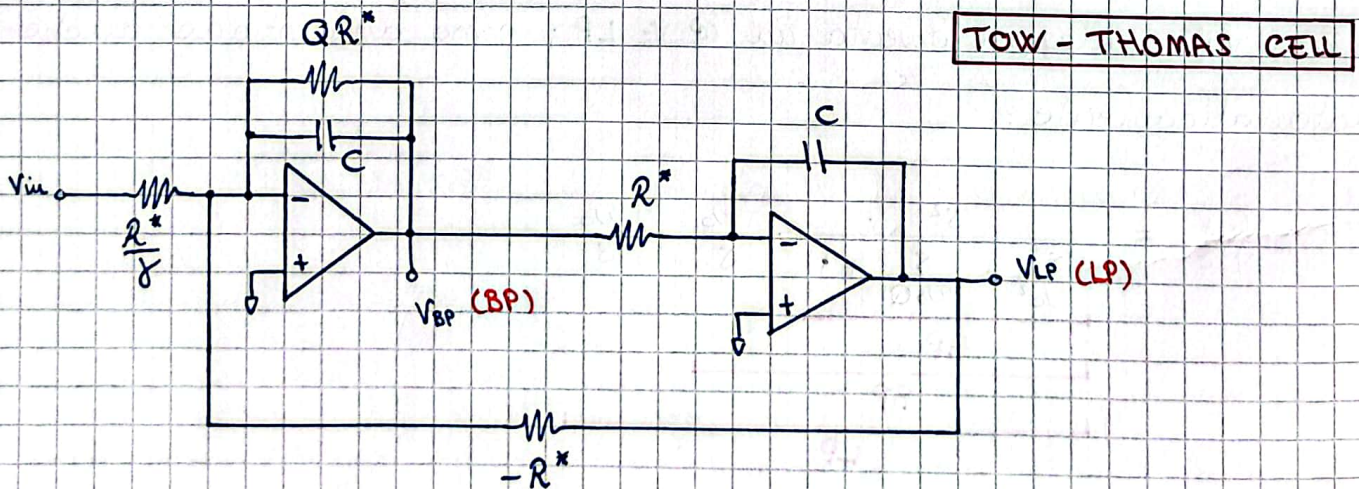
e quindi posso sempre generarla come:



Vediamo di fare la stessa cosa per ottenere una somma in correnti che ci permette di evitare di utilizzare l'ultimo amplificatore:

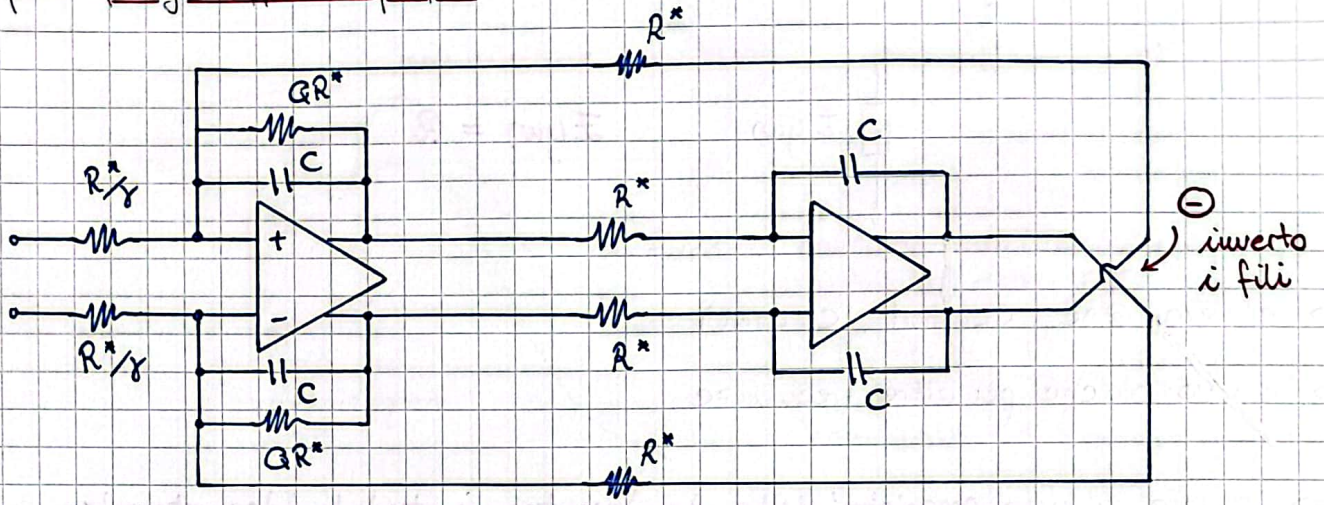
> essenzialmente al nodo  $\rightarrow \oplus$  devo avere delle correnti e quindi divido le tensioni per una resistenza  $R^*$

> posso implementare il circuito come segue:



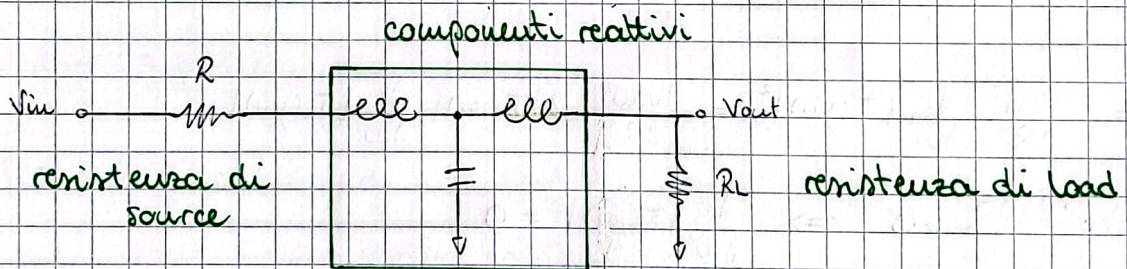
$\rightarrow$  usiamo meno amplificatori, ma perdiamo l'HP

nelle implementazioni reali non usiamo mai differential amplifier, ma sempre fully-diff. amplifier:



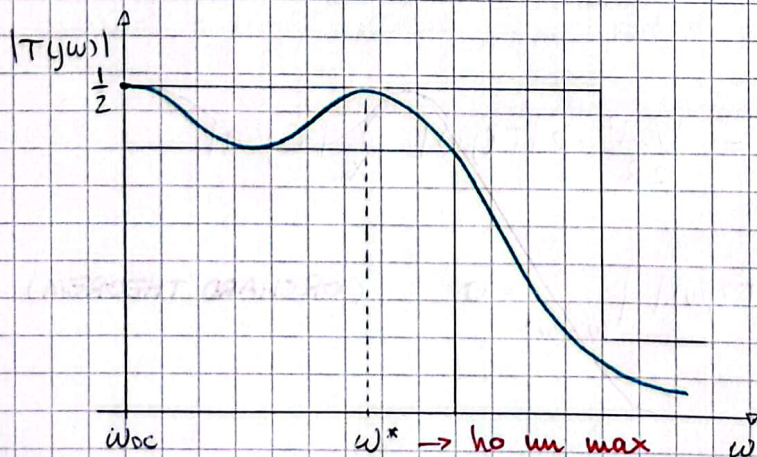
### LADDER NETWORK

C'è un modo per diminuire/cancellare la variabilità delle reti precedenti? Sì c'è e una tipologia di queste nuove reti è detta **ladder network**, formata solo da **componenti passivi**

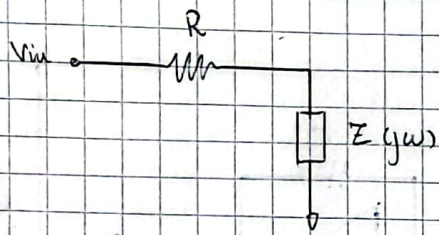


se  $R_L = R$  la rete viene detta **DOUBLY TERMINATED NETWORK**

supponiamo di implementare un Chebyshev - I



ho i **massimi**,  $\omega^*$  quando vedo un'impedenza  $|$



$$Z(j\omega) = R$$

> e' vero @ DC (L: short, C: open)

> e' vero anche per altre frequenze

=> questa e' una proprieta' delle doubly-terminated ladder networks

ovviamente ho che  $\frac{d}{d\omega} |T(j\omega)| \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$  (e' un massimo)

in questo caso la **potenza trasmessa al carico e' massima (matching)**

$$P_L = \frac{|V_{out}|^2}{2R} \quad \text{e' la potenza trasmessa al carico in regime armonico}$$
$$= \frac{|V_{in}|^2 |T(j\omega)|^2}{2R}$$

$$\frac{\partial P_L}{\partial \omega} = \frac{|V_{in}|^2}{2R} \frac{\partial}{\partial \omega} |T(j\omega)|^2 = \frac{|V_{in}|^2}{2R} \cdot 2|T(j\omega)| \frac{\partial}{\partial \omega} |T(j\omega)|$$

$$\text{affinche' } \frac{\partial P_L}{\partial \omega} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \omega} |T(j\omega)| = 0$$

ma  $T(j\omega)$  e' funzione anche di  $L_1, L_2, C \Rightarrow T(j\omega, X)$

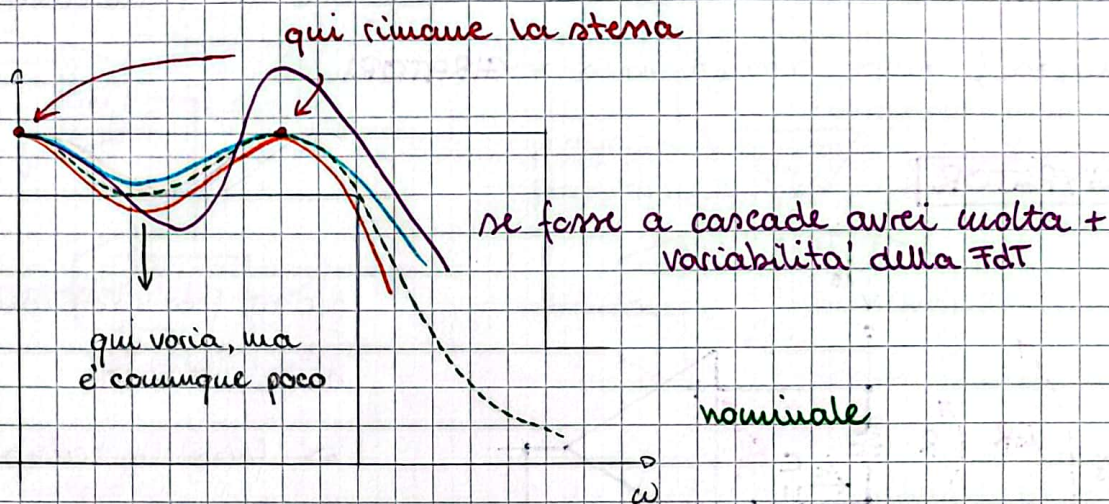
e quindi affinche'  $P_L$  sia max, non solo la  $\frac{\partial}{\partial \omega}$  deve essere 0, ma quella rispetto ad ogni variabile

⇓

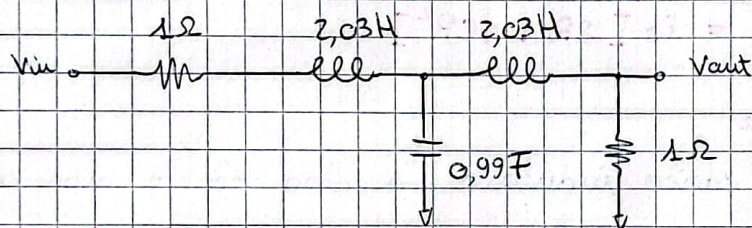
$$\frac{\partial P_L}{\partial X} = 0 = \frac{|V_{in}|^2}{2R} \cdot 2|T(j\omega)| \frac{\partial}{\partial X} |T(j\omega)|$$

=> quindi anche la  $\frac{\partial}{\partial X} |T(j\omega)| \Big|_{\omega=\omega^*} = 0$  (ORCHARD THEOREM)

Quindi @  $\omega^*$ , anche se abbiamo variabilità di condensatori e induttori, non abbiamo variazioni della FdT



alla dispenza c'e' una tabella in cui ci sono vari esempi di reti ladder per implementare i vari filtri; ad esempio, per un Chebyshev ho:



posso notare 3 problemi:

1) filtro passivo; inoltre non pseudocampificatori i circuiti in input/output fanno variare la FdT

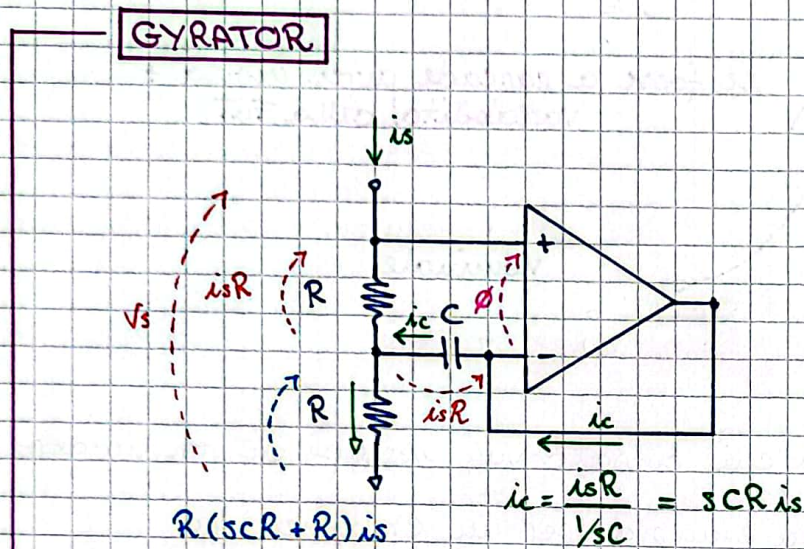
=> posso comunque usare un **buffer x il decoupling**

2) induttori; non posso integrarli e sono scomodi

3) valori strani:  $1F!$   $2H$  -> troppo grandi: questo perche tali valori sono riferiti a  $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$  e quindi devo denormalizzarli e trovare un modo per **non avere induttori**

# 1) SOSTITUISCO GLI INDUTTORI

devo sostituire gli induttori con circuiti che mi forniscano la stessa impedenza; questi circuiti sono i **GIRATORI**



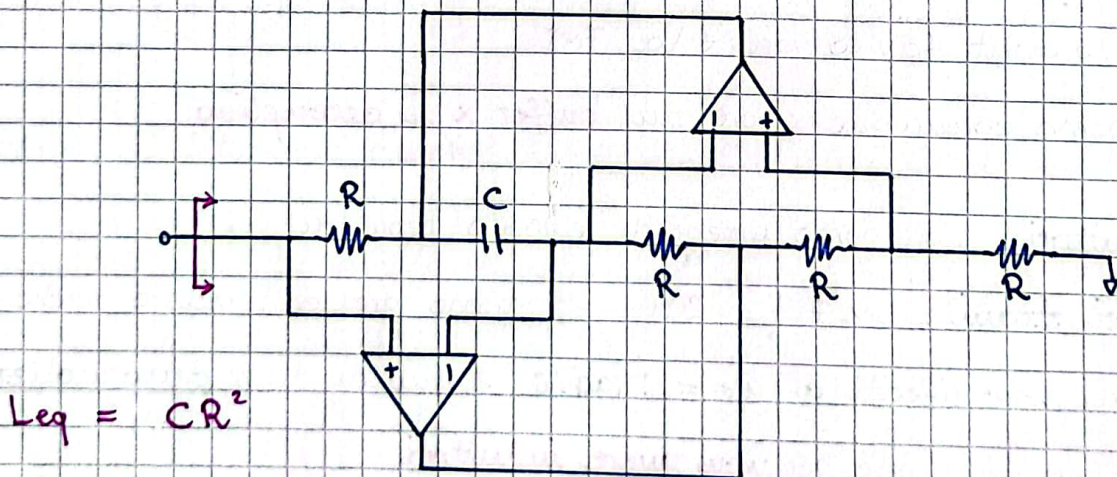
per un feed-back ideale tendo ad avere  $v^+ \approx v^-$   
 $\Rightarrow$  forza la tensione ai capi di C ad essere  $isR$

$$v_s = R(sCR + R)is + isR = is [2R + sCR^2]$$

$$Z = \frac{v_s}{is} = 2R + \frac{sCR^2}{1}$$

$\hookrightarrow$  carico induttivo  $\rightarrow$  posso ottenere valori anche alti

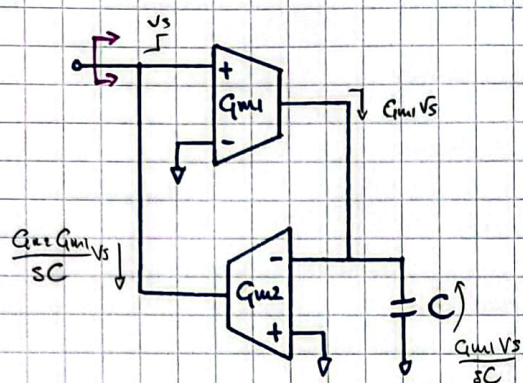
se esistono anche di altri tipi, per generare induttori puri e fra due nodi e uno di questi e' detto ANTONIQU'S GYRATOR



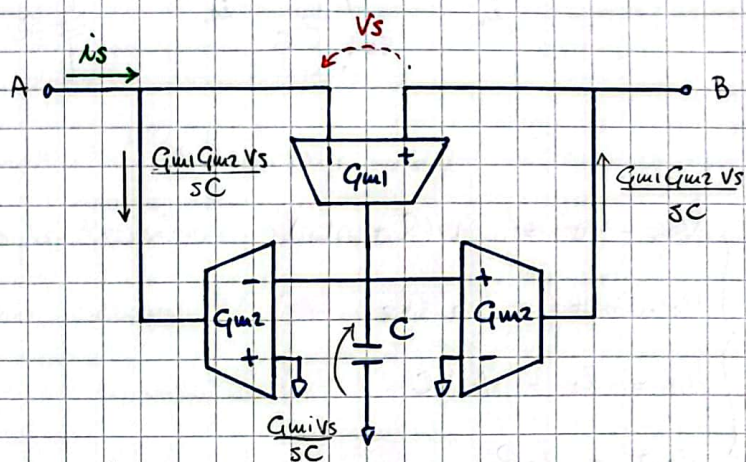
$$Leq = CR^2$$

$\downarrow$   
 puro carico induttivo

posso anche farlo tramite degli OTA, sotto la condizione che  $GBWP \gg \omega_{BP}$



$$L_{eq} = \frac{C}{G_{m1}G_{m2}}$$



↳ in questo caso l'induttanza e' tra A e B

### problemi:

**NOISE:** un induttore ideale e' senza rumore (la resistenza e' trascurabile), mentre in questo caso ho del rumore introdotto dagli OTA

**MATCHING:** ad esempio  $G_{m2}$  non e' detto che sia uguale in entrambi...

C'e' un altro modo per implementare la stessa FdT senza usare gli induttori?

A me interessa la proprieta' della FdT e non della rete in  $\mathcal{N}'$ , quindi posso cercare altre implementazioni

> per farlo, prima devo derivare le relazioni fra le variabili principali (variabili di stato) che sono quelle che indicano l'energia:

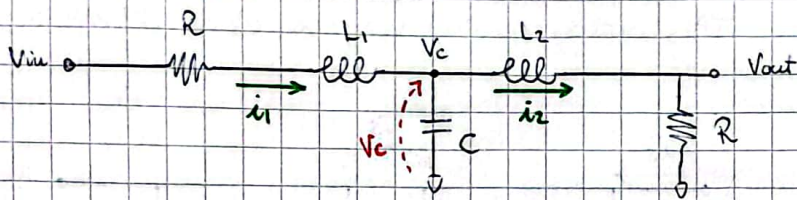
esse sono  $i_1$ : corrente su  $L_1$

$i_2$ : corrente su  $L_2$

$v_c$ : tensione ai capi di C

⇒ 3 variabili

⇒ rete III ordine



$$\begin{cases} V_{in} - V_c = i_1 (R + \Delta L_1) \\ V_c - V_{out} = i_2 \Delta L_2 \\ i_1 = i_2 + V_c \Delta C \\ V_{out} = i_2 R \end{cases}$$

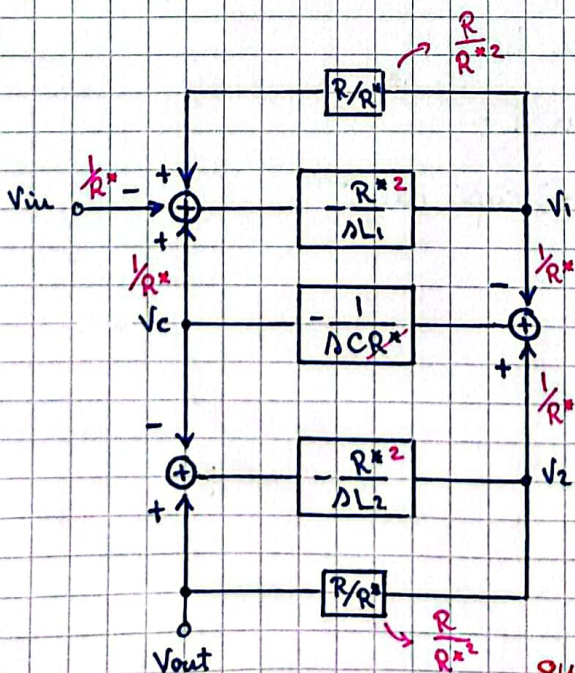
poniamo porre  $i_1 = \frac{V_1}{R^*}$   $i_2 = \frac{V_2}{R^*}$   
e sostituire nel sistema:

$V_1$  e  $V_2$  sono tensioni ausiliarie e non compaiono da nessuna parte nel circuito (non c'entrano con  $L_{1,2}$ )

$$\begin{cases} V_{in} - V_c = \frac{V_1}{R^*} (R + \Delta L_1) \longrightarrow V_1 = \frac{R^*}{\Delta L_1} (V_{in} - V_c - \frac{V_1}{R^*} R) \\ V_c - V_{out} = \frac{V_2}{R^*} \Delta L_2 \longrightarrow V_2 = \frac{R^*}{\Delta L_2} (V_c - V_{out}) \\ \frac{V_1}{R^*} = \frac{V_2}{R^*} + V_c \Delta C \longrightarrow V_c = \frac{1}{\Delta C R^*} (V_1 - V_2) \\ V_{out} = \frac{V_2}{R^*} R \longrightarrow V_2 = \frac{R}{R^*} V_{out} \end{cases}$$

=> proviamo a implementare il nuovo set di equazioni (che fanno riferimento sempre alla stessa FdT) tramite integratori:  $-\frac{\omega_0}{s}$   
Per avere il segno  $\ominus$  inverto i segni nelle parentesi...

block diagram della rete:



non ho più induttori,  
ma ho solo integratori  
e nodi sommatori;  
la rete è attiva!

la FdT è la stessa!

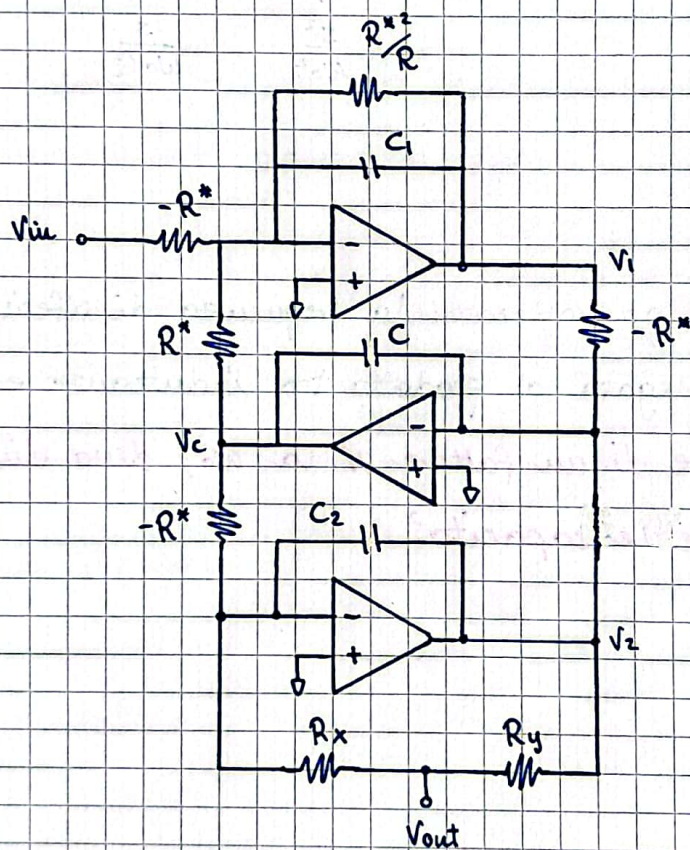
è trascurabile la variazione rispetto agli integratori, ma non quella tra il mismatch dei resistori...

Ho anche dei problemi nuovi:

> primo fra tutti e' che ho **6 AMPLIFICATORI**

↓  
dobbiamo ridurre sommando le  
correnti anziche' le tensioni, come abbiamo fatto gia'  
... divido le tensioni per una resistenza generica:  
ad esempio, scelgo  $R^*$  (🌀): unicamente gli integratori  
devono generare una tensione e quindi rimoltiplico per  $R^*$

il circuito che ottengo e' il seguente, composto solo da 3 amplificatori



$$C_1 = \frac{L_1}{R^{*2}}$$

$$C_2 = \frac{L_1}{R^{*2}}$$

$$\begin{cases} R_x + R_y = \frac{R_x^2}{R} \\ \frac{R_x}{R_x + R_y} = \frac{R}{R^*} \end{cases}$$

Lo ricavo dalle equazioni precedenti e ottengo:

$$\rightarrow R_x = R^* \quad R_y = \frac{R^{*2}}{R} - R^*$$

Come visto precedentemente la rete va denormalizzata e va fatto il sizing dei componenti

$$L_{10} = L_{20} = 2,03 \text{ H}$$

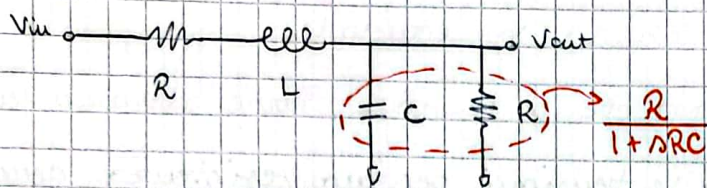
$$C_0 = 0,994 \text{ F}$$

$$\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \underbrace{2\pi \cdot 100 \text{ kHz}}_N$$



Per ricavare le relazioni facciamo un esempio con una rete più semplice del II ordine; più facile svolgere i calcoli... la procedura è la stessa



$$V_{out} = V_{in} \frac{\frac{R}{1+sRC}}{R + sL + \frac{R}{1+sRC}} = \frac{R V_{in}}{R + sRC^2 + sL + sLRC + R}$$

$$T(s) = \frac{R'}{s^2 \frac{LCR'}{2} + \frac{s}{2} [CR + \frac{L}{R}] R' + \frac{2R}{1} \frac{1}{2R'}} = \frac{\frac{1}{2}}{s^2 \underbrace{\frac{LC}{2}}_{\frac{s^2}{\omega_0^2}} + \frac{s}{2} \underbrace{[CR + \frac{L}{R}]}_{\frac{s}{\omega_0 Q}} + 1}$$

$$\Rightarrow \omega_0^2 = \frac{2}{LC}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{2}{\omega_0 [CR + \frac{L}{R}]}$$

questo risultato può essere generalizzato: la frequenza di riferimento in una ladder network è sempre legata al prodotto tra induttanze e capacità e quindi se voglio aumentare di un fattore  $N$  la  $\omega_0$ , devo dividere di un fattore  $N$  le induttanze e le capacità

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{N} L_0 \\ C_n &= \frac{1}{N} C_0 \\ \omega_n &= N \omega_0 \end{aligned}$$

poi voglio scalare anche le resistenze, che non influenzano  $\omega$ : per non alterare il Quality factor  $Q$ :

$$\begin{aligned} R_m &= M R_0 \\ C_m &= \frac{C_n}{M} \\ L_m &= L_n M \end{aligned}$$

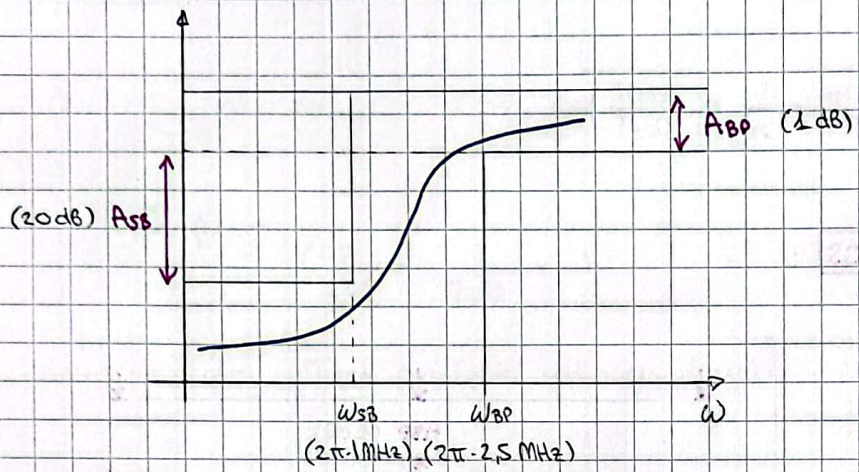
minore è  $\omega$ , minore è  $N$  e maggiore è la capacità: per scalarla devo aumentare  $R^*$

→ il rumore aumenta e quindi non uso + omic resistors, ma implemento i resistori tramite SWITCHED CAPACITORS

inoltre  $R^*$  è un grado di libertà in più che posso avere per ridurre ancora le capacità richieste, affinché queste siano integrabili correttamente

# HP e BP FILTERS

consideriamo una FdT **HIGH-PASS**:



cerchiamo una trasformazione che trasformi un HP in un LP: questa trasformazione è una funzione

$$\omega \rightarrow \Omega$$

$$s \rightarrow p$$

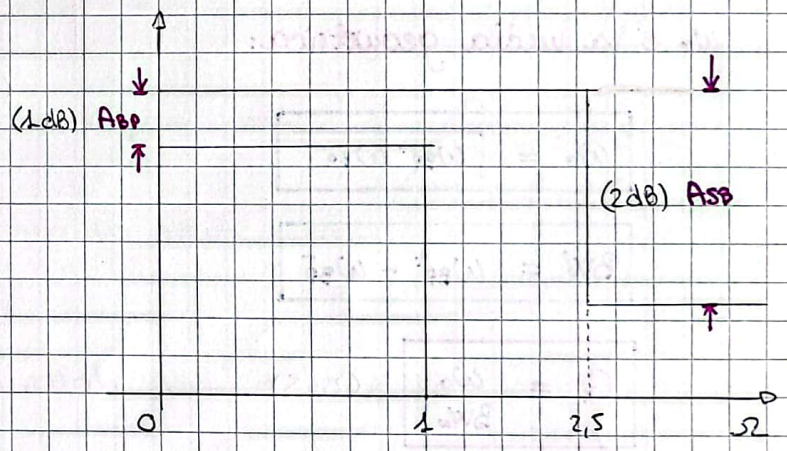
quello che abbiamo a  $+\infty$  lo devo portare a 0 e quello a 0 a  $+\infty$ :  $p \sim \frac{1}{s}$   
devo anche normalizzare rispetto a  $\omega_{BP}$ :

$$p = \frac{\omega_{BP}}{s}$$

$$j\Omega = \frac{j\omega_{BP}}{j\omega} \rightarrow \Omega = \frac{\omega_{BP}}{\omega}$$

per noi è trans.

$$T(p) = T\left(\frac{\omega_{BP}}{s}\right)$$



procedo analogamente a quanto già fatto:

$$k = \frac{\omega_{BP}}{\omega_{SB}} = \frac{1}{2,5} = 0,4$$

$$\epsilon_{BP} = \sqrt{10^{10} - 1} = 0,509$$

$$\epsilon_{SB} = \sqrt{10^{20} - 1} = 9,94$$

$$k_{\epsilon} = \frac{\epsilon_{BP}}{\epsilon_{SB}} = 0,051$$

$$\left. \begin{array}{l} n \gg \frac{\ln k_{\epsilon}}{\ln k} = 3,24 \rightarrow (4) \\ n \gg \frac{\cosh^{-1} k_{\epsilon}^{-1}}{\cosh^{-1} k^{-1}} = 2,33 \rightarrow (3) \end{array} \right\}$$

$$T = \left( \frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon_{BP}^2}}{\epsilon_{BP}} \right)^{\frac{1}{3}} = 1,610$$

	k	Re(p)	Im(p)	Q	p
reale:	1	-0,494	0	0,5	0,494
comp:	2	-0,247	±0,966	2,018	0,997

$$\Rightarrow T(p) = \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{\underbrace{(p + \Omega_1)}_{\text{reale}} \underbrace{(p^2 + p \frac{\Omega_2}{Q_2} + \Omega_2^2)}_{\text{comp. conj.}}}$$

adesso toro indietro e recuper  $T(s)$ :

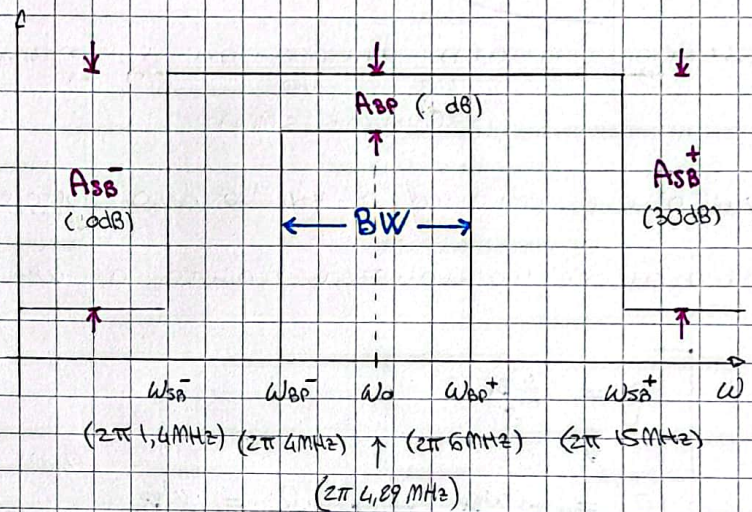
$$T(s) = T(p = \frac{\omega}{s}) = \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{(\frac{\omega_{BP}}{s} + \Omega_1) (\frac{\omega_{BP}^2}{s^2} + \frac{\omega_{BP}}{s} \frac{\Omega_2}{Q_2} + \Omega_2^2)}$$

$$= \frac{\Omega_1 \Omega_2^2}{s^3 (s + \frac{\omega_{BP}}{\Omega_1}) (s^2 + s \frac{\omega_{BP}}{\Omega_2} \frac{1}{Q_2} + \frac{\omega_{BP}^2}{\Omega_2^2})}$$

analogo faccio per un **BAND-PASS**:

$$p = Q \frac{s^2 + \omega_0^2}{s \omega_0}$$

$$\Omega = Q \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega \omega_0}$$



$\omega_0$  e' la media geometrica:

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{BP+} \omega_{BP-}}$$

$$BW = \omega_{BP+} - \omega_{BP-}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{BW_0} \quad (2,45)$$

e lo esprimo come 2 filtri LP; nel nostro caso ho

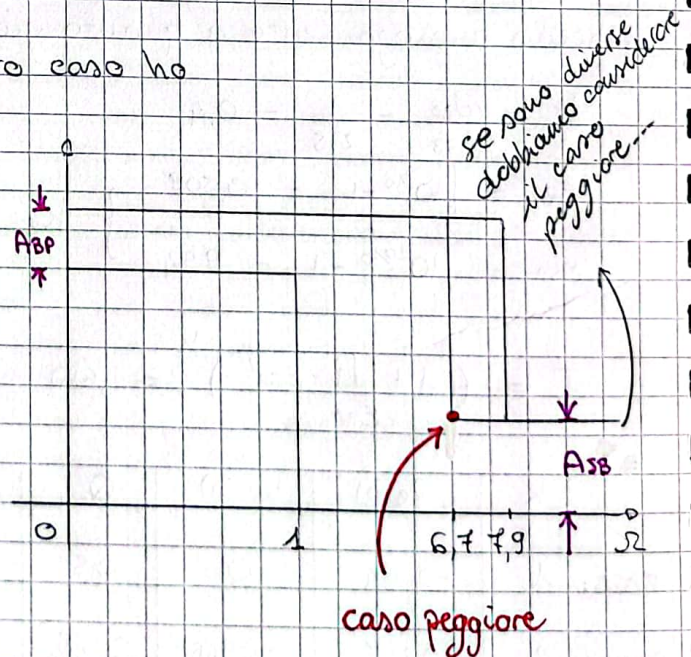
$$\omega_0 = 2\pi \cdot 4,89 \text{ MHz} \longrightarrow \Omega = 0$$

$$\omega_{BP+} = 2\pi \cdot 6 \text{ MHz} \longrightarrow \Omega = 1$$

$$\omega_{BP-} = 2\pi \cdot 4 \text{ MHz} \longrightarrow \Omega = -1$$

$$\omega_{SB+} = 2\pi \cdot 15 \text{ MHz} \longrightarrow \Omega = 6,7$$

$$\omega_{SB-} = 2\pi \cdot 1,4 \text{ MHz} \longrightarrow \Omega = -7,9$$



$$\Rightarrow k = \frac{1}{6,7} = 0,149$$

posso calcolare

$$k = \frac{1}{8,7} = 0,149$$

$$E_{BP} = \sqrt{10^{3/10} - 1} = 0,999$$

$$E_{SB} = \sqrt{10^{30/10} - 1} = 31,51$$

$$k_E = \frac{E_{BP}}{E_{SB}} = 0,032$$

$$\left. \begin{array}{l} n \gg \frac{\ln k_E}{\ln k} = 1,81 \rightarrow \textcircled{2} \\ n \gg \frac{\cosh^{-1} k_E^{-1}}{\cosh^{-1} k^{-1}} = \dots \end{array} \right\}$$

ho due soli poli complessi coniugati  $\Rightarrow$  l'angolo e'  $\frac{\pi}{4}$  e ho  $\text{Re}\{p\} = \text{Im}\{p\} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

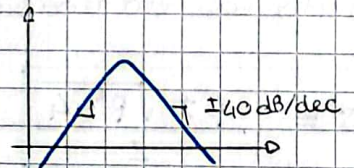
$$T(p) = \frac{1}{\left(\frac{p^2}{\Omega_0^2} + \frac{p}{\Omega_0 Q} + 1\right)} = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2} p + 1}$$

ricavare ora  $T(s)$  non e' affatto facile:

$$T(s) = T(p = \frac{Q(s^2 + \omega_0^2)}{s\omega_0}) = \frac{1}{\frac{Q^2(s^2 + \omega_0^2)^2}{s^2\omega_0^2} + \sqrt{2} \frac{Q(s^2 + \omega_0^2)}{s\omega_0} + 1}$$

$$= \frac{s^2}{\frac{Q^2}{\omega_0^2}(s^2 + \omega_0^2)^2 + \sqrt{2} \frac{Q}{\omega_0}(s^2 + \omega_0^2) + 1}$$

la forma e' corretta: 2 zeri @ 0c e 4 poli  $\Rightarrow$



e' difficile ricavare la forma che siamo soliti usare:

$$b_4 s^4 + b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + 1$$

e posso sfruttare una funzione Matlab (vedi slides e dispense)  $lp2bp(\cdot)$ :

$$lp2bp(lp\_n\_num, lp\_n\_den, \omega_0, BW_{bp})$$

$\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$                        $\uparrow$   
 $[0, 0, 1]$                $[1, \sqrt{2}, 1]$                $2\pi \cdot 4,89 \text{ MHz}$                $2\pi \cdot 2 \text{ MHz}$

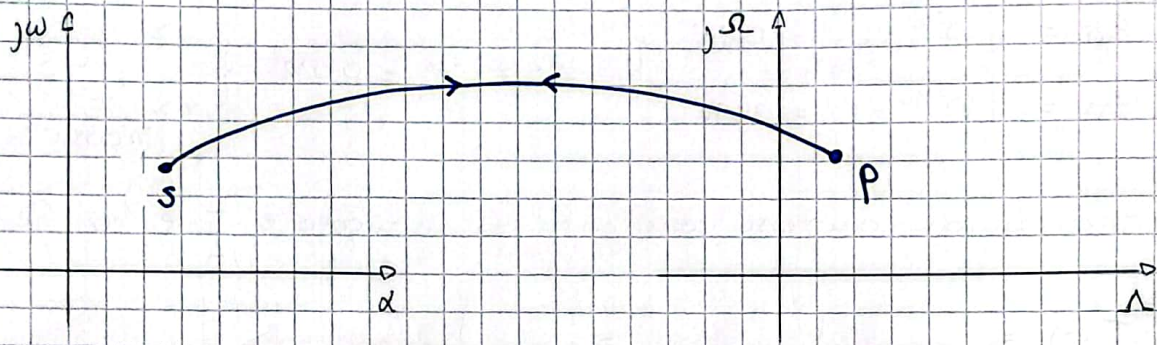
$$[bp\_num, bp\_den]$$

BPTF = tf(bp\_num, bp\_den) deriva la FdT, che poi posso graficare...

L'ultimo step e' capire e derivare la trasformazione **BP  $\rightarrow$  LP**:

$$p = Q \frac{s^2 + \omega_0^2}{s\omega_0} \dots \text{procedura puramente matematica}$$

consideriamo la trasformazione  $p = s + \frac{1}{s}$



Poiché il modulo (e la fase) e' la traccia dalla FdT lungo l'asse immaginario e' utile capire come quest'asse viene mappato nel piano p, dopo la trasformazione

> e' l'asse immaginario perche' a noi interessa  $|T(j\omega)|$

invertito la relazione:  $p = \frac{s^2 + 1}{s} \Rightarrow sp = s^2 + 1 \Rightarrow s^2 - sp - 1 = 0$

$$s = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4}}{2}$$

pongo  $p = j\Omega$  e ricavo s:  $\frac{s}{\alpha + j\omega} = \frac{j\Omega \pm \sqrt{-\Omega^2 - 4}}{2}$

$$= \frac{j \left[ \frac{\Omega}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\Omega}{2}\right)^2 + 1} \right]}{2}$$

e' un numero puramente immaginario

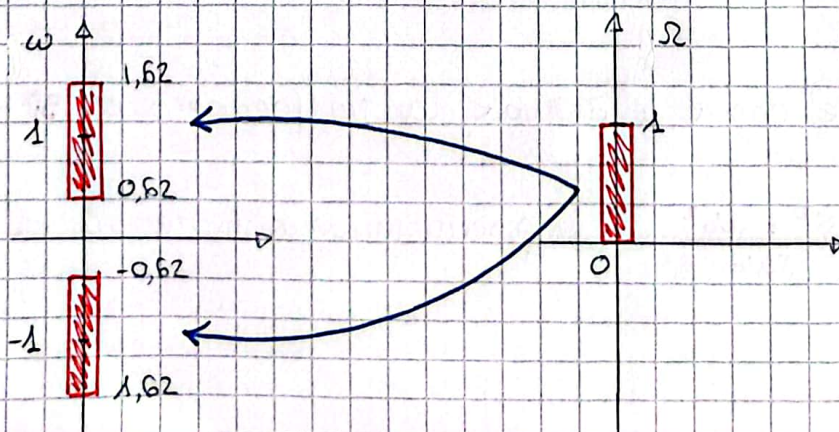
$$\Rightarrow \alpha = 0$$

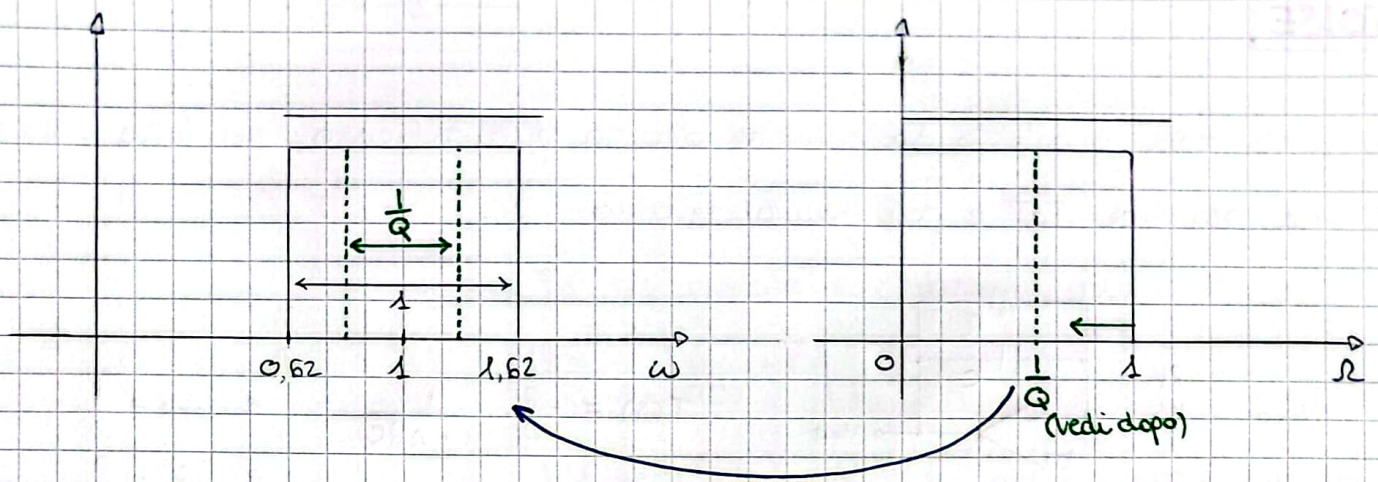
$\Rightarrow$  ho due s immaginarie

> se  $\Omega = 0 \Rightarrow \omega = \pm 1$

> se  $\Omega = 1 \Rightarrow \omega = 1,62 \vee \omega = -0,62$

> se  $\Omega = -1 \Rightarrow \omega = -1,62 \vee \omega = 0,62$

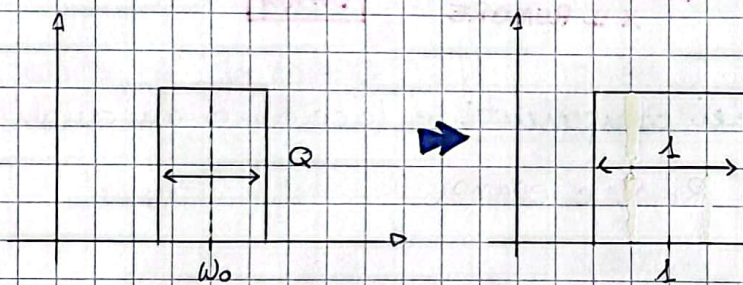




la trasformazione mappa un LP in un BP: quella inversa fa il contrario, che era quello che volevo ottenere ma con delle LIMITAZIONI

$$\omega_0 = 1 \text{ e } BW = 1 \Rightarrow Q = \frac{1}{1} = 1 \text{ e se voglio un } Q \neq 1 ?$$

... devo variare qualcosa nella trasformazione per renderla + generale e per trovare questa nuova relazione, cerco la trasformazione che mi sposta:



per arrivare a fare cio', anziche' usare un LP fino a 1, lo uso fino a  $\frac{1}{Q}$ :  
in questo caso ottengo un BP centrato in 1, ma + stretto

poi voglio centrare il filtro in una  $\omega_0 \neq 1$ :

per farlo espando la s di  $\omega_0$ :

$$1) \frac{P}{Q} = \hat{s} + \frac{1}{\hat{s}}$$

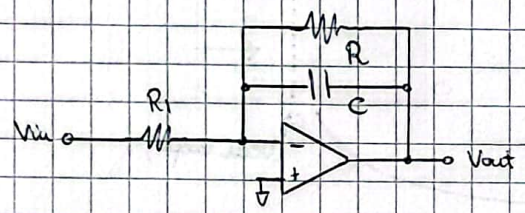
$$2) \hat{s} = \frac{s}{\omega_0}$$

$$P = Q \frac{s^2 + \omega_0^2}{s \omega_0}$$

⇒ ho ottenuto la trasformazione vista in precedenza

# NOISE

un filtro reale e' affetto da rumore che va quantificato; per farlo riferiamoci ad una semplice FdT e poi generalizziamo



$$T(s) = -\frac{R}{R_i} \cdot \frac{1}{1+sRC} \quad \text{e } \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\text{e } G = \frac{R}{R_i}$$

per un filtro senza rumore ho che  $S_{out} = S_{in} |T(j\omega)|^2$   

$$= S_{in} \frac{G^2}{1+\omega^2/\omega_0^2}$$

da cui ricavo  $\langle V_{out}^2 \rangle = \int_0^{+\infty} S_{out} df$

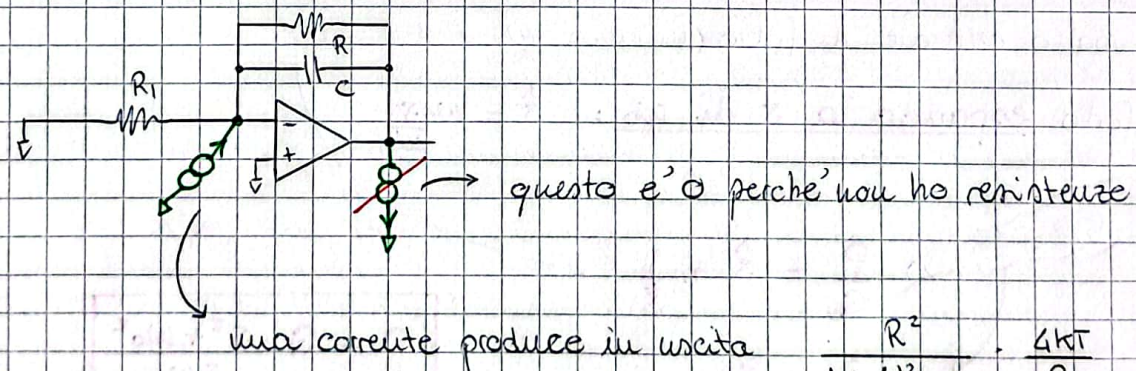
$$= S_{in} G^2 \int_0^{+\infty} \frac{df}{1+\omega^2/\omega_0^2} = G^2 S_{in} \cdot \frac{\omega_0}{4}$$

BANDA EQUIVALENTE X IL RUMORE BW<sub>req</sub>

adesso consideriamo il rumore dei componenti e facciamo un'analisi con la sovrapposizione degli effetti: Ri, R e OPAMP.

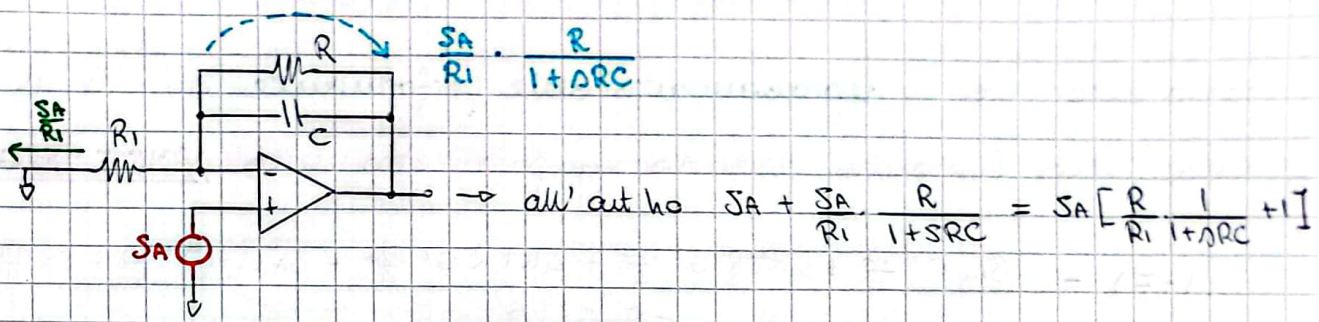
1)  $\frac{4kTR_i G^2 \omega_0}{4}$  e' il contributo di Ri (identico a Vin)

2) il contributo di R invece lo posso splittare in due:



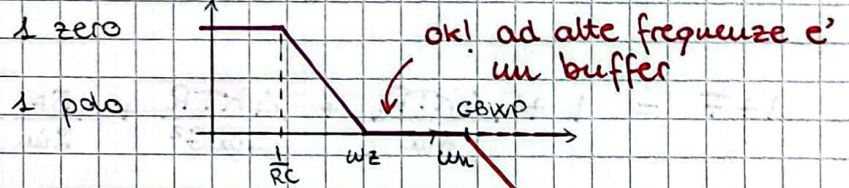
$\frac{4kTR \cdot \omega}{4}$  e' quello risultante  
 → comporre facendo l'integrale (uguale a sopra)

3) il contributo dell'OPAMP lo modello come un generatore al nodo non invertente dell'OPAMP



⇒ la FdT va "modulata" e elevata al quadrato @  $s = j\omega$

$$\left| \frac{R}{Ri} \frac{1}{1+sRC} + 1 \right|_{s=j\omega}^2 = \dots = \frac{(R+Ri)^2}{Ri^2} \left| \frac{1+s \frac{Ri}{R+Ri} C}{1+sRC} \right|_{s=j\omega}^2$$



N.B.: se facciamo l'integrale otteniamo  $\infty$  perché vale  $\int_0^{\infty}$  in realtà non è così perché l'OPAMP non ha banda  $\infty$

⇒ modifico la FdT aggiungendo un polo  $\frac{(R+Ri)^2}{Ri^2} \left| \frac{1+s \frac{Ri}{R+Ri} C}{1+sRC} \frac{1}{1+s/\omega_n} \right|_{s=j\omega}^2$

consideriamo SA WHITE: lo portiamo fuori da  $\int$ :

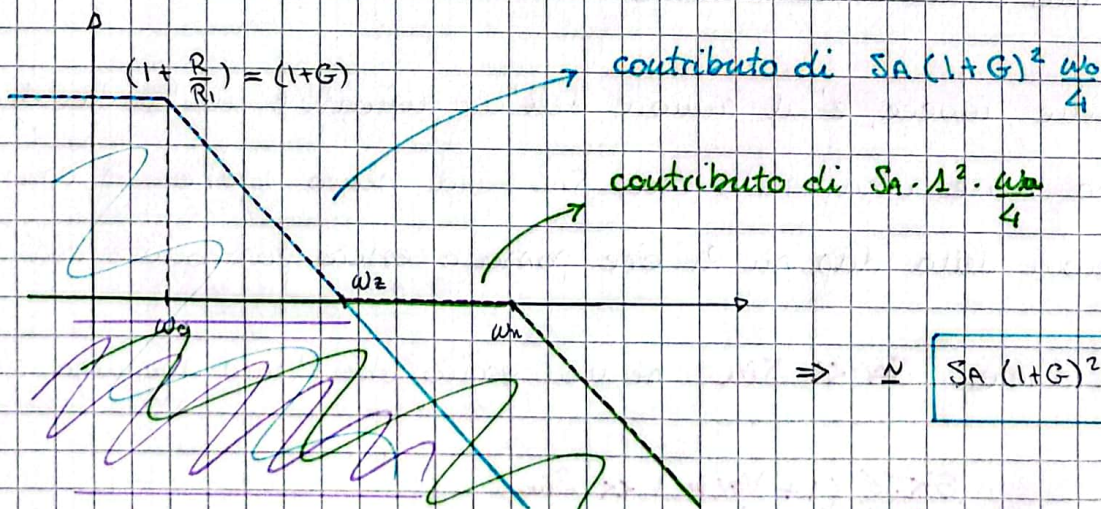
$$\rightarrow \langle V_{out}^2 \rangle_A = SA (1+G^2) \int_0^{\infty} \frac{1+s/\omega_z}{(1+s/\omega_0)(1+s/\omega_n)} \Big|_{s=j\omega}^2 df$$

per la coppia di poli al denomin.

$$BW_{n,eq} = \frac{\omega_0 Q}{4} \left[ 1 + \left( \frac{\omega_0}{\omega_n} \right)^2 \right]$$

per FdT diverse uso la tabella !!!

notiamo una cosa



$$\Rightarrow \approx \boxed{SA (1+G)^2 \frac{\omega_0}{4} + SA \frac{\omega_n}{4}}$$

se li sommiamo abbiamo una stima del rumore che "conta" due volte

l'area sotto al primo polo ⇒ questo errore e' minimo se  $G \gg 1$



posso descrivere il degradamento delle performance dovuto al rumore della cella filtrante usando un parametro detto NOISE FIGURE:

$$(1+F) = \frac{S_{in} G^2 \frac{\omega_b}{4} + 4kTR_i G^2 \frac{\omega_b}{4} + 4kTR G^2 \frac{\omega_b}{4} + SA (1+G)^2 \frac{\omega_b}{4} + SA \frac{\omega_a}{4}}{S_{in} G^2 \frac{\omega_b}{4}}$$

$\swarrow$   $S_{in} G^2 \frac{\omega_b}{4}$   $\searrow$   
 minimo rumore possibile all'output rumore all'output tenendo conto di tutti i contributi

$$1+F = 1 + \frac{4kTR_i}{S_{in}} + \frac{4kTR}{S_{in} G^2} + \frac{SA (1+G)^2}{S_{in} G^2} + \frac{SA}{S_{in} G^2} \frac{\omega_a}{\omega_b}$$

*R e' un compromesso fra questo - silicon area e power dissipation dovuti a una capacità maggiore che R e' minore*

> per minimizzare il primo termine devo avere  $4kTR_i \ll S_{in}$   
 $\Rightarrow R_i \leq R_{MAX}$

> il secondo termine introduce meno rumore perché e' diviso per  $G^2$ : ha senso perché e' già all'output e quindi non introduce limiti

> per ridurre il rumore dell'amplificatore voglio tagliare la banda, oltre  $\omega_b$ , che tanto non ha senso tenere perché non raccoglie segnale, ma solo rumore

$\Rightarrow$  aggiungo un filtro LPF dopo, in cascata, che rimuove il rumore dato dalla coda (ultimo termine)

> il terzo termine, invece, e' il rumore dell'amplificatore in banda del segnale: esso viene comparato con  $S_{in}$ : ha senso perché SA causa delle fluttuazioni della ddp su  $R_i$  che possono essere paragonate con  $S_{in}$

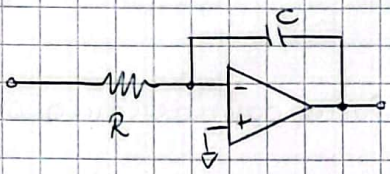
$\Rightarrow$  devo avere  $SA \ll S_{in}$  se non voglio che l'amp. aggiunga rumore

$$\frac{8kT\gamma}{g_{m,in}} \left(1 + \frac{V_{ov,in}}{V_{ov,m}}\right) \ll S_{in}$$

$\uparrow$   
 sotto la  $g_{m,in}$  rispettando il rumore... come già fatto

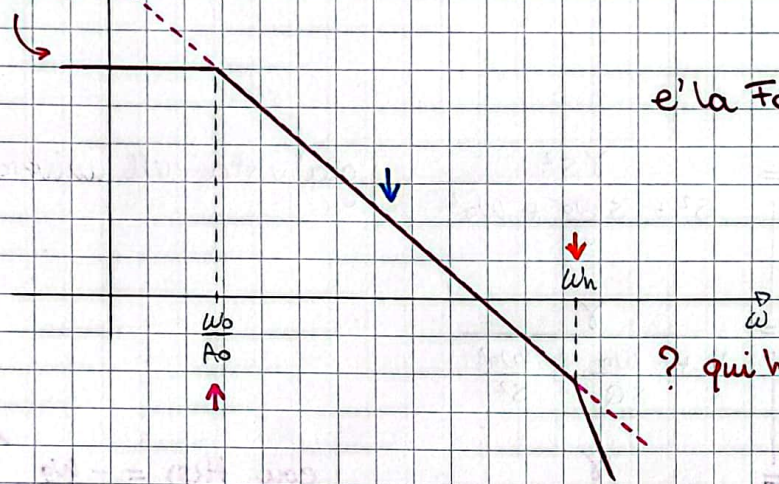
# NON IDEALITA'

fino ad ora abbiamo considerato l'amplificatore ideale con una FdT ideale



$H_{ideale}(s) = -\frac{w_0}{s}$  ma nella realtà e' diverso!

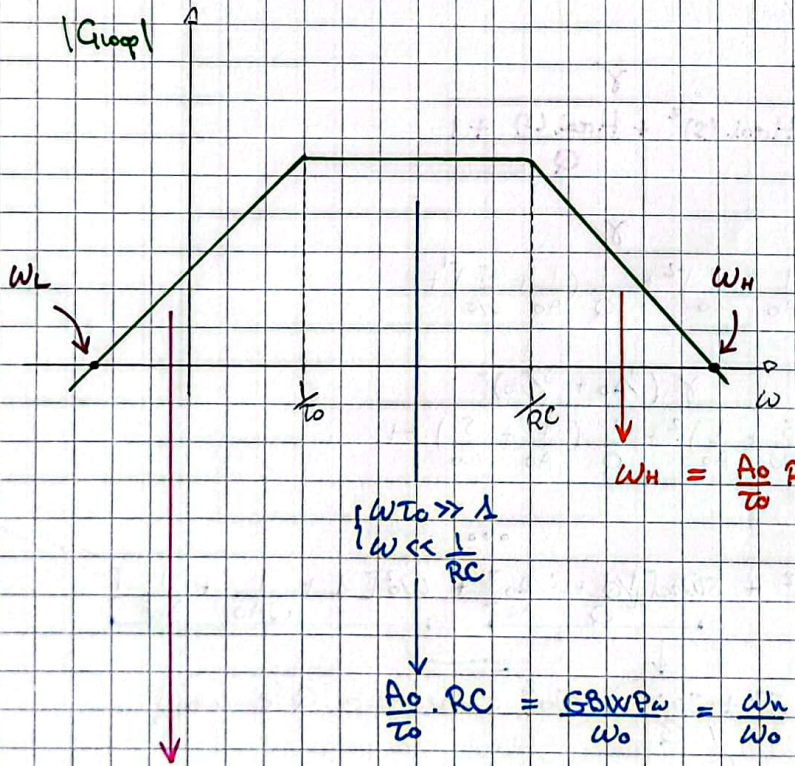
ho un guadagno massimo in DC



e' la FdT reale  $H_{reale}(s) \neq H_{ideale}(s)$

? qui ho una GBWP  $\Rightarrow$  un cut-off

consideriamo il loop:  $G_{loop}(s) = -A(s) \cdot \frac{R}{R + 1/sC} = -\frac{A_0 \cdot sRC}{(1+s\tau_0)(1+sRC)}$



e' un polo @ GBWP perche' @  $w \gg \omega_0$   $\frac{1}{sC} = 0$  e ho un buffer, la cui banda e' retta dalla GBWP

$w_H = \frac{A_0 RC}{\tau_0} \cdot \frac{1}{RC} = \frac{A_0}{\tau_0} = w_{n1}$

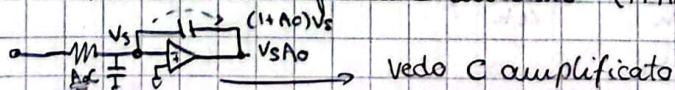
ho un polo nella reale

$\frac{A_0}{\tau_0} \cdot RC = \frac{GBWP}{w_0} = \frac{w_H}{w_0}$  e se e'  $\gg 100$  (esempio) ho che il guadagno reale  $\approx$  quello ideale

$1/w_L = \frac{A_0 RC}{\tau_0} \cdot \frac{1}{1/\tau_0} \Rightarrow w_L = \frac{1}{A_0 RC} = \frac{w_0}{A_0}$

ho un polo nella reale

abbiamo gia' visto questo risultato: **POLO DI MILLER!**  
visto che ai capi di C abbiamo  $(1+A_0)v_s$



vuol dire che se voglio poli @ MHz devo avere una GBWP @ 100 MHz

però usare tali integratori solo fino a certe frequenze  $\rightarrow$  dopo uso un **OTA**

Quali cambiamenti comporta questa differenza?

$$H_{real}(s) = - \frac{A_0}{(1 + s/\omega_L)(1 + s/\omega_H)}$$

1) consideriamo l'effetto del DC gain finito: per farlo consideriamo solo la prima parte della FdT

$$H_{rea}(s) = \frac{-1}{\left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right)}$$

e consideriamo la  $T(s) = \frac{\gamma s^2}{s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2}$  già vista nell'universo cell

$$= \frac{\gamma}{1 + \frac{\omega_0}{sQ} + \frac{\omega_0^2}{s^2}}$$

$$= \frac{\gamma}{H(s)^2 + \frac{H(s)}{Q} + 1}$$

con  $H(s) = -\frac{\omega_0}{s}$  integratore ideale

$$T'(s) = \frac{\gamma}{H_{real}(s)^2 + \frac{H_{real}(s)}{Q} + 1}$$

$$= \frac{\gamma}{\left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right) + 1}$$

$$= \frac{\gamma \left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right)^2}{\left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{1}{A_0}\right)^2 + \frac{1}{Q} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right) + 1}$$

$$= \frac{\gamma \left(\frac{1}{A_0} + \frac{s}{\omega_0}\right)^2}{s^2 + s\omega_0 \left[ \frac{1}{Q} + \frac{2}{A_0} \right] + \omega_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{QA_0} + \frac{1}{A_0^2} \right]}$$

contro quello ideale che era  $s^2 + s\omega_0 + \omega_0^2$ : variamo Q e  $\omega_0$ !

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{QA_0} + \frac{1}{A_0^2}}$$

$$\frac{\Delta Q}{Q} \approx -\frac{Q}{A_0} \frac{\Delta A_0}{A_0}$$

poco interessante... tanto ho un circuito di tuning che recupera  $\omega_0$  corretto

alla fine ricavo:  $Q \left( -\frac{2}{A_0} + 2 \frac{\omega_L}{\omega_H} + 2 \frac{\omega_E}{\omega_H} + 2 \frac{\omega_{P2}}{\omega_H} \right)$

$\downarrow$  I PAO       $\downarrow$  ZERO       $\downarrow$  II POLO

+ RHP zero  
- LHP zero