Analisi Matematica 2
Ing. Elettronica, a.a. 2018/2019. Politecnico di Milano
Domande teoriche tipo per la prova orale
Prof. M. Bramanti

Si ricorda che il programma dettagliato del corso, con le indicazioni bibliografiche dettagliate, è disponibile alla pagina web del corso.

Equazioni differenziali

1. Equazioni differenziali del prim'ordine a variabili separabili: darne la definizione ed enunciare risultati precisi di esistenza e di unicità per la soluzione del problema di Cauchy per queste equazioni. In ciascuno dei seguenti esempi, dire che cosa si può affermare in base alla teoria, riguardo all'esistenza e/o unicità della soluzione:

$$\begin{cases} xy' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = |y| \\ y(0) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

2. Equazioni differenziali lineari del prim'ordine: darne la definizione e illustrare il procedimento che si segue per scriverne l'integrale generale, **dimostrando** la formula trovata.

Enunciare poi un risultato preciso di esistenza e unicità per la soluzione del problema di Cauchy per queste equazioni, scrivendo anche la formula che assegna esplicitamente la soluzione di tale problema.

3. Equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti continui (non necessariamente costanti!): darne la definizione e dire qual è la struttura del loro integrale generale.

Spiegare poi il metodo con cui si ottiene l'integrale generale delle equazioni omogenee a coefficienti costanti, **dimostrando** i passaggi. (Non limitarsi a riportare la formula che assegna caso per caso la soluzione).

4. Equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti continui (non necessariamente costanti): darne la definizione e dire qual è la struttura del loro integrale generale. Spiegare poi a cosa serve e in cosa consiste il "metodo di somiglianza", illustrando alcuni dei vari casi visti. (Per "caso" non si intende un singolo esempio numerico, ma una opportuna *classe di funzioni*).

5. Equazioni differenziali lineari del second'ordine a coefficienti continui (non necessariamente costanti): darne la definizione e dire qual è la struttura del loro integrale generale (comune a tutte le equazioni lineari), **dimostrando** l'affermazione fatta. Enunciare poi un risultato preciso di esistenza e di unicità per la soluzione del problema di Cauchy per queste equazioni.

6. Discutere uno a scelta dei modelli differenziali di fenomeni fisici che si sono studiati in questo corso, illustrando come si arriva alla formulazione del modello, spiegando il ruolo dei vari parametri, illustrando il significato fisico che ha in questo caso il problema di Cauchy, e facendo qualche osservazione significativa che metta in relazione qualche aspetto analitico con qualche aspetto fisico.

A titolo di esempio, alcune possibili tracce tra cui scegliere sono:

1) Modello di Malthus di dinamica delle popolazioni, modifica del modello che porta all'equazione logistica (modello di Verhulst), dinamiche tipiche previste da queste equazioni;

2) Circuiti LCR, equazione che regola l'intensità di corrente, regime transitorio e permanente, fenomeni vari che si presentano al variare dei parametri;

3) Oscillazioni meccaniche forzate e/o smorzate, regime transitorio e permanente, fenomeni vari che si presentano al variare dei parametri;

4) Caduta dei gravi nell'aria in assenza o in presenza di attrito, dinamica prevista, comportamento asintotico per tempi brevi e lunghi.

Curve e calcolo differenziale per funzioni vettoriali di variabile reale

1. Dare la definizione di limite, continuità, derivabilità per una funzione $\underline{f}$: $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$. Enunciare le principali regole di calcolo differenziale per queste funzioni (derivata della somma, del prodotto scalare, della composizione, ecc.) e **dimostrarne** qualcuna. In particolare, enunciare e dimostrare la proprietà che riguarda l'accelerazione istantanea di un punto mobile con velocità scalare costante.

2. Dare la definizione di: arco di curva, in $\mathbb{R}^m$, continuo; regolare; regolare a tratti; chiuso; semplice, illustrando anche con esempi le definizioni date. Dare la definizione di integrale di linea di prima specie.

3. Dare la definizione di integrale di linea di prima specie, enunciando con precisione le ipotesi sulla curva e sulla funzione integranda. Scrivere poi la definizione di baricentro di un arco di curva materiale non omogeneo oppure omogeneo, e di momento d'inerzia rispetto a un asse assegnato, per un arco di curva materiale non omogeneo oppure omogeneo.

4. Dare la definizione di arco di curva continuo; curva rettificabile; lunghezza di un arco di curva. Enunciare il teorema sul calcolo della lunghezza di un arco di curva regolare e mostrare come si particolarizza al caso di una curva piana grafico di una funzione.

5. Curve piane in forma polare: definire questo tipo di parametrizzazione delle curve, fare esempi notevoli di curve in forma polare (ad es. spirali, coniche...), **dimostrare** la formula per il calcolo della lunghezza di un arco di curva regolare in forma polare e fare un esempio del suo utilizzo.

6. Dare la definizione di: arco di curva regolare e regolare a tratti; integrale di linea di prima specie. Enunciare il teorema sull'invarianza di questo integrale di linea per cambiamento regolare di parametrizzazione e per cambiamento di orientazione.

7. Dare la definizione di: arco di curva regolare; regolare a tratti; cambiamento regolare di parametrizzazione, con o senza cambio di orientazione; parametro arco. Enunciare e **dimostrare** la proprietà caratteristica delle curve parametrizzate mediante il parametro arco. Mostrare come si ricava il parametro arco per l'elica cilindrica.

Topologia e continuità per funzioni di più variabili

1. Dare la definizione di insieme aperto e insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$, ed enunciare le principali proprietà degli insiemi aperti e chiusi. Dare la definizione di insieme limitato, insieme connesso, insieme semplicemente connesso, in $\mathbb{R}^n$.

Per ciascuna delle proprietà definite (aperto, chiuso, limitato, connesso, semplicemente connesso) fare un esempio di un insieme che ha e un insieme che non ha la proprietà in questione.

2. Dopo aver dato la definizione di insieme aperto e insieme chiuso in $\mathbb{R}^n$, enunciare e **dimostrare** il teorema che riguarda gli insiemi aperti o chiusi definiti mediante equazioni o disequazioni che coinvolgono funzioni continue.

3. Enunciare con precisione il teorema di Weierstrass e il teorema degli zeri per funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definendo i concetti topologici che compaiono nell'enunciato. Dimostrare poi il teorema degli zeri.

Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

1. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definire con precisione i seguenti concetti: continuità di f in $\underline{x}_0$, esistenza di derivate parziali di f in $\underline{x}_0$, differenziabilità di f in $\underline{x}_0$, esistenza di derivate direzionali di f in $\underline{x}_0$. Quindi, dire quali implicazioni valgono o non valgono tra questi concetti.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Definire con precisione i seguenti concetti:

derivate parziali di f in un punto; differenziabilità di f in un punto; piano tangente al grafico di f in un punto.

Quindi enunciare e **dimostrare** il teorema che dà una condizione sufficiente per la differenziabilità di f in un punto (o in un aperto).

3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Definire con precisione i seguenti concetti:

derivate parziali di f in un punto; derivate direzionali di f in un punto; differenziabilità di f in un punto.

Quindi enunciare e **dimostrare** il teorema detto "formula del gradiente". Dedurne la relazione esistente tra gradiente e direzione di massima pendenza del grafico della funzione.

4. Enunciare il teorema di differenziabilità delle funzioni composte, nel contesto delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, e mostrarne qualche applicazione significativa (ad esempio: gradiente di funzioni radiali; ortogonalità del gradiente alle linee di livello; omogeneità delle derivate di funzioni omogenee).

5. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Enunciare il teorema di Schwarz sulle derivate seconde di f. Dare la definizione di matrice hessiana di f e di differenziale secondo. Mostrare poi un contresempio di funzione $f(x, y)$ per cui $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ esistono entrambe ma sono diverse.

6. Enunciare e **dimostrare** la formula di Taylor col resto secondo Lagrange e col resto secondo Peano, al second'ordine, per $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

7. Inquadrare il problema dell'ottimizzazione delle funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: definizione di punto di massimo (minimo) locale, teorema di Fermat (enunciarlo e **dimostrarlo**), definizione di punto stazionario, teorema sullo studio della natura dei punti stazionari mediante l'hessiana (senza dimostrazione).

8. Dare la definizione di forma quadratica in n variabili e segno di una forma quadratica. Quindi, per $n = 2$, enunciare e **dimostrare** il teorema sul riconoscimento del segno di una forma quadratica mediante la matrice.

9. Per le funzioni $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si richiami la definizione di: punto di massimo (minimo) locale, punto stazionario, e si enunci il teorema di Fermat. Quindi, enunciare e **dimostrare** il teorema sulla relazione tra la natura di un punto stazionario e il segno della forma quadratica differenziale secondo.

10. Si inquadri il problema della ricerca della funzione definita implicitamente da un'equazione $f(x, y) = 0$. Si enunci con precisione il teorema di Dini e lo si illustri con opportuni esempi e contresempi, che mostrano casi in cui, non essendo verificate le ipotesi del teorema, la funzione implicita non esiste, o non è unica, o non è regolare.

11. Si inquadri il problema dell'ottimizzazione vincolata per funzioni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definendo con precisione le nozioni coinvolte. Quindi si enunci e si **dimostri** il teorema sul moltiplicatore di Lagrange.

12. Dare la definizione di: superficie regolare parametrizzata in $\mathbb{R}^3$, punti singolari di una superficie, versore normale, piano tangente, orientazione. Quindi, mostrare come si scrivono il versore normale e l'elemento d'area per una superficie cartesiana, ossia del tipo $z = f(x, y)$ con $f \in C^1(A), A \subseteq \mathbb{R}^2$, A aperto.

16. Dare la definizione di: superficie regolare parametrizzata in $\mathbb{R}^3$, punti singolari di una superficie, versore normale, elemento d'area. Quindi, mostrare come si scrivono le equazioni della superficie di rotazione generata da una curva piana e mostrare sotto quali ipotesi sulla curva questa superficie risulta regolare, ricavando esplicitamente l'espressione dell'elemento d'area per queste superfici.

Calcolo integrale in più variabili

1. Dare la definizione di integrale doppio per una funzione di due variabili, limitata, su un rettangolo. Fare un esempio di funzione non integrabile su un rettangolo. Quindi, enunciare e **dimostrare** il Teorema di riduzione per funzioni continue su un rettangolo.

2. Dare la definizione di integrale doppio per una funzione di due variabili, limitata, su un rettangolo. Quindi dare la definizione di integrale doppio per una funzione definita su un insieme limitato qualsiasi di $\mathbb{R}^n$ e fare un esempio di una funzione continua non integrabile su un dominio non rettangolare.

3. Dopo aver dato la definizione di dominio semplice, dominio regolare, nel piano, enunciare e **dimostrare** il teorema di riduzione degli integrali doppi a integrali iterati, per funzioni continue su domini semplici non rettangolari.

4. Enunciare le proprietà elementari dell'integrale doppio per funzioni integrabili (linearità, additività, proprietà di annullamento....) e per funzioni continue (proprietà di annullamento, teorema della media), precisando con cura le ipotesi sotto le quali valgono le varie proprietà.

5. Dopo aver richiamato la definizione di integrale doppio generalizzato $\int\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy$, mostrare come può essere calcolato, con metodi propri del calcolo integrale in più variabili, il valore dell'integrale notevole (unidimensionale)

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx,$$

spiegando i passaggi.

Calcolo differenziale vettoriale

1. Dare la definizione di: campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$, campo irrotazionale, campo conservativo. Enunciare e **dimostrare** le condizioni necessarie affinché un campo sia conservativo, e mostrare con un esempio che la condizione necessaria non è anche sufficiente. Enunciare quindi delle condizioni sufficienti affinché un campo sia conservativo, definendo le nozioni coinvolte.

2. Dare accuratamente la definizione di integrale di linea di prima e di seconda specie (=lavoro), e confrontarne le proprietà. Enunciare il teorema che riguarda il cambio di parametrizzazione nell'integrale di linea di seconda specie.

3. Dare la definizione di: campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$, lavoro di un campo vettoriale su una curva orientata, definendo con cure le nozioni coinvolte. Dare quindi la definizione di campo conservativo ed enunciare e **dimostrare** il teorema che dice come si calcola il lavoro di un campo conservativo lungo una curva orientata.

4. Dare la definizione degli operatori differenziali divergenza e rotore, spiegando a quali tipi di campi si applicano. Quindi scrivere qual è il risultato delle tre composizioni di operatori:

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}, \ \operatorname{rot}\operatorname{grad}, \operatorname{div}\operatorname{grad}$$

dimostrando quanto affermato.

5. Dare la definizione degli operatori differenziali divergenza e rotore, spiegando a quali tipi di campi si applicano. Quindi scrivere qual'è il risultato delle seguenti composizioni di operatori, **dimostrando** le identità affermate:

$$\nabla \cdot (fG) =$$

$$\nabla \times (fG) =$$

6. Dare la definizione di: superficie regolare parametrizzata in $\mathbb{R}^3$, punti singolari di una superficie, versore normale, piano tangente, orientazione, area di una superficie, flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie orientata.

7. Enunciare e **dimostrare** il teorema di Gauss della divergenza, definendo le varie nozioni coinvolte. Mostrare poi come da questo teorema si possa dedurre il significato della divergenza di un campo in un punto.

8. Enunciare il teorema di Gauss della divergenza, definendo le varie nozioni coinvolte. Quindi mostrare un'applicazione fisico-matematica significativa di questo teorema, a scelta tra le seguenti:

(1) la deduzione del teorema di Gauss dell'elettrostatica per un sistema discreto di cariche a partire dalla legge di Coulomb;

(2) la deduzione della legge di Maxwell per il campo elettrico dal teorema di Gauss dell'elettrostatica per una distribuzione continua di cariche.

9. Utilizzando opportunamente il calcolo differenziale vettoriale, dedurre dalle equazioni di Maxwell in assenza di sorgenti

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{B} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{E} = 0 \\ \nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \underline{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} \end{cases}$$

il fatto che ogni componente del campo elettrico $\underline{E}$ soddisfa l'equazione delle onde $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0$. Si chiede di giustificare i passaggi.

10. Enunciare il teorema di Stokes del rotore, definendo con cure le varie nozioni coinvolte. Quindi mostrare come utilizzando questo si può dedurre dalla legge di Neumann sul flusso di un campo magnetico variabile

$$-\frac{d}{dt} \Phi \left(\underline{B} \left(t, \cdot \right), \Sigma \right) = \int_{\partial^+ \Sigma} \underline{E} \cdot d\underline{r},$$

l'equazione di Maxwell per il rotore del campo elettrico.

11. Enunciare il teorema di Stokes del rotore, definendo con cure le varie nozioni coinvolte. Quindi mostrare come da questo discende, nel caso piano, la formula di Gauss-Green, e come a sua volta questa fornisce una formula per il calcolo di aree piane mediante integrali curvilinei.

12. Enunciare il teorema di Gauss-Green per un campo vettoriale piano, e mostrare come da questa si deduce una formula per il calcolo di aree piane mediante integrali curvilinei. Ricavare infine da questa formula quella che si può usare per il calcolo dell'area di una regione contornata da una curva espressa in forma polare.

Serie di funzioni, serie di Fourier

1. Dare la definizione di convergenza puntuale e convergenza totale per una serie di funzioni $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$. Enunciare quindi i teoremi che riguardano la continuità e derivabilità termine a termine di una serie di funzioni, in relazione alla convergenza totale.

2. Dare la definizione di serie di potenze e enunciare quindi:

a) il teorema che afferma l'esistenza di un numero chiamato raggio di convergenza, e descrive il comportamento della serie di potenze in relazione al raggio di convergenza;

b) il teorema che afferma come si può calcolare effettivamente il raggio di convergenza di una serie di potenze.

Fare esempi espliciti di serie di potenze per illustrare le varie affermazioni fatte.

3. Dare la definizione di polinomio trigonometrico e serie trigonometrica. Per una generica serie trigonometrica (quindi *non necessariamente* una serie ottenuta come serie di Fourier di una funzione assegnata) enunciare il criterio per la convergenza totale e il criterio studiato per la convergenza puntuale, facendo esempi di serie trigonometriche che convergono totalmente o che convergono puntualmente ma non totalmente.

4. Dare la definizione di spazio vettoriale (reale) con prodotto scalare, definire la norma e la distanza in uno spazio di questo tipo. Quindi enunciare e **dimostrare** in questo contesto il Teorema di Pitagora (per una somma finita di vettori) e enunciare il teorema delle proiezioni (su un sottospazio di dimensione finita).

5. Approssimazione in media quadratica di una funzione periodica su $[0, 2\pi]$, mediante polinomi trigonometrici: dopo aver richiamato qual è lo spazio di funzioni e il sistema ortonormale che si considerano, enunciare e **dimostrare** il teorema (conseguenza del teorema delle proiezioni) che afferma le varie proprietà delle *somme parziali* di Fourier (tra cui la disuguaglianza di Bessel e il lemma di Riemann Lebesgue). Quindi enunciare (senza dimostrazione) il teorema di convergenza in media quadratica e l'uguaglianza di Parceval.

6. Convergenza puntuale delle serie di Fourier per funzioni regolari a tratti: enunciare con precisione questo teorema, definendo con cura le nozioni coinvolte. Fare un esempio di una funzione continua ma non regolare a tratti in $[-\pi, \pi]$, un esempio di funzione regolare a tratti ma non continua, in $[-\pi, \pi]$, un esempio di funzione continua in $[-\pi, \pi]$ la cui 2π-periodizzata non è continua in $\mathbb{R}$.

7. Enunciare il teorema sulla velocità di convergenza a zero dei coefficienti di Fourier, definendo con cura le nozioni coinvolte, e **dimostrarlo** nel caso base $s = 1$. Fare esempi di funzioni definite in $[-\pi, \pi]$ per le quali, in base al teorema precedente, si può garantire che i coefficienti di Fourier sono: infinitesimi (ma non $o(1/k)$); oppure $o(1/k)$ (ma non $o(1/k^2)$); oppure $o(1/k^2)$.